目白大学　経営学研究
第12号　2014年　57−72

論文

平均と分散の双方に順序制約がある場合の２つの正規母集団の平均の推定とその応用―確率優越性の評価基準で

Estimation of Two Ordered Normal Means with Ordered Variances under Stochastic Criterion and its Applications

張　元宗　　篠崎　信雄
（Yuan-Tsung CHANG　Nobuo SHINOZAKI）

【要　約】

確率優越性または平均２乗誤差の評価基準で、２つの正規母集団の平均と分散双方に順序制約条件がある場合の母平均の推定を考える。分散の大きい母集団の母平均の推定において、従来利用されている推定量を改良することができた。しかし、分散の小さい母集団の母平均の推定において、従来利用されている推定量を平均２乗誤差ですら改良することができなかった。両母集団の母平均の同時推定も試みた。最後に、提案された推定量の挙動を明らかにするために、数値計算を行った。

キーワード：制約条件に満たした最尤推定量，不偏推定量，Graybill-Deal 推定量，確率優越性.

【Abstract】

We consider the problem of estimating the ordered means of two normal distributions with unknown ordered variances. We discuss the estimation of two ordered means, individually, in terms of stochastic domination and MSE (mean squared error). We show that in estimating the mean with larger variance, the usual estimator under order restriction on means can be improved upon. However, in estimating the mean with smaller variance, the usual estimator can't be improved upon even under MSE. We also discuss simultaneous estimation problem of two ordered means when unknown variances are ordered. Finally, we report the numerical anlysis results to illustrate the behaviors of suggested estimators.

Keyword：restricted MLE, unbiased estimator, Graybill-Deal estimator, stochastic dominance.

ちょうげんそう：目白大学社会部社会情報学科教授
しのざきのぶお：慶應義塾大学名誉教授

1 はじめに

制約された母数空間における推定問題が数多く考えられるが、母平均に関する代表的な線形制約条件は次のようなものが挙げられる。(1) 非負性 (2) 順序制約 (simple order) (3) ツリーオーダー (simple tree order) (4) 傘型順序制約である。例えば、順序制約は、年齢とともに平均値が大きくなると考えられる量（児童の身長など)、薬品の投与量とともに平均的に大きくなると考えられる反応量などの場合に考えられている。このような場合の統計的推測について、古くから様々の研究が進められてきているが、1988 年以前の研究については、Barlow et al.(1972) や Robertson et al. (1988) で詳しく解説されている。その後の発展、特に、点推定及び区間推定については、Silvapulle & Sen(2005) や van Eeden(2006) のモノグラフィによって解説されている。また、国内では張 (Chang) と篠崎 (Shinozaki) は制約条件を考慮する最尤推定量（RMLE）による改良問題について研究を推進し、Kubokawa, Tsukuma, Marchand, Perron, Strawderman らは一般ベイズ推定量の許容性およびミニマックス性などについて精力的に研究を進めている。

多くの研究者は母数に順序制約条件 (simple order) がある場合、または母数にツリーオーダー (simple tree order) がある場合の母数の推定を考えている。特に、正規分布において、不偏推定量を改良するような推定量を提案している。

ここでは、母平均と分散の双方に順序制約条件がある場合の 2 つの正規母集団における平均の推定問題を、確率優越性 (stochastic domination) あるいは平均 2 乗誤差 (MSE) を評価基準として考える。$X_{ij}, i=1,2, j=1,\dots,n_i$ は平均 μ_i、分散 σ_i^2 の正規分布からの独立な観測値とする。ここで、μ_i と σ_i^2 は共に未知で、

$$\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}/n_i, \quad s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2/(n_i-1)$$

は μ_i と σ_i^2 の不偏推定量である。

まず、共通母平均 $\mu_1=\mu_2=\mu$ の推定に関する基本的な結果を述べる。両分散が未知で、順序制約がない場合、Graybill & Deal(1959) が提案した 2 つの正規分布の共通母平均の不偏推定量

$$\hat{\mu}^{GD} = \frac{n_1 s_2^2}{n_1 s_2^2 + n_2 s_1^2}\bar{X}_1 + \frac{n_2 s_1^2}{n_1 s_2^2 + n_2 s_1^2}\bar{X}_2$$

が $\bar{X}_i, i=1,2$ より小さい MSE をもつための、n_1, n_2 に対する必要十分条件を与えた。一方、分散に順序制約がある場合、Nair(1982) が

$$\hat{\mu}^{Nair} = \begin{cases} \hat{\mu}^{GD}, & if\ s_1^2 \le s_2^2, \\ \frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{X}_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2}\bar{X}_2, & if\ s_1^2 > s_2^2, \end{cases}$$

を提案し、$\hat{\mu}^{GD}$ より、小さい MSE をもつことを証明した。

Elfessi & Pal(1992) は MSE より強い評価基準である確率優越性の下で、分散に順序制約がある場合に、$n_1 = n_2$ のとき、

$$\hat{\mu}^{EP} = \begin{cases} \hat{\mu}^{GD}, & if\ s_1^2 \le s_2^2, \\ \frac{s_1^2}{s_1^2+s_2^2}\bar{X}_1 + \frac{s_2^2}{s_1^2+s_2^2}\bar{X}_2, & if\ s_1^2 > s_2^2, \end{cases}$$

を提案して、すべての μ 対して

$$P\{|\hat{\mu}^{EP}-\mu| \le d\} \ge P\{|\hat{\mu}^{GD}-\mu| \le d\},\ \forall\, d>0$$

を証明した。Misra & van der Meulen (1997) は $k(\ge 2)$ 個の母集団の場合について、分散に順序制約条件がある場合、共通母平均の推定量を提案し、確率優越性及び Pitman nearness 評価基準の下で、$\hat{\mu}^{GD}$ を改良した。

一般の場合に対して、k 個の平均に順序制約条件 $\mu_1 \le \cdots \le \mu_k$ が与えられたとき、σ_i^2 が既知の場合、μ_i の制約条件に満たす最尤推定量 (RMLE) は次のように与えられる。

$$\hat{\mu}_i^{RMLE} = \min_{t\ge i}\max_{s\le i}\left[\sum_{j=s}^{t}\sigma_j^{-2}n_j\right]^{-1}\left[\sum_{j=s}^{t}\sigma_j^{-2}n_j\bar{X}_j\right],\quad i=1,\ldots,k.$$

Lee (1981) は MSE の評価基準の下で、$\hat{\mu}_i^{RMLE}$ は $\bar{X}_i$ を一様に改良することを証明した。つまり、すべての μ_i に対して、

$$E\{(\hat{\mu}_i^{RMLE}-\mu_i)^2\} \le E\{(\bar{X}_i-\mu_i)^2\}$$

が成立する。Kelly (1989)、Hwang & Peddada (1994) らは確率優越性の評価基準の下で、$\hat{\mu}_i^{RMLE}$ は $\bar{X}_i$ より優れていることを証明した。

分散が未知で、2 つの母平均に順序制約条件がある場合、$\sigma_i^2, i=1,2$ の推定量を σ_i^2 の MLE $\tilde{s}_i^2=\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2/n_i$ にしたとき、Garren (2000) は次のようなプラグインタイプ推定量を提案した。

$$\hat{\mu}_1^{Ga} = \min\left\{\bar{X}_1,\ \frac{\sum_{i=1}^{2}(n_i/\tilde{s}_i^2)\bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{2}(n_i/\tilde{s}_i^2)}\right\} \text{ and } \hat{\mu}_2^{Ga} = \max\left\{\bar{X}_2,\ \frac{\sum_{i=1}^{2}(n_i/\tilde{s}_i^2)\bar{X}_i}{\sum_{i=1}^{2}(n_i/\tilde{s}_i^2)}\right\}.$$

