ANALISA METODE BRANCH AND BOUND UNTUK PROBLEMA PROGRAM INTEGER TAK LINIER
(*Literature Review*)

Marlina Setia Sinaga
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknik, Universitas Nusa Cendana

ABSTRACT

In this paper, we analyze branch and bound methods for solving non linear integer programming problem. After solving a problem by ignoring the integrality requirements, this strategy is used to force the appropriate non-integer basic variables to move to their neighbourhood integer points.

Keywords: *non linear integer, optimization*

Problema Program Integer Tak Linier (PITL) banyak menarik perhatian para peneliti karena berbagai aplikasinya pada dunia nyata. Aplikasi model PITL pada industri nuklir dengan memaksimumkan efisiensi atau kinerja reactor nuklir setelah operasi pemuatan (Quist et al., 1997). Dalam industri kertas aplikasi model PITL muncul sebagai problema *cutting stock* tak linier (Harjunkoski et al., 1998). Sementara aplikasi dalam *financial* seperti perencanaan strategis rancangan telekomunikasi, dengan aspek cacah menyajikan jumlah serat optik yang akan ditempatkan dalam pipa dan nonlinearitas muncul dari elastisitas yang berkenaan dengan strategis harga masa datang (Horner, 2000), juga dikemukakan dalam problema alokasi asset pada manajemen dana, dengan fungsi tujuan meminimumkan resiko. Aplikasi dalam bidang optimasi topologi (Sigmund, 2000) peubah biner memodelkan ada atau tidaknya material dalam setiap elemen hingga.

PITL merupakan problema optimasi tak linier dengan bentuk umum:

$$\begin{aligned} &\min z = f(x,y) \\ &\text{kendala } g(x,y) \leq 0 \\ &\qquad x \in X,\ y \in Y \end{aligned}$$

dimana X dan Y adalah himpunan bilangan cacah atau biner (0 – 1).

PENGKAJIAN

Problema Integer Tak Linier

Belakangan ini problema optimasi tak linier dengan batasan diskrit banyak mendapat perhatian, khususnya problema dengan fungsi tujuan minimum, pertidaksamaan kendala tak linier dan sebagian atau semua peubah dari himpunan terbatas tertentu; elemen himpunan ini tidak perlu integer. Fiacco and McCormick (1968) menyelesaikan dengan teknik SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique). Shin et al (1990) dan Gerdal and Griffin (1990) dengan pendekatan klasik fungsi *penalty* yang diaplikasikan supaya memenuhi syarat kendala tak linier dan bersifat diskrit.

Problema optimasi yang paling sederhana dengan fungsi tujuan linier tanpa kendala dapat berkembang menjadi problema optimasi yang sulit dan akhirnya menjadi problema kuadratik PITL seperti berikut:

Fungsi minimum

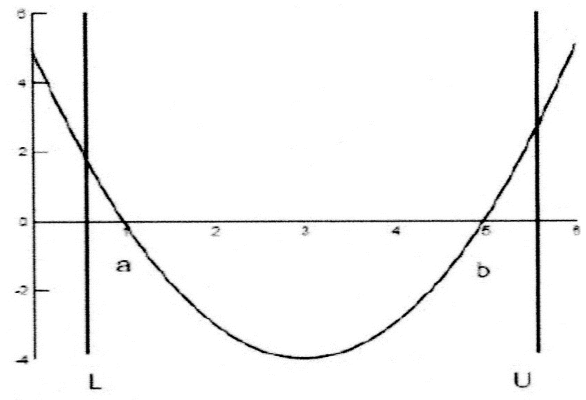
$$f(x) = A(x - a)(x - b)$$

Kendala dengan batas sederhana

$$L \leq x \leq U$$

Untuk $A > 0$

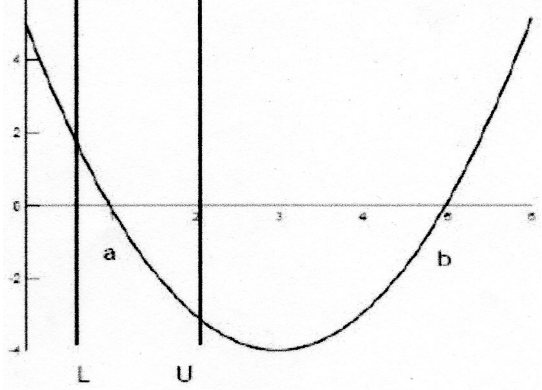
$L < a < b < U$ dan $x^* = (a + b)/2$ adalah minimum (lokal) pada interval $L \leq x \leq U$. Karena f konveks, maka x^* adalah juga minimum global pada interval.



Gambar 1. Fungsi Kuadratik dengan Kendala; A > 0

Untuk $A < 0$

Minimum lokal tidak bisa diperoleh karena $f(x) \equiv -2A$. Namun minimum global tetap bisa diperoleh yakni yang muncul pada titik akhir L atau U.



Gambar 2. Fungsi Kuadratik dengan Kendala; A < 0

Optimisasi Global

Problema optimisasi pada dunia nyata merupakan optimisasi global yakni perpaduan dari diskrit dan kontinu, tak linier, multivariate dan tidak konveks. Tentunya merupakan problema yang paling sukar untuk diselesaikan secara matematis. Akan tetapi dapat diselesaikan dengan memanfaatkan model yang sederhana dan bentuk problema khusus dengan pengembangan aritmatik interval dan analisis interval, yang telah dilakukan oleh Moore, Mohd, Ratschek, dan Rokne (1986, 1966, 1988).

