UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

CARACTERIZACIÓN DE CONJUNTOS COMPACTOS EN ESPACIOS DE BANACH

TANIA I. BRANDA S.

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA

PANAMÁ, REPUBLICA DE PANAMÁ

2006

APROBADO POR:

DOCTOR ROGELIO ROSAS
PRESIDENTE

DOCTOR JAIME GUTIERREZ
MIEMBRO

M.SC. TERESITA DE RUIZ
MIEMBRO

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 28 de abril de 2006

DEDICATORIA

Al ser que con amor, ternura y paciencia ha transformado mi vida, llenándola de una paz y un gozo que sólo Él sabe dar. A Jesucristo dedico este trabajo como culminación de mi vida profesional e inicio de una nueva carrera en sus caminos.

AGRADECIMIENTO

Cuando se llega al final de una ardua pero fructífera jornada, es grato echar una mirada al camino recorrido y encontrar en él la presencia y el recuerdo de aquellas personas, que con verdadero acierto nos ayudaron y alentaron en todo momento. Quiero con estas palabras expresar mi agradecimiento a quienes hicieron posible la realización de este trabajo.

A Dios Todo Poderoso por haber suplido todo lo necesario para que este sueño se hiciera realidad.

A mis profesores, quienes con su enseñanza me permitieron adquirir nuevos conocimientos matemáticos.

Al profesor Rogelio Rosas, quien en todo momento me prestó su ayuda incondicional.

A todos mis compañeros con quienes compartí momentos inmemorables.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es el de caracterizar los conjuntos compactos de los Espacios de Banach. Para ello, se parte de definiciones y propiedades de dichos conjuntos en los espacios métricos y los espacios topológicos. Entre ellas: la definición por cubrimiento, la propiedad de intersección finita, equivalencia entre compacidad y las propiedades de acotamiento total y clausura. Dentro del análisis en los Espacios de Banach se trata por separado los casos de dimensión finita y de dimensión infinita. En los primeros la condición de compacidad es la de ser cerrados y acotados. La propiedad más general asociada a la compacidad en espacios de Banach es la que se deduce del Lema de Mazur: K es compacto si y solo si la cápsula convexa de K es relativamente compacta. En los espacios de Banach de dimensión infinita se presentan tres casos especiales:1-El teorema de Ascoli-Arzelà, 2-El teorema de Riesz Kolmogorov y 3-Los que tienen base de Schauder. Para éstos sólo se requieren dos condiciones: ser acotados y que $\operatorname{Sup}_{x\in K}\left\|\sum_{h=1}^{n}\xi_h e_h - x\right\| < \varepsilon$ para ser compacto, como ejemplo se presentan la base de Schauder clásica de $C[0,1]$ y la base de Haar de $L^p[0,1]$. Los resultados de Enflo limitan este camino; pues él demostró que no todo espacio de Banach Separable posee base de Schauder.

SUMARY

The objetive of the present work is to characterize the compact sets of Banach Spaces. We start with the definitions and properties of these sets in metric and topologic spaces. Among them: definition by open coverings, the property of finite intersection, equivalence between compactness and the properties of totally boundedness and clousure. Within the analysis in the Banach Spaces the cases about finite and infinite dimensions are separately considered, the first case, condition of compactness is to be closed and bounded. The most associated property to the compactness in Banach Spaces is the one is deduced of the Mazur Lemma: K is compact if and only if the convex hull of K is relatively compact. In the Banach Spaces of infinite dimensions there appear three special cases: 1-The theorem of Ascoli-Arzelà, 2-The theorem of Riesz Kolmogorov and 3-The ones that have base of Schauder. For these ones are only two conditions required: be bouded and $\operatorname{Sup}_{x\in K}\left\|\sum_{h=1}^{n}\xi_h e_h - x\right\| < \varepsilon$ to be compact; as example there is presented the classic base of Schauder of $C[0,1]$ and the base of Haar of $L^P[0,1]$. The results of Enflo limit this way since he demonstrated that not all Separable Banach does have a base of Schauder.

