

解析解による板の曲げ・面内振動解析

Bending and In-Plane Vibration Analysis of Plates Using Analytic Solutions

浦田 喜彦

Yoshihiko URATA

Abstract : A method of simulation of the bending vibrations and in-plane vibrations of plates was presented already by the author. In the method, analytic solutions are used. The collocation method is applied to the analytic solutions expressed in the plane polar coordinates. The method shows a good efficiency and a good accuracy. However, we need more examples of examination in order to establish the reliability of this method.

1. 緒言

板の振動は至るところに例が見られる工学的な基本問題の一つであるが、そのシミュレーション法として閉じた形の解析解が利用できるのはわずかな場合しかない。解析的に解けない問題に対しては少し前まではレーレー・リッツ法やガレルキン法などの直接変分法が用いられていたが、それに対応できる範囲は限られていた。現在では有限要素法が主流であり、シミュレーションの範囲は飛躍的に増大した。しかし、有限要素法は基本的に場を分割する方法なので高次モードまでを解析対象に含めたいときには膨大な数の要素に分割しなければならず、常に最適な方法であるとは限らない。また、滅多にはないことではあるが、条件によっては不可解な計算結果が出てしまうことも知られており、この意味でも注意が必要となる。

できることならば状況に応じて使い分けられるように複数のシミュレーションの手段を確保しておきたい。著者はその一つの方法として解析解を各項とする級数に選点法を適用するという簡単な方法が有効であることを示してきた^{(1)~(3)}。ただ、現在までのところ、この方法の適用例が少ないので、説得力を

増すためにもさらに検討例を増やすことが必要な状況にある。この論文では平板の曲げ振動と面内振動の計算結果を実験と比較して検討した例を示す。

2. 曲げ振動の解析法

2.1 方程式と解表現 均一かつ等方性の板の定常曲げ振動の方程式はつぎのようになる。

$$\nabla^4 w - \alpha^4 w = 0 \quad (1)$$

この式は次のように変形できる。

$$(\nabla^2 + \alpha^2)(\nabla^2 - \alpha^2)w = 0 \quad (2)$$

ただし、 $\alpha^4 = \rho h \omega^2 / D$ で、 ρ , h , D はそれぞれ板の密度、厚さ、曲げ剛性であり、 ω は角振動数である。方程式(2)は2個のヘルムホルツ型の微分方程式に分解されるが、ここではその極座標系での解表現を用いる。原点において正則な一般解はベッセル関数、変形ベッセル関数を用いてつぎのように表される。

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n J_n(\alpha r) + B_n I_n(\alpha r)\} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n J_n(\alpha r) + D_n I_n(\alpha r)\} \sin n\theta \quad (3)$$

2.2 境界条件 境界条件として実験結果との対比の都合上、固定と自由の組み合わせだけを述べることにするとこれらは次のようになる。

【固定】

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \nabla w \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4)$$

2009年3月9日受理

* 理工学部機械工学科

【自由】

$$\left. \begin{aligned} m_n &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right\} = 0 \\ q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} &= -D \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに m_n は境界に沿う曲げモーメント, m_{ns} はねじりモーメント, さらに q_n はせん断力である. 式(5)の第2式は方程式が4階なのでせん断力とねじりモーメントを独立には指定できないのでそれらを組み合わせ合わせた等価せん断力で境界条件を指定することを表す. この条件は変分法で方程式と境界条件を導くごく自然に到達する.

式(4), (5)において n, s は境界上の点における法線, 接線方向の局所座標である (図1). 境界が滑らかな曲線である場合には式(5)の第2式において曲線に沿う微分と接線方向の微分の区別が必要になるのであるが, ここでは直線境界に限定することとしてこの区別を行わない表現にしてある.

法線, 接線方向の微分は図1に示す幾何学的な関係からつぎの関係に従うことになる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n} &= \cos(\varphi - \theta) \frac{\partial w}{\partial r} + \sin(\varphi - \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\sin(\varphi - \theta) \frac{\partial w}{\partial r} + \cos(\varphi - \theta) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2階以上の微分はこの関係を重ねて使用すればよい. 式(3)に微分を施した結果は文献(1)を参照されたい.

