Bewegung im Gravitationsfeld in der Allgemeinen Relativitätstheorie — Ein neuer Zugang auf Schulniveau

Corvin Zahn, Ute Kraus

Universität Hildesheim, Institut für Physik,
Marienburger Platz 22, 31141 Hildesheim,
corvin.zahn@uni-hildesheim.de,
ute.kraus@uni-hildesheim.de.

Kurzfassung
In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Bahn eines frei fallenden Teilchens als Geodäte beschrieben, d.h. als geradestmögliche Linie in einer gekrümmten Raumzeit.
Wir haben geometrische Methoden entwickelt, mit denen eine gekrümmte Raumzeit anschaulich dargestellt werden kann und mit denen Bahnen freier Teilchen als Geraden in einer gekrümmten Raumzeit konstruiert werden können. Dieser Zugang zur Allgemeinen Relativitätstheorie basiert auf dem Regge Calculus, einer Methode zur Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen und resultiert in einer koordinatenfreien, nur auf messbaren Abständen beruhenden Beschreibung der Raumzeit.
Voraussetzungen sind lediglich Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie, so dass dieser Zugang in der Oberstufe einsetzbar ist.

1. Gravitation ist Geometrie

Matter tells space how to curve.
Space tells matter how to move.
(John Wheeler)

In diesem Beitrag geht es um die Aussage „Space tells matter how to move". In der Allgemeinen Relativitätstheorie existiert die Newtonsche Gravitations*kraft* als Ursache der Bewegungsänderung eines Körpers im Gravitationsfeld nicht mehr. Freie Teilchen bewegen sich auf Geodäten, also „geradestmöglichen" Linien durch Raum und Zeit. Die als Auswirkung der Gravitation spürbare relative Beschleunigung zweier Massen wird mit einer geradlinigen Bewegung in einer *gekrümmten* Raumzeit erklärt: Gravitation ist Geometrie.

Die mathematische Behandlung der durch Einstein gefundenen „Geometrisierung" der Gravitationstheorie überschreitet bei Weitem die Möglichkeiten der Schulmathematik.

Wir haben neues Unterrichtsmaterial entwickelt, das den geometrischen Aspekt in den Mittelpunkt stellt und fast ohne Mathematik auskommt. Stattdessen setzen wir auf geometrische Anschauung und das Konstruieren und Basteln von Modellen.

In [1] wurde ein maßstabsgerechtes Modell des dreidimensionalen gekrümmten Raums um ein Schwarzes Loch vorgestellt (s. a. [2, 3]). Die dabei eingeführte, auf dem Regge Calculus ([4]) basierende Methode, eine gekrümmte Mannigfaltigkeit in ungekrümmte Teilsektoren zu zerlegen („Karten eines Straßenatlas"), lässt sich verwenden, um mittels dieser sog. *Sektorkarten* in gekrümmten Räumen geometrische Konstruktionen durchzuführen, wie z. B. die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten zu finden oder ganz profan eine Reiseroute zu planen.

Hier soll die Erweiterung unseres Unterrichtsmaterials auf gekrümmte *Raumzeiten* und die darauf aufbauende Beschreibung der Bewegung im Gravitationsfeld vorgestellt werden.

Dass Geodäten als Geraden in stückweise ungekrümmten Raumzeitsektoren konstruiert werden können, wurde in [5, 6] in numerischen Simulationen nachgewiesen. Dass dieses Verfahren schon als didaktisches Werkzeug eingesetzt wurde, ist uns nicht bekannt.

Um den Begriff der Geodäten einzuführen, betrachten wir zuerst Geodäten im Raum, genauer gesagt, in einem zweidimensionalen gekrümmten Raum, einer gekrümmten Fläche.

2. Geodäten im Raum

Eine räumliche *Geodäte* ist die geradestmögliche Linie in einem gekrümmten Raum. Sie entspricht einer gespannten Schnur.

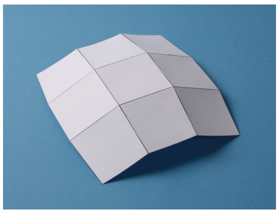
2.1 Gekrümmte Flächen

Anhand von Flächen im Raum wird der Begriff der Krümmung eingeführt. Dabei unterscheiden wir positive, negative und verschwindende Krümmung; als Prototypen werden die Sphäre, die Sattelfläche sowie die Ebene vorgestellt.

