REPPE
Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino

A GEOMETRIA EUCLIDIANA E AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANA NUMA VISÃO EPISTEMOLÓGICA SEGUNDO A FILOSOFIA DE BACHELARD.

THE EUCLIDIAN GEOMETRY AND THE NON-EUCLIDIAN GEOMETRIES IN AN EPISTEMOLOGICAL VIEW ACCORDING TO BACHELARD'S PHILOSOPHY.

Armando Paulo da SILVA[1]
Wilson Massashiro YONEZAWA[2]

Resumo
Este artigo tem o objetivo de mostrar a visão epistemológica segundo a filosofia de Bachelard das geometrias euclidiana e não-euclidianas. A metodologia utilizada foi a descrição e a análise dos fundamentos existentes na literatura. Os aspectos abordados nesta pesquisa envolvem: a geometria euclidiana, a geometria depois de Euclides, os precursores da geometria não-euclidiana, as geometrias não-euclidianas esférica e a hiperbólica e Bachelard e os dilemas da filosofia geométrica. Considera-se que a Filosofia da Ciência que Bachelard defende está relacionada com o desenvolvimento do conhecimento científico sem a origem de verdades absolutas. É preciso buscar as possibilidades de transformações dentro de uma área de conhecimento sem, necessariamente, descaracterizá-la.

Palavras-chaves: Geometria euclidiana; Geometrias não-euclidianas; Filosofia de Bachelard.

Abstract

This paper aims to show the epistemological view according to Bachelard’s philosophy of Euclidean and non-Euclidean geometries. The methodology used was the description and analysis of the foundations existing in the literature. The aspects covered in this research involve: Euclidean geometry after Euclid, the precursors of non-Euclidean geometry, spherical and hyperbolic non-Euclidean geometries and Bachelard and the dilemmas of geometric philosophy. It is considered that the Philosophy of Science that Bachelard defends is related to the development of scientific knowledge without the origin of absolute truths. It is necessary to search for the possibilities of transformations within an area of knowledge without necessarily decharacterizing it.

[1] Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Câmpus Cornélio Procópio (UTFPR-CP). E-mail: armando@utfpr.edu.br.
[2] Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) – Faculdade de Ciências – Campus de Bauru. E-mail: yonezawa@fc.unesp.br.

Keywords: Euclidian Geometry; Non-euclidean Geometries, Bachelard's philosophy.

Introdução

O homem abstraiu da natureza as primeiras ideias geométricas. Inicialmente, essas ideias refletiam suas necessidades de buscar alternativas para sua própria subsistência (agricultura, pastoreio, moradia). Em diferentes locais do planeta terra o homem produziu conhecimento geométrico para resolver problemas como: a demarcação de terras, a construção de casas, templos, palácios, castelos, igrejas, pirâmides, esfinges, entre outros.

Todo o conhecimento geométrico produzido precisava de alcançar consistência para ser compreendido e transmitido para as gerações futuras.

Euclides assumiu para si a responsabilidade desse trabalho. Ele utilizou o recurso dos postulados ou axiomas para organizar o conhecimento geométrico existente até aquele momento. Tendo em vista que o postulado pede que seja aceito como verdade e para os quais não exige prova, este recurso possibilitou que os teoremas fossem deduzidos tendo como base um corpo inicial de cinco proposições aceitas como válidas. O resultado deste trabalho deu origem ao livro “Os elementos” (COURANT, ROBBINS, 2000).

Esse conhecimento elaborado e organizado por Euclides perdurou por dois milênios como o modelo para todas as demonstrações geométricas.

Nos séculos XVII e XVIII inicia-se um afastamento da tradição euclidiana, onde alguns geômetras passam a pensar em novas perspectivas e estas eram contraditórias aos princípios da geometria euclidiana. Inicia-se a busca por postulados que fossem consistentes, completos e independentes (COURANT, ROBBINS, 2000).

Esse afastamento levou matemáticos a dedicarem parte de sua vida para estabelecer uma geometria que não seguia os padrões válidos. Dentre estes matemáticos estão Lobachevsky, Bolyai, Gauss e Riemann. Eles investigaram o que poderia ocorrer caso desprezassem o quinto postulado de Euclides e passasse considerar o oposto, ou seja, “que através de um ponto C não situado sobre uma dada linha reta AB, pudéssemos traçar não um, mas duas, e consequentemente um número infinito, de linhas paralelas a AB” (OBSERVATÓRIO NACIONAL, 2014). Os frutos dos seus trabalhos deram origem às geometrias não-euclidiana que subdivide em esférica ou elíptica e hiperbólica.