INTRODUCCIÓN

La propiedad más utilizada para caracterizar los conjuntos compactos es la definición por cubrimientos abiertos, en algunos casos resulta trabajoso utilizar este camino; por eso es importante estudiar otras alternativas para caracterizar la compacidad.

Este estudio consiste en caracterizar los conjuntos compactos en espacios de Banach, ya sean de dimensión finita o infinita. Para ello se hace un estudio preliminar de estos conjuntos, los compactos, en espacios métricos y topológicos, lo cual nos permite conocer ciertas propiedades importantes que son aplicables a los espacios de Banach; ya que éstos son espacios métricos completos.

El primer capítulo es dedicado al estudio en los espacios métricos y topológicos, esto nos permite establecer un marco teórico en el cual fundamentar nuestro trabajo. Dentro de los conceptos tratados en esta sección tenemos: la definición de compacidad por cubrimiento, la propiedad de intersección finita, compacidad relativa, compacidad secuencial, algunas equivalencias entre compacidad y las propiedades de acotamiento total y clausura.

En el capítulo dos se circunscribe a los espacios de Banach, iniciando nuestro estudio con algo de operaciones entre conjuntos compactos. La condición más general asociada a la compacidad en espacios de Banach es la que se deduce del Lema de Mazur: K

es compacto si y sólo si la cápsula convexa de K es relativamente compacta. Se analiza por separado los casos de dimensión finita de los de dimensión infinita.

En los primeros la condición de compacidad es la de ser cerrados y acotados. En tanto que en los últimos se estudian tres casos especiales:

1. El teorema de Ascoli-Arzelà:

Nos permite demostrar compacidad relativa cuando se tienen las condiciones de equicontinuidad y equi-acotamiento.

2. El teorema de Riesz Kolmogorov.

Este camino nos permite probar la compacidad relativa en $L^p(\mathbb{R})$ a través de tres condiciones. $\mathcal{F}$ es relativamente compacto si y sólo si:

a) $\underset{f\in F}{Sup}\|f\|_p < +\infty$

b) $\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)|^p dx = 0$ uniformemente respecto a $f \in \mathcal{F}$.

c) $\lim_{M\to+\infty}\int_{|x|>M}|f(x)|^p dx = 0$ uniformemente respecto a $f \in \mathcal{F}$.

3. Los Espacios de Banach que tienen base de Schauder.

Durante un largo tiempo se creyó que todos los espacios de Banach Separables poseían base de Schauder, de hecho fue uno de los problemas planteados por Steinhaus en el Libro Escocés, en el año 1941 y no fue hasta el año de 1973 cuando Per Enflo construyó un contraejemplo que hecho por tierra esta conjetura. Para los espacios de Banach con base de Schauder sólo se requieren dos condiciones para la compacidad: la de ser acotados y que $\underset{x \in K}{Sup}\left\| \sum_{h=1}^{n} \xi_h e_h - x \right\| < \varepsilon$; pero los resultados de Enflo limitan este camino. Nuestro estudio finaliza con ejemplos de espacios de Banach que poseen base de Schauder.

CAPÍTULO I

COMPACIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS

CAPÍTULO I

COMPACIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS

En este capítulo se introducen los conceptos generales sobre compacidad para espacios topológicos y espacios métricos, que serán útiles para el logro del objetivo de este trabajo. Dentro de éstos se tiene la propiedad de intersección finita, la compacidad secuencial, el acotamiento total, entre otras. Además, se establece ciertas equivalencias entre compacidad, compacidad secuencial, acotamiento total, la propiedad de Weierstrass y otras.

1.1. Conjuntos Compactos en Espacios Topológicos.

Iniciaremos esta sección con la definición de cubrimiento abierto que nos permite introducir la definición de compacidad por cubrimientos, la cual es una herramienta utilizada con frecuencia para establecer la compacidad de un conjunto.