Pendekatan simulasi annealing banyak digunakan untuk problema optimisasi global. Pada tahap awal dilakukan penurunan lokal pada fungsi tujuan yang selanjutnya akan dikurangi secara bertahap. Dengan penurunan lokal tersebut diharapkan akan dapat menghasilkan ruang yang lebih luas lagi hingga mempermudah penyelesaian. Teknik dengan dasar logika yang sama juga dipakai pada branch and bound.

Branch and Bound

Hampir semua program linier menggunakan metode *branch and bound* untuk menyelesaikan problema program integer linier, dan pendekatannya mudah diadaptasikan pada problema tak linier. Penjelasan dasar pendekatan *branch and bound* dapat dirujuk pada sejumlah *textbook* seperti; Nemhauser and Wolsey (1988), Murtagh (1981), dan Ravindran et al. (1987). Metode *Branch* and *Bound* merupakan metode baku untuk menyelesaikan problema PITL, akan tetapi secara komputasi tidak efisien karena subproblema harus diselesaikan pada setiap pencabangan.

Problema dasar diselesaikan sebagai program tak linier kontinyu dengan mengabaikan berbagai syarat-syarat. Misalkan penyelesaiannya adalah x_j , $j \in J$ bukan integer layak.

Dibentuk:

$$x_j = [x_j] + f_j \, , \; 0 \le f_j < 1$$

dimana $[x_j]$ integer terkecil yang tidak melebihi x_j.

Pendekatan dilakukan dengan membentuk dua subproblema baru dengan menambahkan batas:

$$l_j \le x_j \le [x_j]$$

dan

$$[x_j] + 1 \le x_j \le u_j$$

untuk peubah $j \in J$ dengan l dan u sebagai batas bawah dan batas atas.

Proses ini merupakan pencabangan, yakni dengan menyimpan salah satu dari subproblema baru pada suatu daftar yang nantinya akan diselesaikan, sementara subproblema yang lainnya merupakan problema kontinyu. Hal ini memperlihatkan pendekatan *depth-first* pada *branch* and *bound*. Strategi lainnya dengan menggunakan heuristik untuk memilih subproblema mana yang akan diselesaikan terlebih dulu. Proses pencabangan dan penyelesaian deretan problema kontinyu, diulang untuk peubah integer $j \in J$ yang berbeda dan untuk integer $[x_j]$ yang berbeda. Secara umum logika ini dikenal dalam bentuk *tree*. Tiap node dari *tree* mewakili satu penyelesaian subproblema. Pencabangan akan berakhir apabila satu dari kriteria berikut dipenuhi:

1. Subproblema tidak mempunyai penyelesaian layak
2. Penyelesaian dari subproblema tidak lebih baik dari penyelesaian layak integer terbaik sebelumnya.
3. Penyelesaiannya adalah integer layak.

Secara umum, prosedur akan dipengaruhi oleh pemilihan peubah $j \in J$ yang akan dicabangkan, dan juga pada pilihan node yang dilakukan secara mundur. Pencabangan node tentunya diskontinu.

Untuk PITL asumsikan problema konveks lokal, dan mengandung penyelesaian layak integer setidaknya pada persekitaran penyelesaian kontinu.

PENUTUP

Simpulan dan Rekomendasi

Manfaat pendekatan *branch and bound* adalah pasti tersedia batas atas maupun batas bawah pada penyelesaian integer terbaik yang mungkin. Biasanya proses *branch and bound* berakhir jika beda di antara dua batas ini berada pada toleransi relative yang ditetapkan. Secara umum prosedur akan dipengaruhi oleh pemilihan peubah $j \in J$ yang akan dicabangkan, dan juga pada pilihan node yang dilakukan secara mundur. Akan tetapi, batas yang telah dibahas di atas tentunya tidaklah cukup. Tidak bisa begitu saja mengakhiri pencabangan dengan kriteria pengakiran di atas. Dan juga tidak bisa mengakhiri prosedur jika beda antara dua batas masih cukup kecil. Tentunya diperlukan metode lain lagi yang dapat dibahas selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Fiacco, A. and McCormick, G. *Nonlinier programming: sequential unconstrained minimization techniques.* Wiley, 1968.

Harjunkoski, I., Westerlund, T., Pörn, R. and Skrifvars, H. Different transformations for solving non-convex trim-loss problems by MINLP. *European Journal of Operational Research,* 105:594-603,1998.

Horner, P. Something to crowe about. *OR/MS today,* 38-44, 2000.

Mohd, I.B. *Global optimization using interval arithmetic.* PhD dissertation, University of St Andrews, 1986.

Moore, R.E. *Interval analysis*, Prentice-Hall, 1966.

Murtagh, B.A. *Advanced Linear Programming*: *Computation and Practice.* McGraw-Hill. ISBN 0-07-044095-6, 1981.

Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A. *Integer and Combinatorial Optimization.* Wiley. ISBN 0-471-82819-X, 1988.

Quist, A.J., van Geemert, R., Hoogenboom, J.E., Illés, T., de Kler, E., Roos, C. and Terlaky, T. Optimization of a nuclear reactor core reload pattern using nonlinear optimization and search heuristics. Draft paper, Delft University of Technology, Faculty of Applied Mathematics, Department of Operation Research, Mekelweg 4, 2628 CD Delft, The Netherlands, September 1997.

Ratschek, H. and Rokne, J. *New computer methods for global optimization.* Halstead Press, 1988.

Ravindran, A., Phillips, D.T. and Solberg, J.J. *Operations Research, Principles and Practice.* 2nd edition. Wiley, 1987.

Sigmund, O. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural Optimization,* 2000.

Shin, D., Güerdal Z. and Griffin, O. A penalty approach for nonlinear optimization with discrete design variables. *Engineering optimization* 16:29-42, 1990.