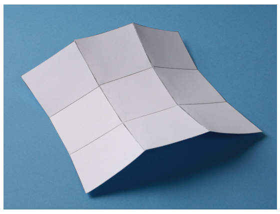
Ein Kriterium zur Ermittlung der Krümmung ist: Ein kleines Stück der Fläche wird ausgeschnitten und flachgedrückt. Reißt es dabei ein, ist die Krümmung positiv, wirft es Falten, ist die Krümmung negativ. Lässt es sich ohne Einreißen oder Faltenwerfen flach ausbreiten, dann ist die Krümmung null. Dieses Kriterium stellt das Vorzeichen der inneren (Gaußschen) Krümmung fest.

Eine gekrümmte Fläche kann durch kleine ebene Flächenstücke angenähert und aus Pappe nachgebaut werden (Abb. 1 oben).

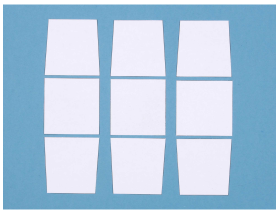
Diese Flächenstücke können auch nebeneinander auf der Ebene angeordnet und als maßstabsgerechte *Sektorkarte* der gekrümmten Fläche verwendet werden, wie ein Straßenatlas (Abb. 1 unten).



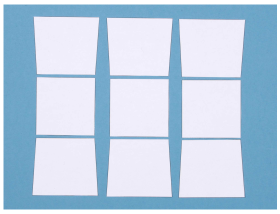
Positiv gekrümmt



Negativ gekrümmt



Positiv gekrümmte Fläche, Sektorkarte

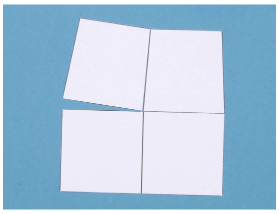


Negativ gekrümmte Fläche, Sektorkarte

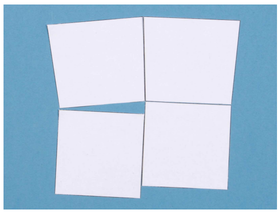
Abb. 1: Gekrümmte Flächen als Sektorkarten.

2.2 Zusammenschieben von Raumsektoren

Versucht man, vier an einem gemeinsamen Eckpunkt liegende Sektoren zusammenzuschieben, gelingt das bei Sektoren einer gekrümmten Fläche nicht (Abb. 2). Es bleiben Lücken (die gekrümmte Fläche würde aufreißen) oder es ist zuviel Material da (die gekrümmte Fläche würde Falten werfen).



Sektoren einer positiv gekrümmten Fläche, an einem Eckpunkt zusammengeschoben.



Sektoren einer negativ gekrümmten Fläche, an einem Eckpunkt zusammengeschoben.

Abb. 2: Sektoren gekrümmter Flächen passen nicht zusammen.

2.3 Gekrümmter Raum um ein Schwarzes Loch

In Abb. 3 rechts ist die Äquatorebene durch ein Schwarzes Loch als Sektorkarte dargestellt. Die Abmessungen dieser Sektoren ergeben sich aus der Schwarzschildmetrik (links).

Die Sektoren passen nicht lückenlos zusammen: Die Fläche hat eine innere Krümmung.

Schwarzschildmetrik:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\phi^2$$

r_s = Schwarzschildradius

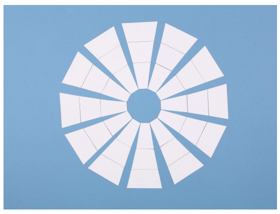


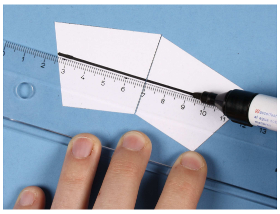
Abb. 3: Die Schwarzschildmetrik und die dazugehörige Sektorkarte für einen Teil der Äquatorebene des Schwarzen Lochs.