彼は、$\mu_1=\mu_2$ かつ σ_2^2/σ_1^2 が十分大きいとき、$\hat{\mu}_1^{Ga}$ が $\bar{X}_1$ より大きい（または小さい）MSE をもつための、n_1 と n_2 に対する十分条件を与えた。Oono & Shinozaki(2005) が μ_i の打ち切り型推定量

$$\hat{\mu}_1^{OS}=\min\{\bar{X}_1,\hat{\mu}^{GD}\},\quad \hat{\mu}_2^{OS}=\max\{\bar{X}_2,\hat{\mu}^{GD}\} \tag{1.1}$$

を提案し、$\hat{\mu}_i^{OS}$ が制約条件を無視した μ_i の最尤推定量 $\bar{X}_i$ を MSE で改良するための必要十分条件を与えた。しかし、分散にも順序制約条件 $\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ がある場合、$s_1^2>s_2^2$ のとき、$n_1s_2^2/(n_1s_2^2+n_2s_1^2)<n_1/(n_1+n_2)$ となり不自然である。そこで、次のような推定量

$$\hat{\mu}_1^{CS} = \begin{cases} \hat{\mu}_1^{OS}, & if\ s_1^2\le s_2^2\\ \min\{\bar{X}_1, \frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{X}_1+\frac{n_2}{n_1+n_2}\bar{X}_2\}, & if\ s_1^2>s_2^2, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\hat{\mu}_2^{CS} = \begin{cases} \hat{\mu}_2^{OS}, & if\ s_1^2\le s_2^2\\ \max\{\bar{X}_2, \frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{X}_1+\frac{n_2}{n_1+n_2}\bar{X}_2\}, & if\ s_1^2>s_2^2 \end{cases} \tag{1.3}$$

を考え、$\hat{\mu}_i^{CS}$ と $\hat{\mu}_i^{OS}$ との比較を行う。

この論文では、2 つの母平均と分散の双方に順序制約条件があるとき、第 2 節で各母平均の推定を論じ、第 3 節で 2 つの母平均の同時推定を論じる。第 4 節で提案された推定量の挙動を明らかにするため、数値計算の結果について報告する。

注：k 個正規母集団に対して、母平均と分散双方に順序制約条件が与えられたとき、μ_i,σ_i^2 の MLE の存在性と一意性は Shi(1994) によって議論され、MLE を計算するためのアルゴリズムが与えられた。$k=2$ の場合、Ma & Shi(2002) は μ_i,σ_i^2 の MLE を計算するための反復アルゴリズムを提案し、標本サイズが同じで大きい分散に対応する母平均の推定量について、反復アルゴリズムで計算された制約条件を満たす MLE は制約条件を満たさない平均値を一様に改良することを証明した。

2 双方に順序制約条件があるときの各母平均の推定

この節では、母平均と分散の双方に順序制約条件、$\mu_1\le\mu_2, \sigma_1^2\le\sigma_2^2$ が与えられている場合、$\mu_i, i=1,2$ の推定を論じる。2.1 節では大きい分散に対応する母平均 μ_2、の推定を論じ、確率優越性の評価基準の下で、$\hat{\mu}_2^{CS}$ は $\hat{\mu}_2^{OS}$ より、確率的に優れている事を証明する。2.2 節では小さい分散に対応する母平均 μ_1、の推定を論じ、平均 2 乗誤差の下ですら $\hat{\mu}_1^{CS}$ は $\hat{\mu}_1^{OS}$ を改良することができない事を証明する。

2.1 大きい分散に対応する母平均 μ_2 の推定

この小節で、大きい分散に対応する母平均の推定を考え、$\hat{\mu}_2^{CS}$ は $\hat{\mu}_2^{OS}$ より確率的に優れていることを次の定理で証明する。

定理 2.1 $\hat{\mu}_2^{CS}$ は $\hat{\mu}_2^{OS}$ より確率的に優れている。つまり、すべての $\mu_1 \le \mu_2$, $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ に対して、

$$P\Big\{|\, \hat{\mu}_2^{CS} - \mu_2 \,| \le d\Big\} \ge P\Big\{|\, \hat{\mu}_2^{OS} - \mu_2 \,| \le d\Big\}, \quad \forall\, d > 0$$

が成り立つ。

証明

まず、$P\{|\hat{\mu}_2^{CS} - \mu_2| \le d|\bar{X}_1 > \bar{X}_2\}$ は下記のように表現できる。

$$P\Big\{|\hat{\mu}_2^{CS} - \mu_2| \le d|\bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 \le s_2^2\Big\}P\{s_1^2 \le s_2^2\}$$
$$+P\Big\{|\hat{\mu}_2^{CS} - \mu_2| \le d|\bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\Big\}P\{s_1^2 > s_2^2\}.$$

一方、(1.1), (1.3) 式より、$\bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2$ の範囲のみで、両推定量が異なるため、$\hat{\mu}_2^{CS}$ は $\hat{\mu}_2^{OS}$ より、確率的に優れていることを示すためには、

$$P\Big\{|\hat{\mu}_2^{CS} - \mu_2| \le d|\bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\Big\} \ge P\Big\{|\hat{\mu}_2^{OS} - \mu_2| \le d|\bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\Big\} \tag{2.1}$$

を証明すればよい。

$c = n_1/(n_1 + n_2)$ とする。(2.1) の左辺は

$$P\Big\{|c(\bar{X}_1 - \mu_2) + (1 - c)(\bar{X}_2 - \mu_2)| \le d|\bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\Big\}. \tag{2.2}$$

になる。次に、変数変換

$$W_i = \bar{X}_i - \mu_2, \quad i = 1, 2.$$

を行うと、$W_1 \sim N(-\Delta, \tau_1^2)$, $W_2 \sim N(0, \tau_2^2)$ に従い、W_1 と W_2 は互いに独立になる。ここで、$\Delta = \mu_2 - \mu_1$ であり、$\tau_i^2 = \sigma_i^2/n_i$, i=1,2 である。

よって、(2.2) は

$$P\{-d \le cW_1 + (1 - c)W_2 \le d|W_1 > W_2, s_1^2 > s_2^2\}. \tag{2.3}$$

になる。さらに、次のような変数変換

$$V_1 = W_1 - W_2, \quad V_2 = (\tau_2^2/\tau_1^2)W_1 + W_2.$$

を行うと、V_1 と V_2 は互いに独立で、下記のような分布に従う。

$$V_1 \sim N(-\Delta, \tau_1^2 + \tau_2^2), \quad V_2 \sim N(-(\tau_2^2/\tau_1^2)\Delta, \tau_2^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)/\tau_1^2).$$

$$W_1 = \frac{\tau_1^2(V_1 + V_2)}{\tau_1^2 + \tau_2^2}, \quad W_2 = \frac{\tau_1^2 V_2 - \tau_2^2 V_1}{\tau_1^2 + \tau_2^2},$$

であるから、便宜上、$s_1^2 > s_2^2$ を固定すると (2.3) 式は

$$\begin{aligned} & P\Big\{-d \le cW_1 + (1-c)W_2 \le d | W_1 > W_2\Big\} \\ = \ & P\Big\{-d \le \frac{(c\tau_1^2 - (1-c)\tau_2^2)V_1 + \tau_1^2 V_2}{\tau_1^2 + \tau_2^2} \le d | V_1 > 0\Big\} \\ = \ & P\Big\{(c\tau_1^2 - (1-c)\tau_2^2)V_1 + \tau_1^2 V_2 \ge -d(\tau_1^2 + \tau_2^2) | V_1 > 0\Big\} \\ & -P\Big\{(c\tau_1^2 - (1-c)\tau_2^2)V_1 + \tau_1^2 V_2 \ge d(\tau_1^2 + \tau_2^2) | V_1 > 0\Big\}. \\ = \ & E\{g(c, V_1) | V_1 > 0\}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