As novas geometrias trouxeram a possibilidade de ampliar os conhecimentos restritos ao plano para o espaço curvo.

Essa possibilidade do surgimento de novos conhecimentos sem que necessariamente o conhecimento anterior seja eliminado faz parte dos obstáculos epistemológicos que Bachelard defendia, pois haviam inúmeros obstáculos a serem superados, quando os matemáticos tiveram a iniciativa de olharem para a geometria euclidiana com uma visão contraditória, principalmente em relação ao quinto postulado ou postulado das paralelas.

Para compreender melhor os avanços que ocorreram, faz-se necessário uma regressão e destacar alguns aspectos da geometria euclidiana.

A geometria euclidiana

A geometria é uma das partes da matemática que tem suas raízes muito antes da era cristã, não podendo esquecer que toda sua evolução são frutos dos trabalhos de diversos povos, bem como suas reflexões registradas nas mais diversas formas e que, geralmente, envolviam situações ligadas às suas próprias necessidades.

Dentre as civilizações que deixaram suas contribuições para a geometria temos: os Egípcios, os Babilônios, os Chineses, os Hindus, os Gregos, os Europeus (era medieval) e a civilização moderna (BOYER; MERZBACH, 2012). E, dentre os gregos, aquele que mais contribui com a geometria foi Euclides de Alexandria. Ele foi professor, matemático platônico e escritor, sendo, muitas vezes, referido como o “Pai da Geometria”. Em sua obra, “Os Elementos”, encontram-se os registros dos teoremas fundamentais da geometria e esta é uma das mais influentes na história da matemática. Nessa obra, Euclides desenvolveu os conceitos e as relações existentes da Geometria Euclidiana. Esta geometria se baseia em proposições primitivas, conhecidas como axiomas ou postulados. Estas proposições foram definidas utilizando o conceito primitivo de ponto e as duas relações primitivas: a intermediação e a congruência. Sendo que a primeira relação envolve a questão de que um ponto pode estar situado entre dois outros pontos distintos e a segunda, que é possível sobrepor as figuras geométricas, uma sobre a outra, de tal modo que haja uma correspondência biunívoca entre todos os seus pontos (EUCLIDES, 2009).

A pretensão de sua geometria era descrever numa formulação racional a geometria intuitiva do espaço, onde o ponto é “o que não tem partes”; a linha é o “comprimento sem espessura”; a reta é uma “linha que descansa por igual em todos os seus pontos”. Partindo destas noções é possível construir definições mais avançadas, como, por exemplo, que as retas paralelas coplanares não se interceptam. E até mesmo, noções gerais, que em seu tempo seriam dadas pela lógica ou por uma teoria dos conjuntos inconscientes, a qual seria inata, aparente de não contradição e logo de inverossímil discussão como: “iguais a uma terceira são iguais entre si”, “coisas que podem fazer-se coincidir são iguais”, “o todo é maior do que a parte” (EUCLIDES, 2009).

Os cinco postulados que Euclides estabeleceu foram:

Postulado 1: Pode ser desenhada uma linha reta conectando qualquer par de pontos, ou seja, é possível traçar um segmento de reta partindo de um ponto para qualquer outro;

Postulado 2: Qualquer segmento de reta pode ser estendido indefinidamente pela linha reta, ou seja, é possível prolongar qualquer segmento de reta tanto quanto desejarmos;

Postulado 3: Dado um segmento de reta, um círculo pode ser desenhado tendo o segmento como raio e um dos seus extremos como o centro, ou seja; é possível traçar uma circunferência de centro em qualquer ponto e com um raio que tenha a medida do segmento de reta escolhido;

Postulado 4: Todos os ângulos retos são congruentes, ou seja, são iguais entre si;

Postulado 5: Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado se foram estendidas indefinidamente (EUCLIDES, 2009).

Este quinto postulado ficou conhecido como Postulado das Paralelas. Até o momento não é possível prová-lo como um teorema. A geometria em função destes postulados passou a ser conhecida como: geometria euclidiana - aquela que são satisfeitos os cinco postulados, geometria absoluta – aquela que são satisfeitos os quatro primeiros postulados e geometria afim – aquela que o primeiro, o segundo e quinto postulado são relevantes

Euclides também escreveu obras sobre perspectivas, secções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor. Existem obras dele que estão perdidas: “Lugares de Superfícies”, “Pseudaria ou Falácias” e “Porismas”. Vale ressaltar que, contrariamente a impressão difundida, o seu livro “Os Elementos”, além de tratar de toda a geometria, aborda, também, a teoria dos números e a álgebra elementar (EVES, 2004).