2.4 Geodäten

Eine Geodäte in einem gekrümmten (hier zweidimensionalen) Raum ist eine geradestmögliche Linie, sie entspricht einer gespannten Schnur. Mathematisch wird eine Geodäte durch die *Geodätengleichungen* (Abb. 4, links, für die Raumzeit in der Nähe eines Schwarzen Lochs) beschrieben. Diese Beschreibung ist für den Einsatz in Schule und Grundstudium nicht geeignet.
In einer maßstabsgerechten Sektorkarte ist eine Geodäte dagegen einfach eine Gerade und kann mit dem Lineal gezeichnet werden.

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{2M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda}^2 + \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}^2 + (r-2M)\,(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}^2 + \sin^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}^2)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 \theta}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} + \sin\theta\cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}^2$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 \phi}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} - 2\cot\theta\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Geodätengleichungen in der Schwarzschildmetrik.
Werkzeug: Computer.

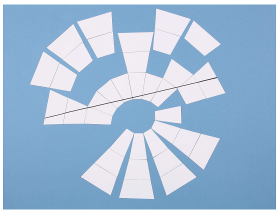


Geodäte auf der Sektorkarte.
Werkzeug: Lineal!

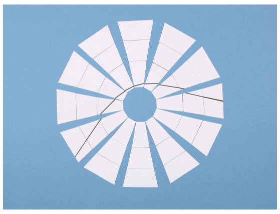
Abb. 4: Geodäten: Berechnen oder Konstruieren?

2.5 Konstruktion von Geodäten

Um eine Geodäte (gespannte Schnur) mit dem Lineal über Sektorgrenzen hinweg zu zeichnen, müssen benachbarte Sektoren aneinandergelegt werden.
In der symmetrischen Anordnung der gleichen Sektoren in Abb. 5 rechts oben ist zu sehen, dass die an einem Schwarzen Loch vorbei gespannte Schnur ihre Richtung ändert, obwohl sie lokal gesehen an jeder Stelle geradeaus läuft.



Ein Geradenstück auf der zweidimensionalen Karte.

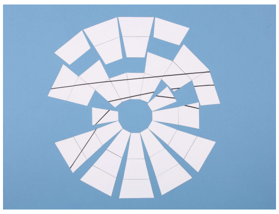


Das Geradenstück auf der Karte in symmetrischer Anordnung.

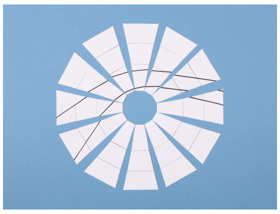
Abb. 5: Eine am Schwarzen Loch vorbeilaufende Gerade ändert ihre Richtung.

Wird eine zweite Schnur parallel zur ersten gespannt (Abb. 6, die Schnüre beginnen rechts im Bild als parallele Linien), ist zu sehen, dass die beiden Schnüre nicht parallel bleiben, obwohl jede einzelne einer Geodäten folgt. Der Abstand der anfänglich parallelen Schnüre nimmt nach links zu.
Dass Parallelen nicht parallel bleiben ist eine Eigenschaft gekrümmter Räume.

Diese Methode, einen gekrümmten Raum und darin verlaufende Geodäten zu konstruieren, kann jetzt auf eine gekrümmte Raumzeit angewandt werden.



Ein zweites Geradenstück, das am rechten Rand parallel zum ersten startet.



Beide Geradenstücke auf der Karte in symmetrischer Anordnung.

Abb. 6: Parallelen bleiben nicht parallel.

3. Geodäten in der Raumzeit

Frei fallende Körper bewegen sich auf geradestmöglichen Bahnen durch eine gekrümmte Raumzeit. Ihre Weltlinien sind raumzeitliche *Geodäten*.

3.1 Minkowski-Raumzeitdiagramme

Die Bewegung eines Körpers kann in einem Raumzeitdiagramm (Abb. 7) dargestellt werden.
Die Zeit ct ($c =$ Lichtgeschwindigkeit) ist nach oben aufgetragen, der Ort x nach rechts. Die *Weltlinie* eines Körpers beschreibt seinen Ort als Funktion der Zeit. Licht breitet sich in diesem Maßstab auf Diagonalen aus ($c\Delta t = \Delta x$).
In einem solchen Raumzeitdiagramm einer lokal ungekrümmten Raumzeit (Inertialsystem) sind Weltlinien unbeschleunigter Körper Geraden.