になる、ここで、

$$\begin{aligned} g(c, v_1) \ = \ & \Phi\Big(\frac{((1-c)\tau_2^2 - c\tau_1^2)v_1 + \tau_2^2\Delta + d(\tau_1^2 + \tau_2^2)}{\tau_1\tau_2\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}}\Big) \\ & -\Phi\Big(\frac{((1-c)\tau_2^2 - c\tau_1^2)v_1 + \tau_2^2\Delta - d(\tau_1^2 + \tau_2^2)}{\tau_1\tau_2\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}}\Big) \end{aligned}$$

である。同様に、(2.1) の右辺は、次のように計算される。

$$\begin{aligned} & P\Big\{|\hat{\mu}_2^{OS} - \mu_2| \le d | \bar{X}_1 > \bar{X}_2\Big\} \\ = \ & P\Big\{(\gamma_0\tau_1^2 - (1-\gamma_0)\tau_2^2)V_1 + \tau_1^2 V_2 \ge -d(\tau_1^2 + \tau_2^2) | V_1 > 0\Big\} \\ & -P\Big\{(\gamma_0\tau_1^2 - (1-\gamma_0)\tau_2^2)V_1 + \tau_1^2 V_2 \ge d(\tau_1^2 + \tau_2^2) | V_1 > 0\Big\}. \\ = \ & E\{g(\gamma_0, V_1) | V_1 > 0\}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで、$\gamma_0 = n_1 s_2^2/(n_1 s_2^2 + n_2 s_1^2)$ である。

$v_1 > 0$ を固定した上で、$g(u, v_1)$ は $0 \le u \le 1$ の非減少関数であることは簡単に証明できる。また、$s_1^2 > s_2^2$ に対して、$c > \gamma_0$ が成立するので、

$$P\Big\{|\hat{\mu}_2 - \mu_2| \le d | \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\Big\} \ge P\Big\{|\hat{\mu}_2^{OS} - \mu_2| \le d | \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\Big\},$$

が成立する。したがって証明が完成した。

注: 図 1 は (2.4) 式、(2.5) 式の幾何的な意味を表す。

系 2.2 MSE を基準にしたとき、$\hat{\mu}_2^{CS}$ は $\hat{\mu}_2^{OS}$ より優れている。

2.2 小さい分散に対応する母平均 μ_1 の推定

この小節で、小さい分散に対応する母平均の推定を考え、$\hat{\mu}_1^{CS}$ は $\hat{\mu}_1^{OS}$ を改良できないことを証明する。証明するに当たって、次の予備定理が必要である。

予備定理 2.3 $\Delta > 0$ とし、$Y \sim N(-\Delta, \sigma^2)$ に従うとすると、

$$\lim_{\Delta \to +\infty} \frac{E(Y^2 I_{Y \ge 0})}{E(Y I_{Y \ge 0})} = 0.$$

が成立する。

証明については付録を参照されたい。

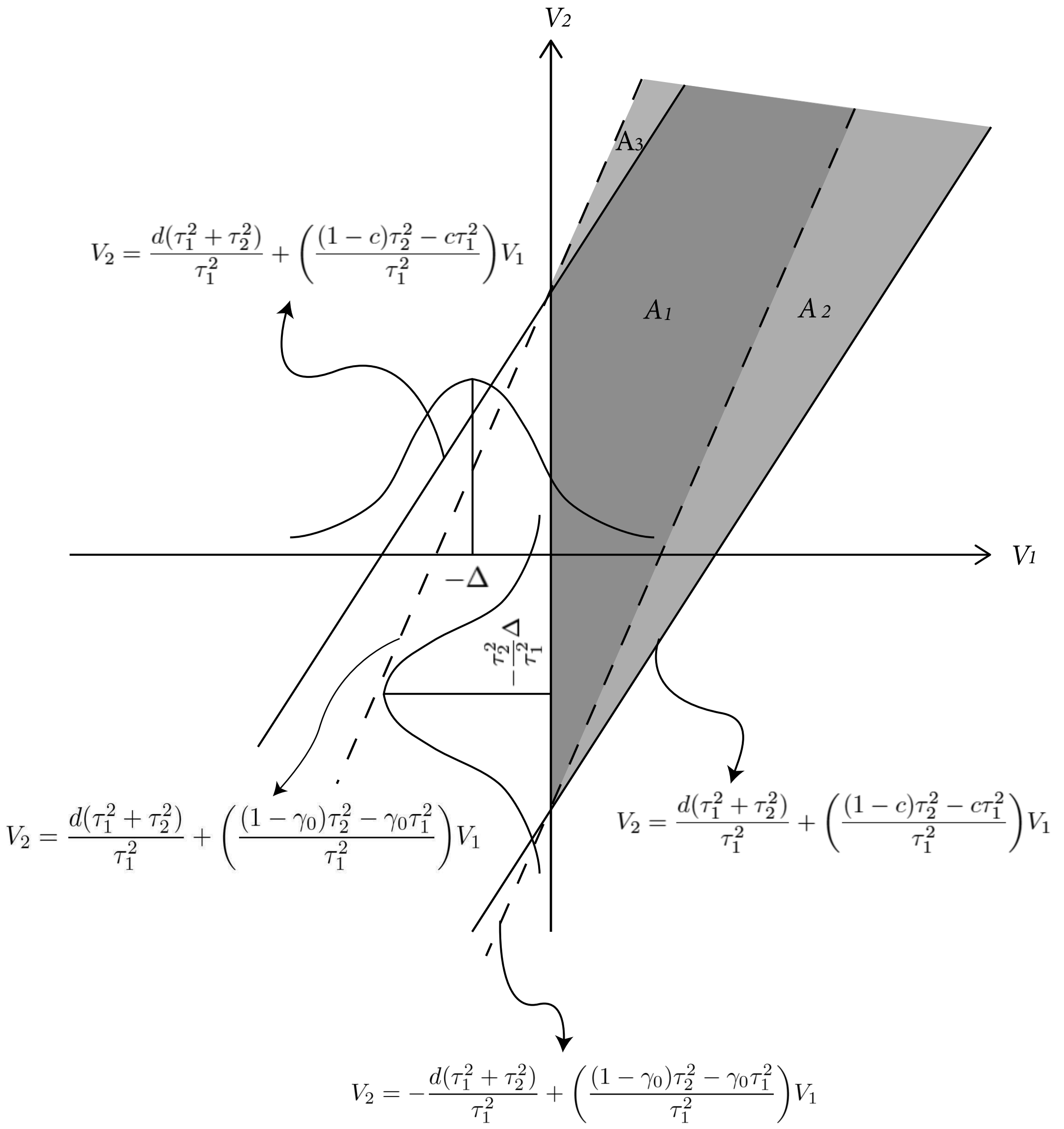

図 1: (2.4) 式は $A_1 \cup A_2$ の確率を表し、(2.5) 式は $A_1 \cup A_3$ の確率を表す。

定理 2.4 $\Delta = \mu_2 - \mu_1$ が十分大きいとき、$\hat{\mu}_1^{CS}$ は $\hat{\mu}_1^{OS}$ よりも大きな MSE をもつ。

証明

$\gamma_0 = n_1 s_2^2/(n_1 s_2^2 + n_2 s_1^2)$ とし、$c = n_1/(n_1+n_2)$ とすると、$\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ and $s_1^2 > s_2^2$ が与えられているとき、2 つの推定量の 2 乗損失の差の条件付き期待値は次のように評価される。

$$\begin{aligned}
& E\{[(\gamma_0\bar{X}_1 + (1-\gamma_0)\bar{X}_2 - \mu_1)^2 - (c\bar{X}_1 + (1-c)\bar{X}_2 - \mu_1)^2] | \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\} \\
= \; & E\{[(\gamma_0(\bar{X}_1 - \mu_1) + (1-\gamma_0)(\bar{X}_2 - \mu_1))^2 \\
& \quad -(c(\bar{X}_1 - \mu_1) + (1-c)(\bar{X}_2 - \mu_1))^2] | \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\} \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