A geometria depois de Euclides

A geometria após as contribuições de Euclides continuou a se desenvolver em passos lentos por um longo período. Depois dele, o também grego Apolônio deixou sua obra de maior destaque que é “As cônicas”, onde trata da questão da parábola e da elipse. Assuntos estes que possibilitaram o estudo das órbitas dos planetas.

Por mais de 2000 anos a obra de Euclides foi a única referência para o ensino de geometria, pois sistematizou e provou o conhecimento matemático produzido, além de estruturar de forma lógica os postulados básicos existentes (GARBI, 2007).

Na Europa medieval, enquanto a geometria parecia estar tudo bem definido e estruturada, ela foi utilizada nos projetos arquitetônicos arrojados para as grandes construções de Catedrais góticas como: *Chartres, Notre-Dame, Westmister, Reins*).

Em 1629, o bispo de Corinto, Willian de Moerbeke traduziu as seguintes obras de Arquimedes, do grego para o latim: “O tratado sobre espirais”, “A quadratura da parábola”. “Conóides e Esferóides”. Apesar de que que os manuscritos originais da tradução destas obras, somente foram encontrados em 1884, no Vaticano.

No século XVIII da era Cristã, com a Revolução Francesa e o nascimento da Escola Politécnica, os matemáticos Monge e Carnot vão reavivar a geometria pura. Surge Charles Julien Brianchon que estudou na Escola Politécnica sendo aluno de Monge e que leu os estudos de Carnot sobre a geometria e, baseando-se nesses conhecimentos desenvolveu um teorema que é conhecido como “Teorema de Brianchon” e foi, também, o primeiro a retomar o teorema de Pascal e exprimi-lo de forma moderna: “Em todo hexágono inscrito numa secção cônica, os três pontos de intersecção dos lados opostos sempre estão sobre uma reta’’. E depois demonstrou o teorema que tem o seu nome: “Em todo hexágono circunscrito, há uma secção cônica, as três diagonais cortam num mesmo ponto”.

As relações entre ponto e reta sobre cônicas, foram exploradas por Jean- Victor Poncelet, que também estudou com Monge e se tornou o verdadeiro fundador da geometria projetiva.

Nesse período, outros matemáticos estudaram com maior rigor os postulados de Euclides e perceberam que haviam limitações para o quinto postulado e a partir desses estudos nascem outras geometrias: as não-euclidianas (hiperbólica e a esférica), a projetiva, a analítica e a diferencial.

Os precursores da geometria não-euclidiana

O quinto axioma ou postulado que ficou conhecido como “postulado das Paralelas”, até mesmo Euclides o considerava pouco evidente. Ele retardou o quanto pode o seu uso. Um fato que leva a esta consideração é não utilizá-lo para provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo não excede dois retos (POGORELOV[3], apud CARMO, 1987). Esse fato se repete na demonstração das 26 primeiras proposições do Livro I da sua obra “Os elementos” (HEATH[4], apud CARMO, 1987). E até o século XIX a tentativa era prová-lo utilizando os quatro primeiros. Em 1733, o padre Jesuíta Gerolamo Sacheri, em sua obra “Euclides liberto de todas as deficiências”, supôs ter demonstrado o quinto axioma recorrendo ao método de demonstração por absurdo, onde enunciou um conjunto de resultados em que o postulado é falso. O objetivo de provar o axioma, na verdade, levava a enunciar resultados que seriam da geometria não-euclidiana (COURANT, ROBBINS, 2000).

Em 1792, com apenas 15 anos, o matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss mostrou que a negação do quinto axioma também não o levava a resultados contraditórios com os axiomas mais básicos e sintéticos da geometria, hoje conhecida como “geometria absoluta”.

As dúvidas que surgiram com as tentativas de demonstrar o quinto axioma levaram os geômetras a pensar em outras possibilidades, mas o primeiro geômetra que, de forma consciente, afirmou a existência de uma nova geometria foi o russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky. O seu principal trabalho “*Geometriya”* foi concluído em 1823, mas foi no dia 23 de fevereiro de 1826 que ele fez sua apresentação em uma sessão do Conselho Científico do departamento de Matemática e Física da Universidade de Kazan sob o título de “Sobre os fundamentos da geometria”. No seu trabalho, ele apresenta uma geometria onde era possível que: por um ponto exterior a uma reta passasse mais de uma paralela, com isso negava definitivamente o quinto. Esta evidência foi registrada na forma de artigo e submetida na Academia de Ciências

[3] POGORELOV, A. V. **Geometria Elemental.** Trad. Espanhola do Russo. Moscou: Mir, 1974.