1.1.1. Definición.

Sea X un espacio topológico. Llamaremos recubrimiento abierto de un conjunto K de X a la colección $\{G_i\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset \cup_i G_i$.

1.1.2. Definición.

Un espacio topológico X es compacto si para cada cubrimiento $\{G_i\}$ de X por conjuntos abiertos G_i, existe una subfamilia finita $\{G_1,...,G_n\}$ que cubre X; es decir tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$.

1.1.3. Definición.

Se dice que un subconjunto K de un espacio topológico es compacto si provisto de la topología inducida es un espacio compacto.

1.1.4. Definición. (P. I. F.)

Una familia ξ de subconjuntos de X tiene la propiedad de intersección finita si la intersección de cualquier subcolección finita de ξ es no vacía.

1.1.5. Proposición.

(X,τ) es compacto si y sólo si cada familia $\xi = \{E_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Demostración:

Sea X un espacio topológico. Si $\{E_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos cerrados en X que tiene intersección vacía entonces $\{\, X - E_i \,/\, i \in I \,\}$ es un cubrimiento abierto de X, pues $\bigcup_{i\in I}(X-E_i)=X-\left(\bigcap_{i\in I}E_i\right)=X$. Por la compacidad existe un subcubrimiento finito $\{X-E_{i_1},...,X-E_{i_n}\}$ y entonces $\bigcap_{k=1}^{n} E_{i_k}=\phi$. Así $\{E_i\}_{i\in I}$ no tiene la propiedad de intersección finita[1].

En el otro sentido, si X no es compacto existe $\{E_i, i\in I\}$ cubrimiento abierto que no se puede reducir a uno finito. Sea $\xi_i = X-G_i$, $i\in I$. Claramente $\xi = \{\xi_i, i\in I\}$ tiene la propiedad de intersección finita pero $\bigcap\xi = \phi$, lo cual contradice nuestra propiedad inicial. ■

1.1.6. Proposición.

Sea (X,τ) un espacio topológico compacto, $K\subset X$. Entonces:

1) Si K es cerrado entonces K es compacto.

2) Si X es de Hausdorff y K es compacto entonces K es cerrado.

Demostración:

1) Sea (X,τ) un espacio topológico compacto y $\{G_i\}$ un cubrimiento abierto de K. Como K es cerrado entonces $X-K$ es abierto. Llamaremos $G=X-K$, a la familia formada por G y los conjuntos $\{G_i\}$ es un cubrimiento abierto de X. Así,

[1] Son equivalentes las afirmaciones: (ε_i) tiene la p.i.f. $\Rightarrow \bigcap\varepsilon_i\neq\phi$ y $\bigcap_i\varepsilon_i=\phi\Rightarrow\exists\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n}\varepsilon_i=\phi$

existe un número finito de G_i tales que $X \subset G \bigcup \cup G_i$ pues X es compacto, pero además $K \subset \bigcup G_i$ ya que $K \subset G \bigcup \cup G_i$ y $K \cap G = \phi$. Luego K es compacto.

2) Sea X un Hausdorff, $K \subset X$ compacto. Si $K = X$ entonces es cerrado.

Sea $K \neq X$ y $x \in X - K$. Para cada $a \in K$ existe un abierto V_a y otro U_a tales que $a \in V_a$, $x \in U_a$ y $U_a \bigcap V_a = \phi$. $\{V_a\}_{a \in K}$ es un cubrimiento abierto de K, por esto existen $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i} = V$. Si $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i}$; $x \in U$ donde U es abierto y $U \bigcap K = \phi$. Entonces $U \subset X - K$ y así $X - K$ es abierto por lo que K es cerrado. ■

Esta propiedad es válida en los espacios métricos ya que todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff.

1.2. Espacios Métricos Compactos.

En esta sección iniciamos con la definición de compacidad relativa y se establecen ciertas equivalencias útiles para el desarrollo del presente trabajo.