ここで、変数変換

$$Z_i = \bar{X}_i - \mu_1, \quad i = 1, 2.$$

を行うと $Z_1 \sim N(0, \tau_1^2)$, $Z_2 \sim N(\Delta, \tau_2^2)$ に従い、かつ、Z_1 と Z_2 は互いに独立になる。ここで、$\Delta = \mu_2 - \mu_1 \geq 0$ である。よって、(2.6) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} E\Bigg\{ \Bigg[&(\gamma_0^2 - c^2)Z_1^2 + 2(\gamma_0(1-\gamma_0) - c(1-c))Z_1 Z_2 \\ &+((1-\gamma_0)^2 - (1-c)^2)Z_2^2 \Bigg] \Bigg| Z_1 > Z_2, s_1^2 > s_2^2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

さらに、変数変換、

$$Y_1 = Z_1 - Z_2,\ Y_2 = Z_1 + (\tau_1^2/\tau_2^2)Z_2$$

を行うと Y_1 と Y_2 は互いに独立で、次のような分布に従う

$$Y_1 \sim N(-\Delta, \tau_1^2 + \tau_2^2),\ Y_2 \sim N((\tau_1^2/\tau_2^2)\Delta, \tau_1^2(\tau_1^2 + \tau_2^2)/\tau_2^2).$$

いま、

$$Z_1 = \frac{\tau_1^2 Y_1 + \tau_2^2 Y_2}{\tau_1^2 + \tau_2^2},\ Z_2 = \frac{\tau_2^2(Y_2 - Y_1)}{\tau_1^2 + \tau_2^2}$$

であるので、(2.7) $\times \frac{1}{(\tau_1^2+\tau_2^2)^2}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} E\Bigg\{ \Bigg[&\Big((\gamma_0\tau_1^2 - (1-\gamma_0)\tau_2^2)^2 - (c\tau_1^2 - (1-c)\tau_2^2)^2 \Big) Y_1^2 \\ &+2\tau_2^2 \Big(({\gamma_0}^2 - c^2)\tau_1^2 + (\gamma_0(1-\gamma_0) - c(1-c))(\tau_1^2 - \tau_2^2) \\ &-((1-\gamma_0)^2 - (1-c)^2)\tau_2^2 \Big) Y_1 Y_2 \Bigg] \Bigg| Y_1 > 0, s_1^2 > s_2^2 \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Y_1 と Y_2 は互いに独立で、$E(Y_2) = (\tau_1^2/\tau_2^2)\Delta$ であるから、(2.8) は

$$\begin{aligned} E\Bigg\{ \Bigg[&\Big((\gamma_0\tau_1^2 - (1-\gamma_0)\tau_2^2)^2 - (c\tau_1^2 - (1-c)\tau_2^2)^2 \Big) Y_1^2 \\ &+2\Delta \Big(({\gamma_0}^2 - c^2)\tau_1^2 + (\gamma_0(1-\gamma_0) - c(1-c))(\tau_1^2 - \tau_2^2) \\ &-((1-\gamma_0)^2 - (1-c)^2)\tau_2^2 \Big) \tau_1^2 Y_1 \Bigg] \Bigg| Y_1 > 0, s_1^2 > s_2^2 \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

になる。

Y_1^2 の係数は

$$\begin{aligned} &(\gamma_0\tau_1^2 - (1-\gamma_0)\tau_2^2)^2 - (c\tau_1^2 - (1-c)\tau_2^2)^2 \\ = &\Big[(\gamma_0 + c)\tau_1^2 - ((1-\gamma_0) + (1-c))\tau_2^2 \Big] (\gamma_0 - c)(\tau_1^2 + \tau_2^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma_0 + c)\tau_1^2 - ((1-\gamma_0) + (1-c))\tau_2^2 &= \left(\frac{n_1 s_2^2}{n_1 s_2^2 + n_2 s_1^2} + \frac{n_1}{n_1 + n_2} \right) \frac{\sigma_1^2}{n_1} \\ &\quad - \left(\frac{n_2 s_1^2}{n_1 s_2^2 + n_2 s_1^2} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \right) \frac{\sigma_2^2}{n_2} \\ &\geq -\left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1 + n_2} \right) \sigma_2^2 \end{aligned}$$

になる。

Y_1 の係数は、$c > \gamma_0$ により

$$
\begin{aligned}
& ({\gamma_0}^2 - c^2)\tau_1^2 + (\gamma_0(1-\gamma_0) - c(1-c))(\tau_1^2 - \tau_2^2) - ((1-\gamma_0)^2 - (1-c)^2)\tau_2^2 \\
= \ & (\gamma_0 - c)\tau_1^2 - (c - \gamma_0)\tau_2^2 = (\gamma_0 - c)(\tau_1^2 + \tau_2^2) < 0
\end{aligned}
$$

になる。よって、予備定理 2.3 と (2.9) により、$\Delta \to \infty$ とき、 (2.6) ≤ 0 になる。よって、証明できた。

3 双方に順序制約条件があるときの (μ_1, μ_2) の同時推定

この節では、2 つの母平均と分散の双方に順序制約条件、$\mu_1 \leq \mu_2, \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$、がある場合、標準化された 2 乗誤差の和を用いた確率優越性の下で、(μ_1, μ_2) の同時推定を考える。

定理 3.1 $(\hat{\mu}_1^{CS}, \hat{\mu}_2^{CS})$ は $(\hat{\mu}_1^{OS}, \hat{\mu}_2^{OS})$ より次の意味で優れている、つまり、すべての $\mu_1 \leq \mu_2, \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ に対して、

$$
P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{CS} - \mu_i}{\tau_i}\right)^2 \leq d\right\} \geq P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{OS} - \mu_i}{\tau_i}\right)^2 \leq d\right\}, \quad \forall\, d > 0.
$$

ここで、$\tau_i^2 = \sigma_i^2/n_i$ である。

証明

$\bar{X}_2 \geq \bar{X}_1$ または $s_1^2 \leq s_2^2$ の場合、$\hat{\mu}_i^{CS} = \hat{\mu}_i^{OS}$ なので、$\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ かつ $s_1^2 > s_2^2$ の場合について、2 つの推定量を比較すればよい。よって、次のことを証明すればよい。

$$
\begin{aligned}
& P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{CS} - \mu_i}{\tau_i}\right)^2 \leq d \,\middle|\, \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\right\} \\
\geq \ & P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{OS} - \mu_i}{\tau_i}\right)^2 \leq d \,\middle|\, \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\right\}. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

$c = n_1/(n_1 + n_2)$ と置くと

$$
\begin{aligned}
& P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{CS} - \mu_i}{\tau_i}\right)^2 \leq d \,\middle|\, \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\right\} \\
= \ & P\left\{\left(\frac{c(\bar{X}_1 - \mu_1) + (1-c)(\bar{X}_2 - \mu_1)}{\tau_1}\right)^2\right. \\
& \left. + \left(\frac{c(\bar{X}_1 - \mu_2) + (1-c)(\bar{X}_2 - \mu_2)}{\tau_2}\right)^2 \leq d \,\middle|\, \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\right\}. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

ここで、次のように変換を行う。

$$
Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_1}{\tau_1}, \quad i = 1, 2.
$$

このとき、Z_1 と Z_2 は互いに独立で、それぞれ $N(0,1)$ と $N(\Delta/\tau_1, \tau_2^2/\tau_1^2)$ に従う、ここで、$\Delta = \mu_2 - \mu_1 \geq 0$ である。