境界条件を近似的に満たす方法として選点法を用いる. すなわち, 境界上に離散的に節点を配置し, それらの点だけで境界条件を満たすようにするので

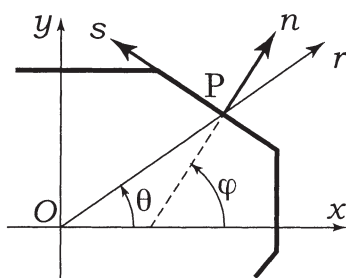


Fig.1 Global and local coordinates at a point on a edge.

ある. その際, 解級数の項数を節点数の2倍に等しくなるようにする. これは1節点あたりの自由度が2であるからである. このようにして未知係数に関する同次の連立一次方程式が得られるが, その係数行列の行列式を0に等値したものが振動数方程式である.

つぎに角点の扱い方を述べる. 角点をはさむ2辺の両方が固定あるいは自由である場合には法線方向を2辺の法線方向の中間にとって辺の中間に点がある場合と同じように扱う. 角点をはさんで境界条件が固定から自由へと変化する場合には, 角点を拘束の強い辺 (この場合には固定辺) の上にあるものとし, 法線方向も固定辺にあるものとして扱う. 角点の境界条件としては他に様々なものが考えられるが, 本論文では以上に述べたものだけに限定した.

2.3 スケールファクター 板の定常振動の一般解は式(3)のように表されるが, これを数値計算にそのまま供することは得策ではない. ベッセル関数は次数により関数値が大きく変化し, その影響で振動数方程式の行列式の値が大きく変動してアンダーフローやオーバーフローが発生することがあるからである. そこで, 式(3)の代わりに

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \lambda_n J_n(\alpha r) + B_n \mu_n I_n(\alpha r)\} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n \lambda_n J_n(\alpha r) + D_n \mu_n I_n(\alpha r)\} \sin n\theta \quad (7)$$

という解表現を採用する. ここに λ_n, μ_n はベッセル関数や変形ベッセル関数の関数値の変動を抑える働きをするスケールファクターであり, さまざまな形で設定することができる. たとえば

$$\lambda_n = \mu_n = \left(\frac{\alpha d}{2} \right)^{-(n+1)} \quad (8)$$

である. d は計算上現れる節点の r 座標の最大値と最小値の間にある適当な距離である. 式(8)はベッセル関数を級数展開したときの初項を参考にした形である. 式(8)の他に

$$\lambda_n = \frac{1}{|J_n(\alpha d_n)|}, \quad \mu_n = \frac{1}{I_n(\alpha d_n')} \quad (9)$$

などもスケールファクターとして用いることができ

る. ここでは距離 d を関数の種類と次数によって変化させられるようにしてある.

3. 曲げ振動の計算と実験の結果

3.1 計算モデル ここでは図2に示す3個の例について計算した. 図では斜線を施した境界部分が固定され, その他の部分は自由辺になっていることを示す. 黒丸は固定辺上の点を, 白丸は自由上の点を表す.

図2(a)は基本的な場合で, 長方形板の相隣る2辺が固定および自由になっている場合である. 角点は両側の辺が共に自由である場合のみを自由として扱い, 他はすべて固定として扱った. 解析的には, 自由の角点における境界条件は等価せん断力ではなく, ねじりモーメントの跳びで与えるべきであることが示される. ところが, 図2のいずれの例においても自

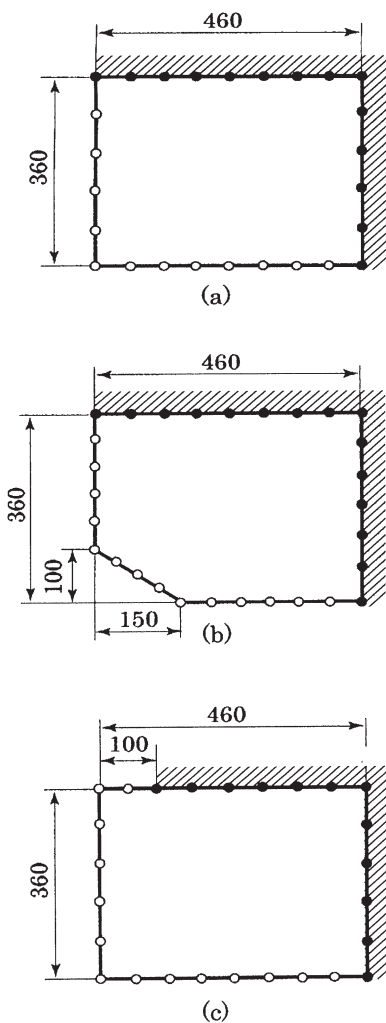


Fig.2 Partially clamped plates and nodal point configurations for the collocation method