1.2.1. Definición.

Sea (X, d) un espacio métrico $K \subset X$ no vacío, K es relativamente compacto si su clausura es compacta.

1.2.2. Definición.

Sea (X,d) un espacio métrico o topológico. Se dice que $K \subset X$ tiene la propiedad W, o propiedad de Weierstrass, si todo subconjunto infinito de K tiene un punto de acumulación que pertenece a K.

1.2.3. Definición.

Sea (X,d) un espacio métrico, X es secuencialmente compacto si toda sucesión de puntos de X admite una subsucesión convergente.

1.2.4. Proposición.

Sea (X,d) un espacio métrico. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1) (X,d) tiene la propiedad de Weierstrass.

2) (X,d) es secuencialmente compacto.

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea (X,d) con la propiedad de Weierstrass, o sea que todo subconjunto infinito de X tiene un punto límite. Sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria en X. Si $\{x_n\}$ tiene un punto que es infinitamente repetido entonces tiene una subsucesión constante que es claramente convergente. Si $\{x_n\}$ no tiene puntos repetidos infinitamente, entonces el conjunto K de puntos de esta sucesión es infinito. Pero por hipótesis asumimos que el conjunto K tiene un punto límite x y así es fácil extraer de $\{x_n\}$ una subsucesión que converja a x. Luego X es secuencialmente compacto.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea X un espacio métrico que es secuencialmente compacto. Demostraremos que un subconjunto infinito K de X tienen un punto límite.

Como K es infinito, una subsucesión $\{x_n\}$ de puntos distintos puede ser extraída de K. Pero por hipótesis X es secuencial mente compacto, así esta sucesión tiene una subsucesión que converge a un punto x. Además, x es un punto límite del conjunto de puntos de la sucesión, por lo tanto este conjunto es un subconjunto de K. Luego x también es punto límite de K. ■

1.2.5. Definición.

$K \subset X$ es totalmente acotado si para cada ε > 0 existe $F \subset K$ finito tal que $K \subset \bigcup_{x \in F} B(x,\varepsilon)$.

1.2.6. Proposición.

Sea (X,d) un espacio métrico, $K \subset X$ se tiene que:

1) Si K es totalmente acotado entonces $\overline{K}$ es totalmente acotado.
2) Si K es totalmente acotado y $B \subset K$ entonces B es totalmente acotado.

Demostración:

1) Sea K totalmente acotado y $\varepsilon > 0$. Existe $F \subset K$ finito tal que $K \subset \bigcup_{x\in F} B(x,\frac{\varepsilon}{2})$.

Luego $\overline{K} \subset \bigcup_{x\in F} \overline{B}(x,\frac{\varepsilon}{2})$. Por otra parte $\overline{B}(x,\frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x,\varepsilon)$[2] por lo tanto $\overline{K} \subset \bigcup_{x\in F} B(x,\varepsilon)$ y así $\overline{K}$ es totalmente acotado.

2) Sea K totalmente acotado y $B \subset K$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $z_1, z_2, \ldots, z_p \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(z_k,\frac{\varepsilon}{2})$ de donde $B \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(z_k,\frac{\varepsilon}{2})$ para un $n \leq p$, luego de haber desechado las esferas que no contienen puntos de B y haber reordenado las z_k si es preciso. Por cada $k = 1,2,\ldots,n$ tomemos un punto $x_k \in B \cap B(z_k,\frac{\varepsilon}{2})$ y consideremos la esfera abierta $B(x_k,\varepsilon)$. Luego si

$\forall y \in B(z_k,\frac{\varepsilon}{2})$; $d(y,x_k) \leq d(y,z_k) + d(x_k,z_k) < \varepsilon$, es decir $y \in B(x_k,\varepsilon)$ o sea $B(z_k,\frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x_k,\varepsilon)$ para cada $k = 1,2,\ldots,n$.