[4] HEATH, T. L. ***The thirteen books of Euclides Elements***, orig. 1908. Republicado, New York: Dover, 1925. 3 v.

de S. Petersburgo e num primeiro momento foi rejeitada, mas em 1829 o artigo *On the Principes of Geometry* foi publicado, sendo a marca oficial do nascimento da geometria não-euclidiana. Lobatchevsky desenvolveu um modelo de geometria, hoje conhecida como “semi-plano hiperbólico”, que prova que a soma de três ângulos internos de um triângulo é menor do que um ângulo reto (BOYER; MERZBACH, 2012).

Em 1832, o matemático Húngaro János Bolyai publicou como um apêndice do livro de seu pai, também matemático, Farkas Bolyai, um tratado, fruto de cinco anos de pesquisas sobre geometria não-euclidiana. Tratado este que desenvolveu independentemente, sem qualquer relação com Lobachevsky, e que, também, negava o quinto axioma de Euclides. Em função deste tratado, ele é considerado um dos percursores da geometria não-euclidiana.

A geometria não-euclidiana exigiu uma coragem intelectual de Gauss, Bolyai e Lobachevsky para que compreendessem que havia possibilidade de uma geometria perfeitamente consistente que não se baseava na geometria euclidiana, mas que apontava suas limitações (COURANT, ROBBINS, 2000).

Em 1853, o matemático Bernhard Riemann na sua tese de licenciatura apresenta uma ideia analítica de caracterização da geometria, fundando assim a geometria diferencial Riemanniana. A construção desta geometria traz o conceito de curvatura, de que Gauss já havia feito seu uso para superfícies.

Com isso, a geometria no R^2 passa a ter três tipos: a hiperbólica, a plana e a elíptica, que em conformidade com a curvatura de Gauss, coincide em R^2 com a curvatura de Riemann, podendo ser: negativa, nula ou positiva, respectivamente.
Utilizando uma esfera, no caso da curvatura positiva, com a métrica canônica, terão retas somente em seus círculos de raio máximo, não existindo a possibilidade de duas retas paralelas.

Essa geometria diferencial de Riemann passa a ser aplicada na prática com os conceitos de relatividade, algébricos, topológicos e de análise.

Bessel, em 1830, disse que: “enquanto o número é produto exclusivo do nosso espírito, o espaço tem uma realidade para além do espírito, cujas leis não podemos prescrever completamente”. Este pensamento mostra o quanto a geometria tem uma enorme independência no cérebro humano se a compararmos com outras áreas da matemática.

No final do século XIX, o Francês Henri Poincaré desenvolve novos modelos de geometria *hiperbólica* e inventou o que ficou conhecido como o “disco de Poincaré”. Este disco é isométrico ao semi-plano hiperbólico de Lobatchewsky.

Ainda neste final de século, em que os matemáticos debatiam-se com os problemas dos fundamentos lógicos da matemática e que estavam ligados a ideia de unificação coerente das ciências, surge a obra de David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. Esta obra teve o intuito de resolver e esclarecer muitos problemas lógicos relacionados com os fundamentos de todas geometrias existentes até aquele momento. A base desta obra está em um conjunto de 21 axiomas de incidência, congruência, ordem, paralelas e continuidade da geometria absoluta. Esta obra, ao longo do tempo, foi melhorando com sucessivas edições (HILBERT, 2003).

As geometrias não-euclidiana: a esférica e a hiperbólica

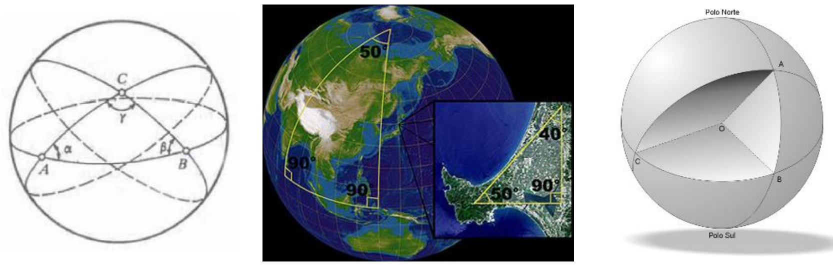
Devido à complexidade relativa de formulação e o insuficiente apelo intuitivo do quinto postulado, durante séculos diversos matemáticos tentaram deduzi-lo, e assim demonstrá-lo como um teorema. O resultado desse esforço que durou cerca de dois mil anos resistiu às tentativas de demonstração.