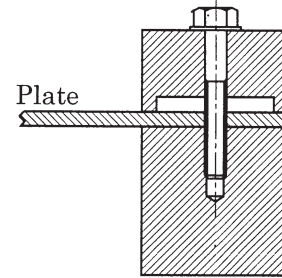


Fig.3 Jig for clamping edges of plates

由の角点で等価せん断力をそのまま用いて境界条件を与えても十分によい結果が得られた. 等価せん断力を計算するための法線方向は角点をはさむ2辺の法線方向の相加平均とした.

ねじりモーメントの跳びではなく, 等価せん断力を用いてよい結果が得られる理論的根拠については今後の検討が必要であるが, ねじりモーメントの跳びは部分積分の操作で得られるのに対してここでは有限間隔で配置した点でのみ境界条件を満たす近似計算であることが関わっていると推定している.

図2(b)は(a)の自由な角点の近傍を切り落として変則的な5角形とした場合で, 自由な角点が2個になる.

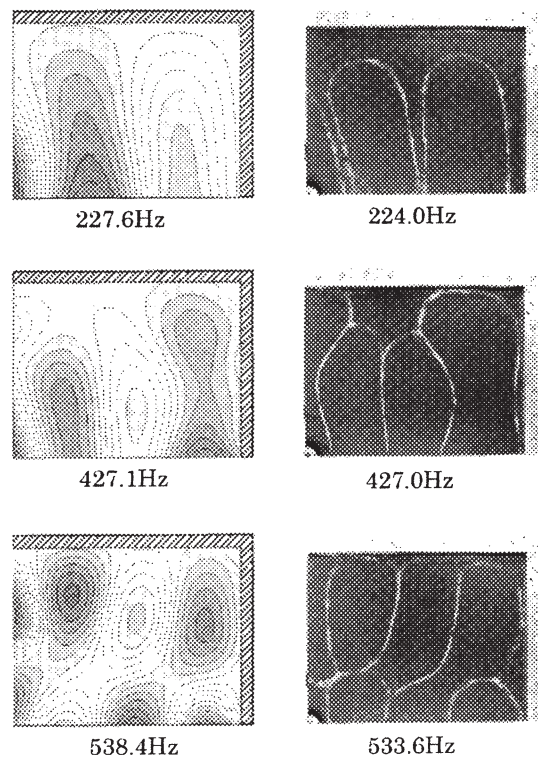


Fig.4 Calculated and observed vibration modes of the plate in Fig.2(a)

図2(c)は辺の途中で境界条件が固定から自由に変化するようにしたもので、条件が切り替わる境

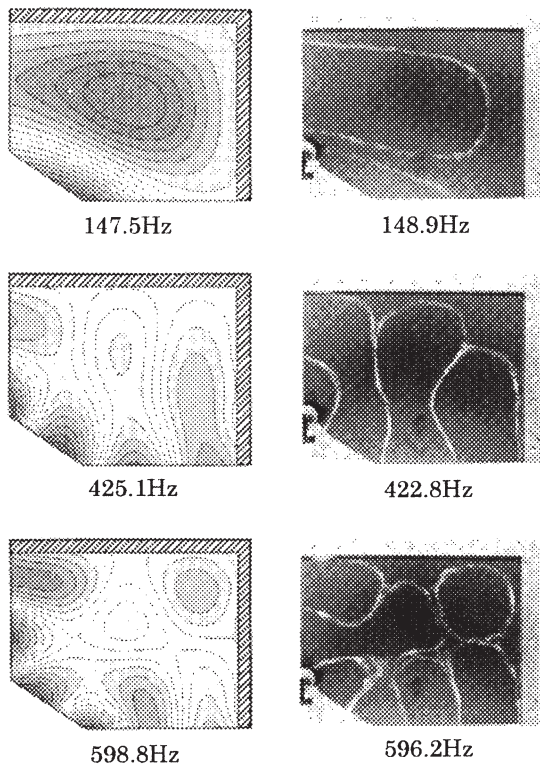


Fig.5 Calculated and observed vibration modes of the plate in Fig.2(b)