De allí que $B \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\varepsilon)$ para cada $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Por lo tanto B es totalmente

---

[2] $y \in \overline{B}(x,\frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow \exists x_n \in B(x,\frac{\varepsilon}{2}) : x_n \to y \; \forall n : d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \lim d(x,x_n) = d(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow y \in B(x,\varepsilon)$

acotado. ■

1.2.7. Proposición.

Sea (X,d) un espacio métrico, $K \subset X$ compacto entonces K es totalmente acotado.

Demostración.

Sea K compacto y supongamos que no es totalmente acotado. Existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que K no puede ser cubierto por un número finito de bolas centradas en puntos de K y de radio ε.

Por esto si $a_1 \in K$, $K \not\subseteq B_\varepsilon(a_1)$. Si $a_2 \in K \setminus B_\varepsilon(a_1)$, $K \not\subseteq B_\varepsilon(a_1) \bigcup B_\varepsilon(a_2)$... Supóngase que se ha escogido $a_n \in K$, entonces $K \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(a_k)$. Sea entonces $a_{n+1} \in K - \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(a_k)$. De esta manera se define una sucesión $\{a_n\}$ en K. Así la sucesión $\{a_n\}$ en K no posee ninguna subsucesión convergente lo cual contradice nuestra hipótesis, respecto a la compacidad. Por tanto K es totalmente acotado. ■

Aclaramos el hecho que $\{a_n\}$ no posee subsucesión convergente en K, en efecto si para alguna subsucesión de $\{a_n\}$, que por simplicidad supondremos ser ella misma, $a_n \to a$ entonces dado $S_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ existe n_0: $n \geq n_0$ con $a_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ y si $n,m \geq n_0$;

$a_n, a_m \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ de allí que $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \varepsilon$ por lo tanto $a_m \in B_\varepsilon(a_n)$ y $a_m \in B_\varepsilon(a_n)$ lo cual contradice el hecho que o bien $a_m \notin B_\varepsilon(a_n)$ ó $a_n \notin B_\varepsilon(a_m)$.

1.2.8. Proposición.

Sea (X, d) un espacio métrico, $K \subset X$ secuencialmente compacto. Entonces K es totalmente acotado.

Demostración:

Sea $K \subset X$ secuencialmente compacto y sea ε > 0. Escogemos un punto $a_1 \in K$ y considero la esfera abierta $S_\varepsilon(a_1)$. Si esta esfera abierta contiene todos los puntos de K entonces asignando $F = \{a_1\}$ en la definición 1.2.5 K resulta ser totalmente acotado por la arbitrariedad de ε. Si hay puntos fuera de $S_\varepsilon(a_1)$, sea a_2 uno de estos puntos. Considere ahora el conjunto $S_\varepsilon(a_1) \cup S_\varepsilon(a_2)$, si esta unión contiene todos los puntos de K y si $F_1 = \{a_1, a_2\}$ entonces K es totalmente acotado por la arbitrariedad de ε. Continuando en esta dirección, donde alguna unión de la forma $S_\varepsilon(a_1) \cup S_\varepsilon(a_2) \cup \ldots \quad \cup S_\varepsilon(a_n)$ contiene todos los puntos de K y tomando $F_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ resultará como antes que K es totalmente acotado. De esta forma, al continuar con este proceso indefinidamente tenemos que la sucesión $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ es una sucesión que no posee subsucesión convergente; lo cual contradice nuestra hipótesis. Así K es totalmente acotado. ■

1.2.9. Definición.

Sea (X,d) un espacio métrico, un número real $a>0$ es llamado un número de Lebesgue de un cubrimiento abierto $\{G_i\}$, si cada subconjunto de X cuyo diámetro es menor que "a" esta contenido en algún G_i.

1.2.10. Lema de Lebesgue.

En un espacio métrico secuencialmente compacto, todo cubrimiento abierto tiene un número de Lebesgue a.