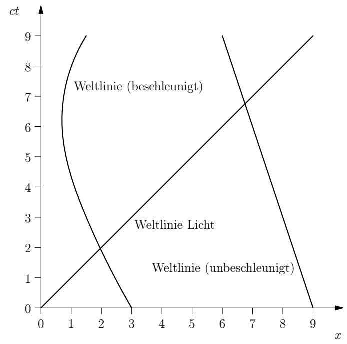


Abb. 7: Raumzeitdiagramm.

3.2 Gekrümmte Raumzeit um ein Schwarzes Loch

Genauso wie eine gekrümmte Fläche durch einzelne ungekrümmte Sektoren angenähert werden kann, kann eine gekrümmte Raumzeit durch einzelne ungekrümmte Raumzeitsektoren angenähert werden. Die Abmessungen dieser Sektoren ergeben sich aus der Metrik. Auf dem Papier stehen nur zwei Dimensionen zur Verfügung, so dass nur ein Unterraum aus der vierdimensionalen Raumzeit dargestellt werden kann. Zusätzlich zur Zeitkoordinate t wählen wir als Raumkoordinate die Radialkoordinate r. In den Raumzeitdiagrammen können radiale Bewegungen, z. B. ein freier Fall nach unten beschrieben werden. In Abb. 8 sind rechts maßstabsgerechte Raumzeitsektoren in der Nähe eines Schwarzen Lochs dargestellt ($r = 1.25r_s \ldots 3.75r_s$, $ct = 0 \ldots 2.5r_s$, der Vertex im Mittelpunkt hat die (ct, r)-Koordinaten $(1.25r_s, 2.5r_s)$).

Schwarzschildmetrik:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\tfrac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \\ &\quad \left(1-\tfrac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \end{aligned}$$

$r_s =$ Schwarzschildradius

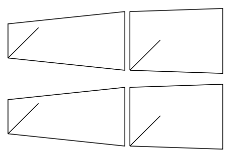


Abb. 8: Jeder Raumzeitsektor ist ein Minkowskidiagramm mit nach rechts laufender Raum- und nach oben laufender Zeitkoordinate. Die Diagonalen stellen jeweils den Lichtkegel dar.

3.3 Zusammenschieben von Raumzeitsektoren

Um eine Geodäte über die Grenze zwischen zwei Raumzeitsektoren zu ziehen, müssen diese zusammengeschoben werden. Abb. 9 links: Zwei Sektoren mit einer gemeinsamen Kante. Mitte: Die beiden Sektoren zusammengeschoben, der obere gedreht. Die Lichtgeschwindigkeit ist in beiden Sektoren unterschiedlich, was nicht erlaubt ist! Rechts: Die beiden Sektoren zusammengeschoben, der obere lorentztransformiert. Die Lichtgeschwindigkeit ist in beiden Sektoren gleich.

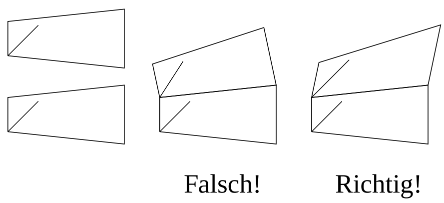


Abb. 9: Die Lichtgeschwindigkeit ist in beiden Sektoren gleich.

In Abb. 10 werden vier um einen gemeinsamen Vertex liegende Raumzeitsektoren zusammengeschoben (und dabei ggf. lorentztransformiert). Sie passen nicht zusammen: Die Raumzeit ist gekrümmt!

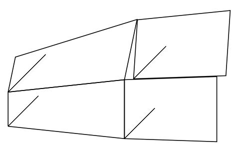


Abb. 10: Die Raumzeitsektoren passen nicht zusammen.