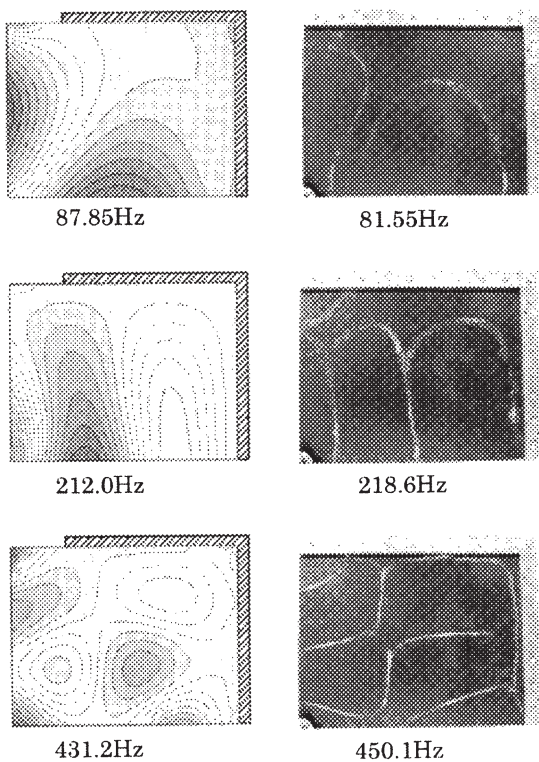


Fig.6 Calculated and observed vibration modes of the plate in Fig.2(c)

節点は固定とした。

3.2 実験方法 実験は厚さ3mmのアルミニウム板を用いて行った。辺の固定は図3に示すような軟鋼製の治具によっておこなった。加振は自由な角点近傍に微小鉄片を貼り付けて電磁加振器で行った。共振点を探索した後に板上に砂をまく単純なクラドニ法で振動モードを可視化した。

3.3 計算と実験の結果 図2に示した各場合について計算と実験を行った結果の代表例を図4~6に示す。計算と実験が全体によく一致していることが見て取れるが、とくに図6では辺の途中で境界条件が固定から自由へと突変する場合に境界条件の変化に対応する計算と実験の結果が得られていることが確認される。これらはすべて自由な角点における境界条件としてねじりモーメントの跳びではなく、等価せん断力を用いて計算した結果である。

4. 面内振動

4.1 面内振動の解析法 基本的な考え方はは曲げ振動と同じであるが、変位が曲げ振動ではスカラー関数であるのに対して面内振動ではベクトルになることが大きな違いである。変位で表した面内応力問題の定常振動の方程式は

$$c_p^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (10)$$

である。\$c_p, c_s\$ はそれぞれ P 波, S 波の伝播速度である。変位 \$\mathbf{u}\$ がスカラーとベクトルのポテンシャルから導かれるとすれば \$\mathbf{k}\$ を板に垂直な単位ベクトルとして

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \psi \mathbf{k} \quad (11)$$

この式を式(10)に入れて整理すればつぎの二つのヘルムホルツ方程式に分解することができる。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \alpha^2 \varphi &= 0 \\ \nabla^2 \psi + \beta^2 \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)の解は

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\alpha r) (A_n \cos n\theta + A'_n \sin n\theta) \\ \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(\beta r) (B_n \sin n\theta - B'_n \cos n\theta) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし、\$\alpha, \beta\$ は次式で定義される。

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2}, \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} \quad (14)$$

変位成分は次式で計算される.