(3.2) は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
& P\left\{(cZ_1+(1-c)Z_2)^2+\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}(cZ_1+(1-c)Z_2)-\frac{\Delta}{\tau_2}\right)^2 \le d \,\middle|\, Z_1>Z_2, s_1^2>s_2^2\right\} \\
= \;& P\left\{\left(cZ_1+(1-c)Z_2-\frac{\tau_1\Delta}{\tau_1^2+\tau_2^2}\right)^2\right. \\
& \left.\le \left(\frac{\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}}{\tau_1^2+\tau_2^2}\right)^2 \,\middle|\, Z_1>Z_2, s_1^2>s_2^2\right\}. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

(3.3) で、$(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2\le 0$ ならば、(3.1) の両辺は 0 になるので、望んだ結果が得られる。よって、以下では、$(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2>0$ を仮定する。

さらに、変数変換を次のように行う。

$$
Y_1=Z_1-Z_2, \quad Y_2=Z_1+(\tau_1^2/\tau_2^2)Z_2.
$$

このとき、Y_1 と Y_2 は互いに独立で、それぞれ $N(-\Delta/\tau_1,(\tau_1^2+\tau_2^2)/\tau_1^2)$ と $N(\tau_1\Delta/\tau_2^2,(\tau_1^2+\tau_2^2)/\tau_2^2)$ に従う。

いま

$$
cZ_1+(1-c)Z_2=\frac{(c\tau_1^2-(1-c)\tau_2^2)Y_1+\tau_2^2Y_2}{\tau_1^2+\tau_2^2},
$$

であり、

$$
\begin{gathered}
\left(cZ_1+(1-c)Z_2-\frac{\tau_1\Delta}{\tau_1^2+\tau_2^2}\right)^2 \le \left(\frac{\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}}{\tau_1^2+\tau_2^2}\right)^2 \Longleftrightarrow \\
\tau_1\Delta-\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)Y_1\le\tau_2^2Y_2\le \\
\tau_1\Delta+\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)Y_1
\end{gathered}
$$

となる。よって、(3.3) は

$$
\begin{aligned}
& P\left\{\left(cZ_1+(1-c)Z_2-\frac{\tau_1\Delta}{\tau_1^2+\tau_2^2}\right)^2 \le \left(\frac{\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}}{\tau_1^2+\tau_2^2}\right)^2 \,\middle|\, Z_1>Z_2, s_1^2>s_2^2\right\} \\
= \;& P\left\{\frac{\tau_1\Delta-\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)Y_1}{\tau_2^2}\le Y_2\right. \\
& \left.\le \frac{\tau_1\Delta+\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)Y_1}{\tau_2^2} \,\middle|\, Y_1>0, s_1^2>s_2^2\right\}
\end{aligned}
$$

になる。

$E(Y_2)=\tau_1\Delta/\tau_2^2$ により、

$$
\begin{aligned}
& P\left\{\frac{\tau_1\Delta-\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)Y_1}{\tau_2^2}\le Y_2\right. \\
\le \;& \left.\frac{\tau_1\Delta+\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)Y_1}{\tau_2^2} \,\middle|\, Y_1>0, s_1^2>s_2^2\right\} \\
= \;& E\{h(c,Y_1)|Y_1>0, s_1^2>s_2^2\}
\end{aligned}
$$

と表わされる、ここで、

$$
\begin{aligned}
h(c,y_1) \;=\; & \Phi\left(\frac{\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)y_1}{\tau_2\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}}\right) \\
& -\Phi\left(\frac{-\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)y_1}{\tau_2\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}}\right) \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

であり、$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数である。

従って、(3.1) の左辺は次のようになる。

$$P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{CS}-\mu_i}{\tau_i}\right)^2 \le d \middle| \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\right\} = E\{h(c, Y_1)|Y_1 > 0, s_1^2 > s_2^2\}.$$

同様に、(3.1) の右辺は

$$P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{OS}-\mu_i}{\tau_i}\right)^2 \le d \middle| \bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2\right\} = E\{h(\gamma_0, Y_1)|Y_1 > 0, s_1^2 > s_2^2\}$$

になる。

従って、(3.1) は次の式と同値である。

$$E\{h(c, Y_1) - h(\gamma_0, Y_1)|Y_1 > 0, s_1^2 > s_2^2\} \ge 0,$$

$h(c, y_1) \ge h(\gamma_0, y_1)$ を示すことができれば、上の式は真である。
$s_1^2 > s_2^2$ のとき、$\gamma_0 = n_1 s_2^2/(n_1 s_2^2 + n_2 s_1^2) < c$ になる。y_1 を固定し、$h(c, y_1)$ は c の非減少関数であることを次のように証明する。$h(c, y_1)$ を c に対して微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(c, y_1)}{\partial c} &= -\frac{(\tau_1^2+\tau_2^2)y_1}{\tau_2\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}} \times \\
&\left\{\phi\left(\frac{\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)y_1}{\tau_2\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}}\right)\right. \\
-&\left.\phi\left(\frac{-\tau_2\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2)d-\Delta^2}+((1-c)\tau_2^2-c\tau_1^2)y_1}{\tau_2\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}}\right)\right\} \\
\ge\ & 0
\end{aligned}$$

であることがわかる。ここで、

$$(1-c)\tau_2^2 - c\tau_1^2 = \frac{n_2}{n_1+n_2}\frac{\sigma_2^2}{n_2} - \frac{n_1}{n_1+n_2}\frac{\sigma_1^2}{n_1} = \frac{\sigma_2^2-\sigma_1^2}{n_1+n_2} \ge 0$$

であることに注意する。また、$\phi(\cdot)$ 標準正規分布の密度関数である。

よって、証明ができた。

4 数値計算

$\hat{\mu}_i^{CS}, \hat{\mu}_i^{OS}, i = 1, 2$ の挙動は n_i, σ_i^2, Δ の値に依存している。ここで、両推定量の挙動を明らかにするため、$\sigma_1^2 = 1$ とし、いろいろな $n_1, n_2, \Delta, \sigma_2^2$ の値について、$d = 1, 3, 5$ で数値積分を行う。$\hat{\mu}_i^{OS}$ に対する相対改良率

$$RI(\hat{\mu}_i^{CS}) = (MSE(\hat{\mu}_i^{OS}, \mu_i) - MSE(\hat{\mu}_i^{CS}, \mu_i))/MSE(\hat{\mu}_i^{OS}, \mu_i) \times 100$$

を表 1、表 2 にまとめる。また、同時推定における $(\hat{\mu}_1^{CS}, \hat{\mu}_2^{CS})$ と $(\hat{\mu}_1^{OS}, \hat{\mu}_2^{OS})$ との集中確率の差を次のように定義、評価し、結果を表 3 にまとめる。

$$DI(\hat{\mu}^{CS}, d) = \left(P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{CS}-\mu_i}{\tau_i}\right)^2 \le d\right\} - P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{OS}-\mu_i}{\tau_i}\right)^2 \le d\right\}\right) \times 100.$$

ここで、(μ_1, μ_2) の推定量 $(\hat{\mu}_1^{CS}, \hat{\mu}_2^{CS})$ の集中確率を次のように定義する。

すべて $d > 0$ に対して、

$$P\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{\mu}_i^{CS}-\mu_i}{\tau_i}\right)^2 \le d\right\}$$

4.1 考察

1. 表 1 より、$\hat{\mu}_2^{OS}$ に対する相対改良率 $RI(\hat{\mu}_2^{CS})$ について下記のことがわかる。

   (a) X_1 の分散 $(\sigma_1^2 = 1)$ に比べ、X_2 の分散 σ_2^2 が大きい場合 $(\sigma_2^2 = 4)$、Δ が 0 のときの相対改良率が最も大きく、相対改良率が Δ の増加に伴って減少した。しかし、双方の分散が近い場合 $(\sigma_2^2 \leq 2)$、Δ が 0.2 の近傍での相対改良率が最も高く、Δ の増加に伴って減少した。