Vale ressaltar que a Geometria Euclidiana funciona muito bem em superfícies planas, porém, para algumas situações geométricas, como superfícies curvas, tal geometria é insatisfatória.

A partir do século dezenove, trabalhando de modo independente, alguns matemáticos famosos como Gauss, Lobachevski, Bolyai e, um pouco mais tarde, Riemann estabeleceram a independência do quinto postulado, e criaram novas geometrias consistentes, aplicáveis a espaços curvos, conhecidas por não-euclidianas, como a geometria esférica e a hiperbólica.

No caso da geometria esférica aplica-se uma trigonometria esférica, onde, por exemplo, a soma dos ângulos interiores de um triângulo excede os 180 graus. Essa geometria tem importantes aplicações práticas na navegação e na astronomia e pode ser visualizada no R^2, por intermédio da superfície de uma esfera (ou elipsoide) com curvatura positiva, conforme Figura 1.

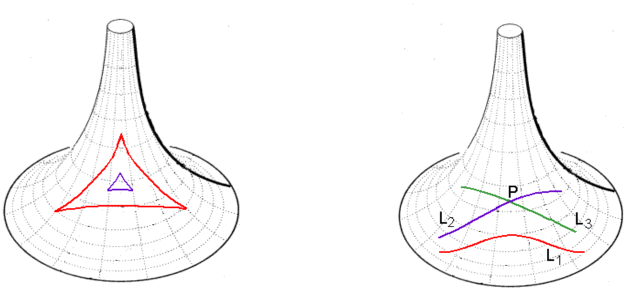
Figura 1: Superfícies esféricas (ou elipsoidais)



Fonte: Google imagens (2017)

A geometria hiperbólica, por sua vez, deve ser representada por uma superfície com curvatura negativa. Apesar do seu nome, as melhores escolhas para isso não envolvem uma hipérbole, conforme a Figura 2.

Figura 2: Superfícies hiperbólicas com curvatura negativa

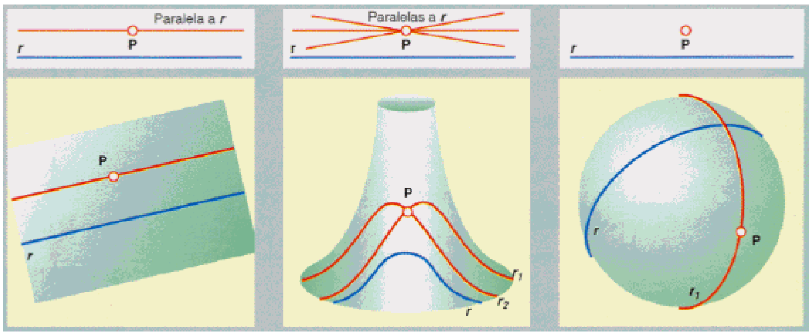


Fonte: Google imagens (2017)

A soma dos ângulos de um triângulo desenhado nesta superfície é menor que 180 graus. Vê-se, também, que quanto maior o triângulo, menor é a soma dos seus ângulos. Isso é exatamente o contrário do que se passa na superfície da esfera. Além disso, por um ponto P pode passar infinitas "retas" paralelas a outra reta.

Na Figura 3 apresenta-se um comparativo visual entre as três geometrias: a plana, a hiperbólica e a esférica.

Figura 3: Comparativo visual entre as geometrias plana, hiperbólica e esférica



Fonte: Google imagens (2017)

No Quadro 1, a seguir, apresenta-se um comparativo resumido em relação ao ponto, às somas dos ângulos interiores de um triângulo e a circunferência de um círculo nos três espaços: euclidiano, esférico e hiperbólico.

Quadro 1: Comparativo entre os três espaços uniformes

Aspectos comparados	Espaço		
	Euclidiano	Esférico	Hiperbólico
Através de um ponto dado	pode-se traçar somente uma paralela a uma linha	não se pode traçar nenhuma paralela	pode-se traçar mais de uma paralela a uma linha
A soma dos ângulos interiores de um triângulo é	igual a dois ângulos retos	é maior do que dois ângulos retos	é menor do que dois ângulos retos
A circunferência de um círculo é	é igual a π vezes o seu diâmetro.	é menor do que π vezes o seu diâmetro.	é maior do que π vezes o seu diâmetro.