3.4 Konstruktion von Geodäten

Links in Abb. 11 ist die Sektorkarte eines zweidimensionalen Ausschnitts aus der gekrümmten Raumzeit in der Nähe eines Schwarzen Lochs dargestellt.
Die Raumkoordinate r läuft von links nach rechts im Bereich $1.25r_s \ldots 3.75r_s$, die Zeitkoordinate ct von unten nach oben im Bereich $0 \ldots 10r_s$. Die Vertizes in der Mitte haben die r-Koordinate $2.5r_s$. Die Diagonalen stellen jeweils den Lichtkegel dar.
Im Sektor unten rechts startet die Weltlinie eines Körpers (rot), der sich anfänglich in Ruhe bei $r = 2.7r_s$ befindet. Um die Weltlinie als Gerade durch die Raumzeitsektoren fortzusetzen, müssen diese entsprechend lorentztransformiert aneinander gelegt werden (Bild Mitte).
In der symmetrischen (zurücktransformierten) Anordnung der Sektoren (rechts) ist zu sehen, dass die Weltlinie ihre Richtung (= Geschwindigkeit) ändert, obwohl sie lokal gesehen an jeder Stelle geradeaus läuft. Der Körper fällt im Gravitationsfeld beschleunigt nach unten. Die Weltlinie des fallenden Körpers $r(t)$ entspricht näherungsweise der aus der Newton'schen Physik bekannten, dort aus $\ddot{r} = -g$ folgenden Parabel.

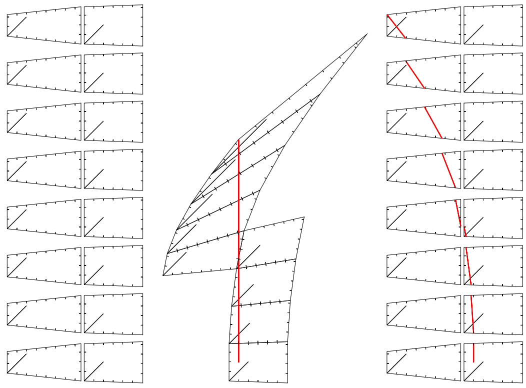


Abb. 11: Weltlinie eines frei fallenden Körpers (rot) in einer Sektorkarte der Schwarzschildmetrik.

Wird ein zweiter Körper aus größerer Höhe ($r = 3.5r_s$) gleichzeitig mit dem ersten fallengelassen, so beginnt seine Weltlinie parallel zur ersten (links in Abb. 12). In der rechten Sektorkarte sind beide Weltlinien gezeigt. Die anfänglich parallelen Weltlinien bleiben nicht parallel. Der Abstand der fallenden Körper nimmt mit der Zeit beschleunigt zu, obwohl jede einzelne Weltlinie eine Geodäte ist.
Diese relative Beschleunigung wird in der Newtonschen Physik durch die Gezeitenkräfte beschrieben. Sie ist in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine direkte Folge der Krümmung unserer Raumzeit.

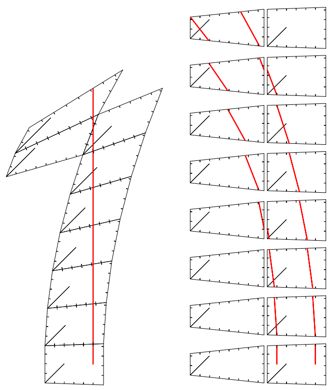


Abb. 12: Zwei im Gravitationsfeld hintereinander frei fallende Körper streben auseinander.

4. Literatur

[1] Zahn, C.; Kraus, U.: Workshops zur Allgemeinen Relativitätstheorie im Schülerlabor „Raumzeitwerkstatt“, Tagungsbeitrag zur Frühjahrstagung Didaktik der Physik, Hannover 2010.

[2] Zahn, C.; Kraus, U.: Wir basteln ein Schwarzes Loch, Arbeitsheft mit Bastelbögen, 2004, www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/graum/graum.html

[3] Kraus, U.; Zahn, C.: Wir basteln ein Schwarzes Loch – Unterrichtsmaterialien zur Allgemeinen Relativitätstheorie, Praxis der Naturwissenschaften Physik, Didaktik der Relativitätstheorien, Heft 4/54, 38–43, 2005.

[4] Regge, T.: General Relativity without Coordinates, Il Nuovo Cimento **19**, 558–571, 1961.

[5] R. M. Williams, G. F. R. Ellis:, Regge Calculus and Observations. I. Formalism and Applications to Radial Motion and Circular Orbits, General Relativity and Gravitation **13** (4), 361–395, 1981.

[6] R. M. Williams, G. F. R. Ellis:, Regge Calculus and Observations. II. Further Applications, General Relativity and Gravitation **16** (11), 1003–1021, 1984.