   (b) n_1 の値に比べ、n_2 の値が小さい場合（たとえば、$n_1 = 5, n_2 = 2$ または、$n_1 = 10, n_2 = 2$)、Δ の値が 0.8 から 1 までの相対改良率は σ_2^2 の値の増加に伴って増加する。しかし、Δ の値が 0 から 0.4 までの相対改良率は σ_2^2 の値の増加に伴って減少する。

   (c) Δ の値が 0.6 のときの相対改良率が σ_2^2 の値の増加に伴って増加し、$\sigma_2^2 = 1.5$ 近傍でその相対改良率がピークに達し、その後、減少に転じた。

2. 表 2 より、μ_1 の推定量 $\hat{\mu}_1^{CS}$ の挙動を次のように確認できた。

   (a) 等分散の場合 $(\sigma_2^2 = 1)$ において、Δ の値が大きいとき、$\hat{\mu}_1^{OS}$ が改良されないケースがよく現れる。しかし n_2 の値が n_1 に比べ、小さい場合、このような現象はあまり現れていない。

   (b) σ_2^2 の値が大きくなるとき $n_1 > n_2$ ならば相対改良率は大きくなることが多く、$\sigma_2^2 = 4$ ではほとんどの場合正になる。

3. 表 3 より、$(\hat{\mu}_1^{CS}, \hat{\mu}_2^{CS})$ と $(\hat{\mu}_1^{OS}, \hat{\mu}_2^{OS})$ との集中確率の差について下記のことがわかる。

   (a) 集中確率の差は Δ や n_2 の増加に伴っても減少し、d の増加により減少することが多い。

   (b) σ_2^2 の値が一定の値まで大きくなるとき、集中確率の差は大きくなる。

参考文献

(1) Barlow, R. E., Bartholomew, D. J., Bremner, J. M. and Brunk, H. D. (1972): Statistical Inference under Order Restrictions. Wiley, New York.

(2) Chang Y.-T. and Shinozaki, N. (2012) "Estimation of Ordered Means of Two Normal Distributions with Ordered Variances", Journal of Mathematics and System Science Vol.2, No.1, pp. 1-7.

(3) Chang Y,-T. Oono, Y. and Shinozaki, N. (2012), "Improved estimators for the common mean and ordered means of two normal distributions with ordered variances", Journal of Statistical Planning and Inference, 142, pp. 2619-2628.

(4) Elfessi, A. and Nabendu. P. (1992) A note on the common mean of two normal populations with ordered restricted variances. Commun. Statist.-Theory Meth., 21(11), pp. 3177-3184.

(5) Garren, S. T. (2000), "On the improved estimation of location parameters subject to ordered restrictions in location-scale families," Sankhyā: Ser. B, Pt.2, Vol. 62, pp. 189-201.

(6) Graybill, F.A. and Deal, R. B. (1959), "Combining unbiased estimators," Biometrics 15, pp. 543-550.

(7) Hwang, J. T. (1985), "Universal domination and stochastic domination," Ann. Statist., Vol.13, No.1, pp. 295-314.

(8) Hwang, J. T. and Peddada, S. D. (1994), "Confidence interval estimation subject to order

restrictions," Ann. Statist., Vol.22, No.1, pp. 67-93.
(9) Kelly, R.E. (1989), "Stochastic reduction of loss in estimating normal means by isotonic regerssion," Ann. Statist., Vol.17, No.2, pp. 937-940.
(10) Lee. C.I.C. (1981). "The quadratic loss of isotonic regression under normality," Ann. Statist., Vol.9, No.3, pp. 686-688.
(11) Ma, Y. and Shi N. Z. (2002), "Quadratic loss of isotonic normal means under simultaneous order restrictions," Northeast Math. J., Vol.18, No.3, pp. 245-253.
(12) Misra,N. and Edward, C. van der Meulen (1997). On estimation of the common mean of $k(\geq 2)$ normal populations with order restricted variances. Statistics & Probability Letters 36, pp. 261-267.
(13) Oono, Y. and Shinozaki, N. (2005), "Estimation of two order restricted normal means with unknown and possibly unequal variances," Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 131, Issue2, pp. 349-363.
(14) Robertson, T., Wright, F. T. and Dykstra, R. L.(1988) : Order Restricted Statistical Inference. Wiley, New York.
(15) Shi N. Z. (1994), "Maximum likelihood estimation of means and variances from normal populations under simultaneous order restrictions," Journal Multivariate Anal., Vol. 50, pp. 282-293.
(16) Silvapulle, M. J., Sen, P. K. (2004). *Constrained Statistical Inference.* Wiley, New Jersey.
(17) van Eeden, C. (2006), *Restricted Parameter Space Estimation Problems.* Lecture notes in Statistics 188, Springer.

謝辞
本研究は科研費 (基盤研究 (C)No.22500263) 助成を受けたものである。また、著者張元宗は目白大学の特別研究費の助成も受けています。論文の改訂の際に編集委員および査読者から有益なコメントと示唆を頂きました。ここに感謝の意を表します。

表 1: $\hat{\mu}_2^{CS}$ の相対改良率 $RI(\hat{\mu}_2^{CS})$ と $*: P(\bar{X}_1 > \bar{X}_2, s_1^2 > s_2^2)$