Fonte:

As Figuras 1, 2 e 3 e Quadro 1 tem o intuito de destacar algumas diferenças pontuais que surgiram a partir da geometria não-euclidiana.

A partir do momento que o espaço curvo propiciou um alargamento do pensamento de Euclides que tinha predominado por um longo tempo como um realismo das noções básicas, passa-se a pensar no lado racional que encontra a possibilidade do progresso científico. Bachelard trata disto na introdução de seu livro “O novo espírito científico” (BACHELARD, 2000, p. 15) comentando uma frase de Nietzsche (“tudo que é decisivo só nasce apesar de”) infere que: “[...] toda verdade nova nasce apesar da evidência, toda experiência nova nasce apesar da experiência imediata” e no primeiro capítulo deste mesmo livro ele aborda os dilemas da filosofia geométrica.

Bachelard e os dilemas da filosofia geométrica

A questão da Geometria Euclidiana que permaneceu como sendo aparentemente a única verdade durante, aproximadamente, dois milênios, fez com que Gauss a estudasse, para identificar limitações conceituais e encontrar novas possibilidades, mas não publicou nada a respeito. Esse posicionamento de Gauss mostra que havia evidência de alguma falha que nenhum matemático anterior se preocupou em explicar, inclusive o próprio Euclides. Afinal, quando Euclides utilizou o recurso do postulado para enunciar as bases da geometria foi um caminho para facilitar que a compilação dos conhecimentos existentes até a sua época pudesse ser compreendida, sem muitos questionamentos. A própria palavra postulado, que significa “pedir para aceitar” é um possível recurso que ele utilizou.

Euclides ao apresentar os axiomas ou postulados geométricos em seu livro “Os elementos” definiu as bases do conhecimento que utilizou para demonstrar os princípios geométricos. Apesar de enunciar cinco postulados básicos para suas demonstrações, parece que, o quinto postulado, não lhe dava segurança para utilizá-lo, por isso utilizou como maior frequência os quatro primeiros. Esse fato, mostra que, provavelmente, Euclides tinha alguma evidência de uma possível nova verdade ou até mesmo uma falha no quinto postulado, mas que, diante de sua proposta, não era sua preocupação naquele momento.

Alguns historiadores destacam que Gauss por conveniências de seu tempo e para não entrar em conflito com as verdades aceitas pelos matemáticos identificou que havia novas verdades relativas a geometria e que a Euclidiana era limitada a geometria plana, mas fez os seus registros sem compartilhá-lo com a comunidade científica de sua época. Vale ressaltar que antes de Gauss, Sacheri, Lamberti, Taurinus e Tilly já haviam estudado e percebido que o pensamento euclidiano não era o único.

Esses matemáticos começaram a trabalhar o pensamento científico e verificaram a possibilidade de caminhar por rumos opostos, partindo da geometria euclidiana para uma geometria não-euclidiana e com isso estiveram cercado de possibilidades de renovação e assim houve um alargamento do conhecimento e possibilitou sancionar o espírito científico contemporâneo (BACHELARD, 2000).

O posicionamento de Bachelard (2000) para que evite equívoco em relação ao surgimento de novas doutrinas no quadro das antigas é evidente quando diz:

> A geometria não-euclidiana não é feita para contradizer a geometria euclidiana. Ela é antes uma espécie de fator adjunto que permite a totalização, o acabamento do pensamento geométrico, a absorção numa pangeometria. Constituída à orla da geometria euclidiana, a geometria não-euclidiana delineia fora, com uma luminosa precisão, os limites do antigo pensamento. (BACHELARD, 2000, p. 16)

O posicionamento de Bachelard (1996) deixa claro que a ciência pode provocar rupturas, mas um novo pensamento científico não causa, necessariamente, a extinção do anterior.

Para a formação dos conceitos matemáticos de acordo com o conceito de obstáculo epistemológico é necessário distinguir o processo primário de descoberta das ideias com a apresentação formal de um texto. Os obstáculos que surgem na criação desses conceitos, normalmente, não aparecem na sua redação, mas estão presentes nos caminhos trilhados pelos matemáticos durante a criação. Apesar de que no resultado final do texto científico praticamente não aparecem os avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos na etapa da construção das conjecturas, como se houvesse uma aparente regularidade durante todo o processo (BACHELARD, 1996).