Demostración:

Sea X un espacio métrico secuencialmente compacto y sea $\{G_i\}$ un cubrimiento abierto. Diremos que un subconjunto de X es grande si no esta contenido en ningún G_i. Si no hay conjuntos no grandes, entonces cualquier número real positivo sirve como un número de Lebesgue. Asumamos que existe un conjunto grande y definamos a' como el extremo inferior de los diámetros de los conjuntos grandes.

Claramente $0 \leq a' \leq +\infty$. Es suficiente mostrar que $a'>0$ porque si $a'=+\infty$ entonces cualquier número $a>0$ puede tomarse como "a" en la definición. Supongamos que $a'=0$ y deduciremos una contradicción de este supuesto.

Todo conjunto grande tiene al menos dos puntos. De $a' = 0$ deducimos que para cada entero positivo n, existe un conjunto grande B_n tal que $0 < d(B_n) < \frac{1}{n}$. Ahora, tomamos un punto x_n en cada B_n. Como X es secuencialmente compacto, la sucesión $\{x_n\}$ tiene una subsucesión $\{x_n'\}$ que converge a algún punto x en X. El punto x estará en algún G_{i_o} en nuestro cubrimiento abierto y como G_{i_o} es abierto; x es el centro de alguna bola abierta $S_r(x)$ contenida en G_{i_o}.

Sea $S_{\frac{r}{2}}(x)$ una bola abierta con radio $\frac{r}{2}$. Como $x_n' \to x$, entonces $x_n' \in S_{\frac{r}{2}}(x)$ a partir de un índice. Sea n_0 uno de estos enteros tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{r}{2}$. Entonces $d(B_{n_0}) < \frac{1}{n_0} < \frac{r}{2}$ y $B_{n_0} \subseteq S_r(x) \subseteq G_{i_0}$. Lo cual contradice el hecho de ser un conjunto grande B_{n_0}. ■

1.2.11. Proposición.

Sea (X,d) un espacio métrico, $K \subset X$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1) K es compacto.

2) K tiene la propiedad Weierstrass.

3) K es secuencialmente compacto.

Demostración:

($1 \Rightarrow 2$) Sea X un espacio métrico, $K \subset X$ compacto. Supongamos que K es infinito y que no tiene puntos de acumulación que pertenezcan a K. Así, cada punto de K es el centro de una bola abierta que no contiene puntos de K diferentes a este centro.

La clase de todas estas esferas abiertas es un cubrimiento abierto, como K es compacto entonces existe un subcubrimiento finito. Por esto K esta contenido en el conjunto de todos los centros de las esferas en este subcubrimiento. Por lo tanto K es finito, lo cual es una contradicción. Luego K tiene la propiedad de Weierstrass.

($2 \Rightarrow 3$) Sea $K \subset X$ con la propiedad de Weierstrass. Sea $\{x_n\}$ una sucesión arbitraria en K. Si $\{x_n\}$ tiene un punto infinitamente repetido entonces $\{x_n\}$ tiene una subsucesión constante, la cual es convergente.

Si $\{x_n\}$ no tiene puntos infinitamente repetidos entonces $\{x_n\}$ que está incluido en K es infinito. Así, por la hipótesis $\{x_n\}$ tiene un punto límite, por lo cual es fácil extraer una subsucesión convergente.

($3 \Rightarrow 1$) Sea $K \subset X$ secuencialmente compacto y sea $\{G_i, i \in I\}$ un cubrimiento abierto de K. Por el Lema de Lebesgue, este cubrimiento abierto tiene un número de Lebesgue a.

Tomemos $\varepsilon = \frac{a}{3}$ y usando 1.2.9 encontramos $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tal que para cada $k = 1, 2, ..., n$ se tiene $d(S\varepsilon(a_k)) \leq 2\varepsilon = \frac{2a}{3} < a$.