n_1	n_2	Δ	$\sigma_2^2 = 1$		$\sigma_2^2 = 1.1$		$\sigma_2^2 = 1.5$		$\sigma_2^2 = 2$		$\sigma_2^2 = 4$	
			$RI(\hat{\mu}_2^{CS})$	*	$RI(\hat{\mu}_2^{CS})$	*	$RI(\hat{\mu}_2^{CS})$	*	$RI(\hat{\mu}_2^{CS})$	*	$RI(\hat{\mu}_2^{CS})$	*
5	2	0	12.127	(0.313)	12.298	(0.303)	12.417	(0.270)	12.084	(0.241)	10.352	(0.178)
		0.2	12.507	(0.254)	12.503	(0.248)	12.246	(0.226)	11.755	(0.206)	10.005	(0.159)
		0.4	11.07	(0.198)	11.065	(0.195)	10.894	(0.184)	10.557	(0.172)	9.247	(0.140)
		0.6	8.854	(0.148)	8.915	(0.148)	9.004	(0.145)	8.936	(0.141)	8.249	(0.122)
		0.8	6.575	(0.106)	6.704	(0.108)	7.042	(0.111)	7.23	(0.112)	7.154	(0.105)
		1	4.599	(0.073)	4.767	(0.075)	5.268	(0.082)	5.641	(0.087)	6.063	(0.089)
5	3	0	6.324	(0.278)	6.409	(0.264)	6.251	(0.219)	5.719	(0.180)	3.934	(0.105)
		0.2	6.989	(0.218)	6.878	(0.208)	6.309	(0.177)	5.607	(0.149)	3.778	(0.091)
		0.4	6.129	(0.162)	6.002	(0.157)	5.479	(0.138)	4.895	(0.120)	3.397	(0.078)
		0.6	4.682	(0.114)	4.612	(0.112)	4.308	(0.104)	3.944	(0.093)	2.908	(0.066)
		0.8	3.248	(0.076)	3.24	(0.076)	3.154	(0.074)	2.998	(0.070)	2.398	(0.054)
		1	2.088	(0.047)	2.119	(0.049)	2.181	(0.051)	2.176	(0.051)	1.921	(0.044)
5	5	0	3.125	(0.250)	3.18	(0.232)	2.957	(0.176)	2.451	(0.130)	1.978	(0.052)
		0.2	3.765	(0.188)	3.63	(0.176)	3.03	(0.137)	2.389	(0.103)	1.878	(0.044)
		0.4	3.248	(0.132)	3.094	(0.125)	2.53	(0.101)	1.99	(0.079)	1.646	(0.036)
		0.6	2.336	(0.086)	2.231	(0.082)	1.855	(0.070)	1.493	(0.057)	1.36	(0.029)
		0.8	1.484	(0.051)	1.433	(0.050)	1.24	(0.045)	1.039	(0.039)	1.077	(0.022)
		1	0.852	(0.028)	0.838	(0.029)	0.769	(0.028)	0.68	(0.025)	0.824	(0.017)
5	10	0	1.401	(0.228)	1.439	(0.207)	1.247	(0.141)	0.885	(0.089)	0.219	(0.020)
		0.2	1.83	(0.163)	1.721	(0.149)	1.266	(0.103)	0.835	(0.067)	0.194	(0.016)
		0.4	1.531	(0.106)	1.409	(0.098)	0.992	(0.070)	0.645	(0.047)	0.153	(0.012)
		0.6	1.018	(0.062)	0.934	(0.058)	0.66	(0.044)	0.436	(0.031)	0.11	(0.009)
		0.8	0.577	(0.033)	0.533	(0.031)	0.389	(0.025)	0.266	(0.018)	0.074	(0.006)
		1	0.285	(0.015)	0.267	(0.015)	0.206	(0.013)	0.149	(0.010)	0.048	(0.004)
10	2	0	13.182	(0.328)	13.116	(0.317)	12.618	(0.282)	11.885	(0.251)	9.66	(0.185)
		0.2	13.563	(0.261)	13.385	(0.255)	12.656	(0.234)	11.832	(0.213)	9.591	(0.165)
		0.4	11.604	(0.199)	11.53	(0.197)	11.152	(0.188)	10.64	(0.177)	8.99	(0.145)
		0.6	8.859	(0.144)	8.929	(0.145)	9.019	(0.145)	8.918	(0.143)	8.069	(0.126)
		0.8	6.243	(0.099)	6.416	(0.102)	6.862	(0.109)	7.103	(0.112)	7.006	(0.108)
		1	4.127	(0.065)	4.343	(0.068)	4.978	(0.079)	5.44	(0.086)	5.925	(0.091)
10	5	0	3.373	(0.272)	3.317	(0.251)	2.825	(0.185)	2.192	(0.132)	0.912	(0.049)
		0.2	4.271	(0.195)	4.000	(0.182)	3.079	(0.139)	2.275	(0.102)	0.909	(0.041)
		0.4	3.376	(0.127)	3.166	(0.120)	2.471	(0.097)	1.865	(0.075)	0.792	(0.033)
		0.6	2.144	(0.074)	2.045	(0.072)	1.687	(0.063)	1.338	(0.052)	0.633	(0.026)
		0.8	1.179	(0.039)	1.155	(0.039)	1.034	(0.038)	0.879	(0.034)	0.477	(0.019)
		1	0.574	(0.018)	0.582	(0.019)	0.58	(0.021)	0.538	(0.021)	0.345	(0.014)
10	10	0	1.613	(0.250)	1.599	(0.222)	1.23	(0.139)	0.772	(0.079)	0.138	(0.013)
		0.2	2.275	(0.164)	2.046	(0.147)	1.307	(0.096)	0.756	(0.057)	0.127	(0.010)
		0.4	1.628	(0.093)	1.454	(0.085)	0.926	(0.059)	0.544	(0.037)	0.098	(0.007)
		0.6	0.869	(0.045)	0.788	(0.042)	0.53	(0.032)	0.329	(0.022)	0.068	(0.005)
		0.8	0.378	(0.018)	0.352	(0.018)	0.26	(0.015)	0.175	(0.011)	0.043	(0.003)
		1	0.136	(0.006)	0.132	(0.006)	0.111	(0.006)	0.084	(0.005)	0.026	(0.002)

表 2: $\hat{\mu}_1^{CS}$ の相対改良率 $RI(\hat{\mu}_1^{CS})$

n_1	n_2	Δ	$\sigma_2^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1.1$	$\sigma_2^2 = 1.5$	$\sigma_2^2 = 2$	$\sigma_2^2 = 4$
5	2	0	20.404	21.819	26.179	29.913	37.921
		0.2	11.685	13.292	18.398	22.929	32.905
		0.4	5.305	6.794	11.808	16.581	27.866
		0.6	1.407	2.570	6.810	11.259	22.995
		0.8	-0.520	0.263	3.416	7.145	18.470
		1	-1.191	-0.733	1.356	4.204	14.435
5	3	0	8.633	9.276	10.983	12.102	13.475
		0.2	3.062	3.854	6.122	7.810	10.477
		0.4	-0.039	0.652	2.786	4.561	7.864
		0.6	-1.278	-0.798	0.823	2.348	5.695
		0.8	-1.461	-1.184	-0.139	0.992	3.977
		1	-1.195	-1.064	-0.489	0.253	2.677
5	5	0	3.125	3.375	3.816	3.810	2.925
		0.2	-0.097	0.322	1.343	1.866	1.980
		0.4	-1.301	-0.941	0.039	0.675	1.263
		0.6	-1.377	-1.147	-0.458	0.064	0.755
		0.8	-1.040	-0.921	-0.527	-0.180	0.418
		1	-0.658	-0.609	-0.423	-0.228	0.210
5	10	0	0.898	0.982	1.039	0.885	0.343
		0.2	-0.811	-0.570	-0.024	0.202	0.182
		0.4	-1.091	-0.889	-0.377	-0.094	0.080
		0.6	-0.825	-0.704	-0.374	-0.164	0.026
		0.8	-0.494	-0.436	-0.264	-0.141	0.000
		1	-0.253	-0.229	-0.155	-0.094	-0.008
10	2	0	32.435	34.023	38.899	43.062	51.930
		0.2	21.276	23.239	29.417	34.814	46.385
		0.4	12.128	14.089	20.624	26.718	40.529
		0.6	5.811	7.432	13.318	19.380	34.558
		0.8	2.146	3.283	7.884	13.258	28.702
		1	0.381	1.069	4.248	8.551	23.191
10	5	0	5.262	5.513	5.810	5.554	4.005
		0.2	0.780	1.272	2.409	2.909	2.741
		0.4	-0.904	-0.503	0.584	1.264	1.782
		0.6	-1.086	-0.861	-0.157	0.395	1.098
		0.8	-0.769	-0.677	-0.329	0.015	0.639
		1	-0.428	-0.404	-0.278	-0.104	0.349
10	10	0	1.613	1.700	1.600	1.218	0.361
		0.2	-0.828	-0.501	0.164	0.359	0.196
		0.4	-1.081	-0.849	-0.282	-0.006	0.094
		0.6	-0.687	-0.580	-0.283	-0.098	0.038
		0.8	-0.323	-0.288	-0.175	-0.085	0.011
		1	-0.122	-0.115	-0.084	-0.052	0.001

表 3: $(\hat{\mu}_1^{CS}, \mu_2^{CS})$ と $(\hat{\mu}_1^{OS}, \mu_2^{OS})$ との集中確率の差