Bachelard (1996) mostra que experiências primeiras provocam os primeiros obstáculos, principalmente quando estas são realizadas ainda sem maiores reflexões e sem qualquer crítica. O espírito científico pode encontrar resistência contra o impulso precipitado das impressões primeiras.

Quando se trata de conhecimento científico produzido pela observação, a polêmica é inevitável, podendo confirmar ou infirmar uma tese anterior. Bachelard (2000, p. 19) diz que: [...] desde que se passe da observação à experimentação, o caráter polêmico do conhecimento torna-se mais claro ainda.

No início do capítulo I, "os dilemas da filosofia geométrica", do seu livro, "O novo espírito científico", Bachelard (2000) destaca que devem ser examinados dois problemas que a divisão e o alargamento do pensamento geométrico provoca: o primeiro está relacionado com a abertura do racionalismo provocado pelo nascimento da geometria não-euclidiana, pois a euclidiana era uma razão fechada em axiomas imutáveis e o segundo refere-se às condições da síntese entre as geometrias diferentes, levando aos temas correspondentes entre elas e aos caracteres da ideia de grupo.

No fim do século XVIII haviam evidencias das possibilidades de expandir o conhecimento geométrico. O matemático d'Alembert considerava que deveria ser demonstrado o teorema das paralelas da geometria euclidiana. Para os geômetras do final deste XVIII e início do século seguinte o teorema das paralelas ou quinto postulado era reconhecido como uma verdade, pois elas existem pela experiência usual. A partir do momento que se abre o caminho para o alargamento dos conhecimentos geométricos, tanto Sacheri e Lambert como Taurinus e Tilly, perguntavam-se o que aconteceria com o abandono ou modificação da noção de paralela, mas, principalmente Lambert e Taurinus buscaram em seus estudos compreender melhor as noções que convenientemente não foram alteradas por dois milênios (BACHELARD, 2000).

Bachelard diz:

> [...] de uma maneira paradoxal que o ponto de partida do não-eucledismo reside na depuração de uma noção pura, na simplificação de uma noção simples. Com efeito, aprofundando a observação de Taurinus, chegamos a nos perguntar se a reta com paralela não corresponde a uma reta espacial, a uma reta demasiado rica, numa palavra, a uma noção já composta, pois que, do ponto de vista funcional, o grande círculo, análogo sobe a esfera à reta sobre o plano, não tolera o paralelismo (BACHELARD, 2000, p. 28).

O fato que Taurinus destaca em relação a não veracidade do quinto postulado de Euclides sob superfícies curvas envolve propriedades que podem ser análogas entre certas linhas curvas e as retas sobre o plano. Quarenta anos mais tarde isso ocorreu com a descoberta da pseudoesfera por Beltrami (BACHELARD, 2000).

Outro fato que Bachelard destaca:

> não seria preciso, aliás, apressar-se em fazer passar o realismo matemático da linha para a superfície e imaginar que é a pertinência de uma linha a uma superfície apenas que dá realidade à linha. O problema do realismo matemático é mais oculto, mais indireto, mais longínquo, mas abstrato (BACHELARD, 2000, p. 28).

Para Bachelard a essência da noção matemática deve ser medida pela possiblidade de deformação permitida pela aplicação dessa noção. E ainda, que a medida do realismo matemático sobre a extensão das noções antecipa a compreensão, ou seja, há mais realidade na linha geodésica do que na linha reta. E assim, "no momento em que a noção se apresenta como totalidade, desempenha o papel de uma realidade” (BACHELARD, 2000, p. 33).

Segundo Bachelard (2000, p. 31): “[...] a pangeometria elimina as suposições arbitrárias, ou antes, ela as neutraliza pelo único fato de que ela tenta dar um quadro sistemático de todas as suposições”. Com isso a geometria euclidiana passaria a ser um caso particular de um conjunto e “o realismo passaria de uma ao conjunto”.

É preciso procurar nas geometrias contrárias o que elas têm em comum. E assim, estudar que correspondências foram estabelecidas entre estas geometrias, com isso o pensamento matemática ganha uma realidade. A forma matemática é conhecida por suas transformações. E Bachelard usa uma paráfrase para destacar a importância das transformações: “diga-me como te transformas, que te direi quem és” (BACHELARD, 2000, p. 31).