Por la definición de número de Lebesgue, para cada K podemos encontrar un $\{G_{i_k}\}$ tal que $S_\varepsilon(a_k) \subseteq G_{ii_k}$. Por lo tanto, todo punto de K será uno de los puntos de $S_\varepsilon(a_k)$. La clase $\{G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}\}$ es un subcubrimiento finito de $\{G_i\}$. Así, K es compacto. ■

1.2.12. Definición.

Se dice que un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy en él es convergente.

1.2.13. Proposición.

Sea (X,d) un espacio métrico completo, $K \subset X$ entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1) K es compacto.

2) K es cerrado y totalmente acotado.

Demostración:

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea (X,d) un espacio métrico completo, $K \subset X$ compacto por 1.2.7 se tiene que K es totalmente acotado. Además, como todo espacio métrico es de Hausdorff por 1.1.6 entonces K es cerrado

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea (X,d) un espacio métrico completo, $K \subset X$ cerrado y totalmente acotado.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en K. Si un elemento de ella se repite un número infinito de veces, ella contiene una subsucesión convergente ya que contiene a una subsucesión constante y no habría nada que probar.

Supongamos que K es totalmente acotado, existe $F_1 \subset K$ finito tal que $K \subset \bigcup_{x \in F_1} B_1(x)$. En una de las bolas $B_1(x)$, $x \in F_1$ hay infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}$ y sea $K_1 = K \cap B_1(x')$ donde K_1 es infinito.

Como $K_1 \subset K$ es totalmente acotado, por lo tanto existe F_2 finito con $F_2 \subset K_1$ tal que $K_1 \subset \bigcup_{x \in F_2} B_{\frac{1}{2}}(x)$.

Como K_1 es infinito, en una de las bolas, sea $B_{\frac{1}{2}}(x)$, hay infinitos términos de la sucesión; ahora escojamos $K_2 = K_1 \cap B_{\frac{1}{2}}(x')$. Procediendo de esta manera se construye una sucesión de conjuntos $\{K_n\}$ tales que para toda n, K_n contiene infinitos términos de la sucesión original y $K_{n+1} \subset K_n \subset K$ para todo n.

Como todo conjunto K_n contiene infinitos términos de la sucesión, es posible seleccionar para cada n, x_{k_n} tal que $x_{k_n} \in K_n$, $k_n < k_{n+1}$.

$\{x_{k_n}\}$ es una subsucesión de la original; y además es de Cauchy; en efecto si $n \geq m$, $x_{k_n}, x_{k_m} \in K_m$ y $d(x_n, x_m) \leq diamK_m \leq diamB_{\frac{1}{2^m}}(x')$ para un $x' \in K$ o sea $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$ y como $\frac{1}{2^{m-1}} \to 0$. Esto asegura que la sucesión es de Cauchy.

Como el espacio es completo $x_{k_n} \to x \in X$ y como K es cerrado $x \in K$. Por lo tanto K es secuencialmente compacto y por ende compacto. ■

1.2.14. Proposición.

Sea (X, d) un espacio métrico completo. $K \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Sea $K \subset X$ un conjunto relativamente compacto y X un espacio métrico completo.

La clausura $\overline{K}$ es totalmente acotada por ser $\overline{K}$ compacto, por 1.2.13; pero $K \subset \overline{K}$ entonces por 1.2.6 K es totalmente acotado.

($\Leftarrow$) Sea $K \subset X$ un conjunto totalmente acotado y X un espacio métrico completo. Por 1.2.6 $\overline{K}$ es totalmente acotado, como $\overline{K}$ es cerrado entonces por 1.2.13 $\overline{K}$ es compacto. Así K es relativamente compacto. ■

1.2.15. Definición.

Sea (X,d) un espacio métrico, un subconjunto K de X es denso en X si $\overline{K} = X$. Un espacio métrico es separable si posee un subconjunto denso numerable.

1.2.16. Proposición.

Todo espacio métrico compacto es separable.