n_1	n_2	Δ	$\sigma_2^2 = 1$			$\sigma_2^2 = 1.1$			$\sigma_2^2 = 1.5$			$\sigma_2^2 = 2$			$\sigma_2^2 = 4$		
			d=1	*d=3*	*d=5*	*d=1*	*d=3*	*d=5*	*d=1*	*d=3*	*d=5*	*d=1*	*d=3*	*d=5*	*d=1*	*d=3*	*d=5*
5	2	0	4.237	3.825	2.674	4.372	3.998	2.836	4.600	4.429	3.318	4.561	4.650	3.681	3.778	4.480	4.067
		0.2	2.979	2.679	1.833	3.121	2.841	1.974	3.449	3.298	2.423	3.569	3.607	2.806	3.232	3.790	3.392
		0.4	1.959	1.844	1.244	2.093	1.985	1.359	2.459	2.416	1.750	2.682	2.756	2.114	2.698	3.168	2.802
		0.6	1.136	1.246	0.837	1.258	1.362	0.928	1.628	1.740	1.250	1.910	2.074	1.576	2.189	2.618	2.293
		0.8	0.352	0.820	0.559	0.497	0.912	0.628	0.907	1.230	0.885	1.235	1.536	1.163	1.716	2.139	1.860
		1	0.000	0.517	0.370	0.000	0.588	0.421	0.000	0.848	0.621	0.585	1.115	0.850	1.276	1.726	1.496
5	3	0	2.143	1.748	1.090	2.212	1.826	1.155	2.254	1.966	1.318	2.101	1.960	1.404	1.391	1.563	1.333
		0.2	1.399	1.144	0.700	1.467	1.213	0.752	1.575	1.369	0.899	1.542	1.427	1.001	1.138	1.260	1.054
		0.4	0.837	0.739	0.448	0.897	0.795	0.488	1.031	0.940	0.609	1.073	1.023	0.707	0.899	1.001	0.824
		0.6	0.398	0.469	0.287	0.451	0.511	0.316	0.597	0.634	0.411	0.685	0.722	0.495	0.682	0.784	0.637
		0.8	0.000	0.287	0.183	0.000	0.319	0.204	0.185	0.418	0.275	0.347	0.500	0.345	0.486	0.605	0.488
		1	0.000	0.161	0.115	0.000	0.185	0.130	0.000	0.264	0.183	0.000	0.336	0.238	0.306	0.459	0.371
5	5	0	1.007	0.744	0.415	1.041	0.777	0.438	1.002	0.789	0.471	0.839	0.711	0.456	0.375	0.394	0.311
		0.2	0.601	0.452	0.249	0.631	0.478	0.266	0.640	0.507	0.297	0.565	0.477	0.299	0.287	0.296	0.228
		0.4	0.317	0.272	0.150	0.341	0.291	0.162	0.373	0.322	0.188	0.352	0.316	0.196	0.208	0.218	0.165
		0.6	0.086	0.160	0.091	0.110	0.174	0.100	0.165	0.201	0.119	0.185	0.206	0.128	0.141	0.158	0.118
		0.8	0.000	0.088	0.055	0.000	0.098	0.061	0.000	0.121	0.075	0.000	0.130	0.083	0.082	0.113	0.084
		1	0.000	0.037	0.032	0.000	0.044	0.036	0.000	0.065	0.047	0.000	0.077	0.054	0.000	0.078	0.059
5	10	0	0.419	0.287	0.147	0.435	0.300	0.155	0.382	0.275	0.148	0.270	0.207	0.119	0.061	0.058	0.042
		0.2	0.226	0.161	0.082	0.238	0.170	0.087	0.218	0.161	0.086	0.162	0.126	0.071	0.042	0.039	0.027
		0.4	0.101	0.090	0.047	0.108	0.096	0.050	0.108	0.094	0.051	0.086	0.076	0.043	0.026	0.026	0.018
		0.6	0.000	0.048	0.027	0.000	0.052	0.029	0.000	0.053	0.030	0.023	0.044	0.026	0.014	0.017	0.011
		0.8	0.000	0.022	0.015	0.000	0.024	0.017	0.000	0.027	0.018	0.000	0.024	0.016	0.000	0.011	0.007
		1	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.009	0.000	0.006	0.010	0.000	0.010	0.009	0.000	0.006	0.005
10	2	0	5.384	5.259	4.036	5.477	5.405	4.195	5.599	5.737	4.634	5.493	5.862	4.920	4.618	5.504	5.084
		0.2	3.733	3.643	2.736	3.867	3.809	2.897	4.177	4.266	3.386	4.291	4.556	3.768	3.946	4.666	4.262
		0.4	2.372	2.454	1.817	2.521	2.615	1.961	2.936	3.101	2.430	3.200	3.473	2.840	3.285	3.906	3.535
		0.6	1.258	1.604	1.185	1.412	1.745	1.304	1.880	2.202	1.715	2.240	2.597	2.108	2.656	3.229	2.902
		0.8	0.000	1.008	0.759	0.191	1.123	0.852	0.935	1.523	1.191	1.390	1.901	1.543	2.067	2.635	2.358
		1	0.000	0.590	0.476	0.000	0.682	0.546	0.000	1.017	0.814	0.510	1.358	1.113	1.519	2.123	1.897
10	5	0	1.299	1.009	0.598	1.317	1.032	0.618	1.217	1.002	0.631	0.997	0.876	0.589	0.434	0.463	0.374
		0.2	0.716	0.570	0.331	0.743	0.594	0.349	0.740	0.614	0.379	0.649	0.570	0.374	0.328	0.344	0.271
		0.4	0.321	0.315	0.184	0.348	0.335	0.197	0.394	0.369	0.226	0.382	0.363	0.235	0.234	0.251	0.194
		0.6	0.000	0.166	0.102	0.000	0.181	0.111	0.107	0.215	0.135	0.169	0.225	0.147	0.153	0.179	0.137
		0.8	0.000	0.074	0.055	0.000	0.085	0.062	0.000	0.117	0.079	0.000	0.134	0.091	0.081	0.125	0.095
		1	0.000	0.000	0.027	0.000	0.000	0.032	0.000	0.048	0.045	0.000	0.071	0.055	0.000	0.084	0.066
10	10	0	0.541	0.380	0.200	0.548	0.388	0.206	0.445	0.331	0.184	0.288	0.230	0.138	0.051	0.051	0.038
		0.2	0.251	0.187	0.098	0.260	0.194	0.102	0.228	0.176	0.097	0.159	0.129	0.076	0.034	0.033	0.024
		0.4	0.069	0.090	0.049	0.079	0.095	0.052	0.087	0.092	0.051	0.071	0.071	0.042	0.020	0.021	0.015
		0.6	0.000	0.039	0.024	0.000	0.042	0.026	0.000	0.045	0.027	0.000	0.037	0.023	0.009	0.013	0.009
		0.8	0.000	0.000	0.011	0.000	0.000	0.012	0.000	0.015	0.014	0.000	0.017	0.013	0.000	0.008	0.006
		1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000	0.006	0.000	0.000	0.006	0.000	0.004	0.003

付録. 予備定理 2.3. の証明

$S = Y + \Delta$ とおくと、S の密度関数は $f(s) = \left(2\pi \cdot \sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right\}$ であり、

$$\lim_{\Delta \to +\infty} \frac{E(Y^2 I_{Y \geq 0})}{E(Y I_{Y \geq 0})} = \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} (s-\Delta)^2 f(s) ds}{\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} (s-\Delta) f(s) ds}.$$

である。

de L'Hôpital の定理を適用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} (s-\Delta)^2 f(s) ds}{\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} (s-\Delta) f(s) ds} &= \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{\dfrac{d}{d\Delta}\left[\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} (s-\Delta)^2 f(s) ds\right]}{\dfrac{d}{d\Delta}\left[\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} (s-\Delta) f(s) ds\right]} \\ &= \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{2\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} (s-\Delta) f(s) ds}{\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} f(s) ds}. \end{aligned}$$

de L'Hôpital の定理を再び適用すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{2\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} (s-\Delta) f(s) ds}{\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} f(s) ds} &= \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{\dfrac{d}{d\Delta}\left[2\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} (s-\Delta) f(s) ds\right]}{\dfrac{d}{d\Delta}\left[\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} f(s) ds\right]} \\ &= \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{2\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} f(s) ds}{f(\Delta)} \end{aligned}$$

になる。さらに、de L'Hôpital の定理を適用すると次式が得られる。

$$\lim_{\Delta \to +\infty} \frac{2\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} f(s) ds}{f(\Delta)} = \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{\dfrac{d}{d\Delta}\left[2\displaystyle\int_{\Delta}^{\infty} f(s) ds\right]}{\dfrac{d}{d\Delta} f(\Delta)} = \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{-2f(\Delta)}{f'(\Delta)} = \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{2\sigma^2}{\Delta} = 0$$

となる。