Assim que uma correspondência é fixada, uma contradição tanto no sistema de Lobatchewsky como no sistema de Euclides não será causa de temor. Para Bachelard a forma algébrica é a chave da evidência e ela “reúne todas as relações e nada mais do que as relações. Enquanto relações é que as diversas geometrias são equivalentes” (BACHELARD, 2000, p. 31).

Vale destacar que são as relações que fazem com que as geometrias tenham uma realidade e não a referência aos objetos, às experiências, às imagens da intuição.

Considerações finais

A geometria de Euclides teve a preocupação de sintetizar os conhecimentos geométricos acumulado até aquele momento da história.

As razões que levaram os matemáticos a utilizarem por mais de dois milênios sem questionamentos pode ser tanto uma comodidade como falta de percepção de possibilidade de progresso destes conceitos.

Os primeiros matemáticos que tiveram a ousadia de refletirem a partir conceitos existentes surgiram no final do século XVIII e no início do século XIX: Sacheri, Lamberti, Taurinus e Tilly. Depois, Gauss, o príncipe dos matemáticos, aos quinze anos, foi quem fez ponderações em relação às limitações e às falhas do quinto postulado de Euclides, mas para não entrar em conflito com os matemáticos de seu tempo não publicou. Ele criou uma situação desconfortante quanto recebeu os estudos de Bolyai e se posicionou como se já soubesse de tudo o que Bolyai havia descoberto e publicado.

Além dos matemáticos citados anteriormente encontram-se Lobachevsky e Riemann que, também, estudaram as novas perspectivas para a geometria e que transcendem a geometria euclidiana, com isso criaram as geometrias não-euclidianas: a esférica (ou elíptica) e a hiperbólica, onde saem do plano para o espaço curvo. Vale ressaltar que as geometrias não-euclidianas não negam a validade da geometria euclidiana, apenas abriram espaço para novas formas de conceber uma estrutura lógica, criando axiomas e teoremas incompatíveis com os anteriores, não havendo como falar em contradições, pois cada qual constitui um sistema axiomático independente.

Além disso, em todas as ponderações apresentadas de pensamentos diretos ou interpretações da Filosofia da Ciência que Bachelard defende está relacionada com o desenvolvimento do conhecimento científico sem a origem de verdades absolutas. É preciso buscar as possibilidades de transformações dentro de uma área de conhecimento sem, necessariamente, descaracterizá-la. A compreensão da geometria euclidiana e suas possíveis restrições levaram diversos geômetras a construírem novas relações abrindo caminho para a criação de novas geometrias: as não-euclidiana (hiperbólica e a esférica), a projetiva, a analítica e a diferencial.

Referências

BACHELARD, G.: **A formação do espírito científico**. São Paulo: Contraponto, 1996.

_____ . G. **O novo espírito científico**. 3. ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2000, p. 9-39.

BOYER. Carl Benjamim; MERZBACH. Uta C. **História da Matemática.** Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

CARMO. Manfredo Perdigão do. Geometrias não-Euclidianas. **Revista Matemática Universitária.** Rio de Janeiro. n. 6. Dez. 1987, p. 25-48.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.

GARBI, Gilberto G. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilho mundo da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

GOOGLE imagens. **Comparativo das três geometrias:** plana, esférica e hiperbólica. Disponível em: https://www.google.com.br/search?q=Comparativo+visual+entre+as+geometrias+plana,+hiperb%C3%B3lica+e+esf%C3%A9rica&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0a

hUKEwjPwYDirszUAhUDFpAKHeD6AGsQ_AUICigB&biw=829&bih=874. Acesso em: 10 jan. 2017.

GOOGLE imagens. **Geometria esférica.** Disponível em: https://www.google.com.br/search?q=geometria+esferica&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjpluj1rMzUAhVGfpAKHdtmD94Q_AUICigB&biw=829&bih=874. Acesso em: 10 jan. 2017.

GOOGLE imagens. **Geometria hiperbólica**. Disponível em: https://www.google.com.br/search?q=geometria+hiperb%C3%B3lica&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwikj4GurczUAhXBD5AKHU3nCboQ_AUICigB&biw=829&bih=874. Acesso em: 10 jan. 2017.

HILBERT. David. **Fundamentos da Geometria.** Lisboa: Gradiva, 2003**.**

OBSERVATÓRIO NACIONAL (ON), **A Geometria dos espaços curvos ou Geometria não-Euclidiana**. Disponível em: http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf. Acesso em: 27 jan. 2014.