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \\ u_s &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

微分の公式は式(6)と同じ形である. ここでは全周自由の長方形板のみの結果を示すが, 境界条件は ν をポアソン比としてつぎのようになる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &\propto \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_n}{\partial n} + \nu \frac{\partial u_s}{\partial s} \right) = 0 \\ \tau_{ns} &\propto \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

4.2 面内振動の数値計算と実験 計算と実験の対象は $500 \times 600 \times 5\text{mm}$ のアルミニウム長方形板とした. 計算では対称, 反対称性を利用して半領域($500 \times 300\text{mm}$)の周辺上に23点を配置した.

実験では2個の超小型加速度計を2個互いに直交するように組み合わせて面内の2方向の加速度を検出したが, 一定振動数のもとでの測定なのでこれはそのまま変位分布に比例した結果になる.

図7に代表的な計算例と対応する測定結果を比較して示す. 固有振動数に若干の相違が見られるが, これは実験では板を糸で吊っているのもその拘束の影響が出たものと考えられる. しかしながら, 計算と実験の結果はおおむねよく一致しているといつて差し支えないであろう.

5. 結 言

解析解に選点法を適用する解析法の有効範囲を広げる意味でここでは混合境界条件下の板の曲げ振動と周辺自由の板の面内振動の代表的な結果について実験との比較で検討した.

最近気づいたことであるが, 選点法は問題の性質(関与する関数の性質といつてもよい)によって非常に異なった結果を示すことがある. これまでは偶然によい結果が得られる問題だけを対象にしてきた可能性もあるので, 方法の限界を見極めるといふ意味では視点を変えた検討も必要であろう.

一連の研究には多くの学生の協力があったが, 中でも小岱正訓, 鈴木啓保両君の貢献が大きかったことを記して感謝する.

文 献

- (1) 浦田喜彦, 境界離散化解析解による板の曲げ振動解析 (第2報), 機論, **62**-596, C (1996), 1314-1320.
- (2) 浦田喜彦, 境界離散化解析解による板の曲げ振動解析 (第3報), 機論, **63**-605, C (1997), 22-28.
- (3) 浦田喜彦, 境界離散化解析解による板の面内振動解析 (選点法による検討), 機論, **64**-617, C (1998), 45-51.

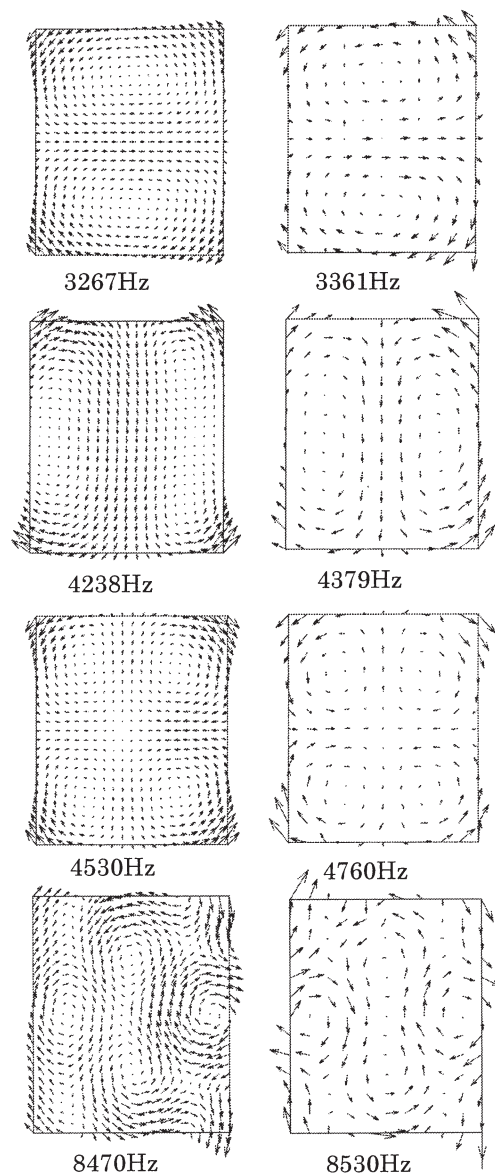


Fig.7 Calculated and observed modes of the in-plane vibration of a rectangular plate (The figure of the left-hand side of each stage and the right-hand side shows the calculation result and the experimental result, respectively.)