Demostración:

Sea (X,d) un espacio métrico compacto, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ existe un subconjunto finito $F_n \subset X$ tal que $X = \bigcup_{x \in F_n} B_{\frac{1}{n}}(x)$ pues por la 1.2.14 X es totalmente acotado. Sea $F = \bigcup_n F_n$, F es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos.

F es denso en X, en efecto si $y \in X$ y ε>0, existe n_0: $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ tal que $X = \bigcup_{x \in F_{n_0}} B\frac{1}{n_0}(x)$. Por esto, para un $x \in F_{n_0}, y \in B\frac{1}{n_0}(x)$ se tiene que $d(y,x) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, por lo tanto F es denso en X. ■

1.2.17. Proposición.

Sea f una función continua tal que $f: X \to Y$ donde X, Y son espacios métricos. Si $K \subset X$ es un conjunto compacto entonces $f(K)$ es un conjunto compacto en Y.

Demostración:

Consideremos un cubrimiento abierto arbitrario de $f(K)$ y mostraremos que se puede extraer un subcubrimiento finito.

Sea $\{G_\alpha\}$ una colección de conjuntos abiertos en Y tales que $f(K) \subset \bigcup_i G_\alpha$ entonces: $K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(\bigcup_\alpha G_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(G_\alpha)$.

Como f es continua, cada $f^{-1}(G_\alpha)$ es un conjunto abierto de X. Así, la familia $\{f^{-1}(G_\alpha)\}$ constituye un cubrimiento abierto de K. Por hipótesis K es compacto, existen entonces $G_1, G_2, \ldots, G_n$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_i)$ lo cual implica $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(G_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$.

Ahora, tenemos un subconjunto finito para el cubrimiento original de $f(K)$ y de esta forma $f(K)$ es compacto. ■

CAPÍTULO II

SUBCONJUNTOS COMPACTOS DE ESPACIOS DE BANACH

CAPÌTULO II

SUBCONJUNTOS COMPACTOS DE ESPACIOS DE BANACH

En el primer capítulo se consideraron los conjuntos compactos de espacios topológicos y de espacios métricos. Ahora, se estudiarán los conjuntos en espacios de Banach; pero como todo espacio de Banach es un espacio métrico completo, el resultado obtenido en la proposición 1.2.13 respecto a la equivalencia que existe entre la compacidad y el ser cerrado y totalmente acotado es válida para esta sección.

En lo sucesivo X denotará un espacio de Banach.

2.1. Operaciones con Compactos en Espacios de Banach.

En esta sección se demuestra que las operaciones entre conjuntos compactos producen conjuntos compactos y entre conjuntos totalmente acotados también resultan conjuntos totalmente acotados. Además se demuestra el Lema de Mazur, que es la propiedad más general asociada a la compacidad.

2.1.1. Teorema.

Si A, B son conjuntos compactos de un espacio de Banach X entonces $A+B$ es compacto.

Demostración:

Sea A,B compactos en X y sea $\{z_n\}$ una sucesión en $A+B$ entonces $z_n = x_n + y_n$ con $x_n \in A$, $y_n \in B$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión en A y $\{y_n\}$ es una sucesión en B.

Como A y B son compactos existen $\{x_{n_k}\}$en A y $\{y_{n_k}\}$en B tal que $x_{n_k} \to a$ y $y_{n_k} \to b$ donde $a \in A$ y $b \in B$, pues A y Bson cerrados.

Consideremos la subsucesión $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ entonces $z_{n_k} = x_{n_k} + y_{n_k}$ y $z_{n_k} \to a+b \in A+B$, por esto $A+B$ es secuencialmente compacto y por 1.2.12 es compacto. ■

2.1.2. Teorema.

Si A es un conjunto compacto de un espacio de Banach X y λun escalar entonces λA es compacto.

Demostración:

Sea $A \subset X$compacto, λ un escalar y $f_\lambda : X \to X$ definida por $f_\lambda(x) = \lambda x$. f_λ es continua y $f_\lambda(A) = \lambda A$. Así por la proposición 1.2.17 λA es compacto. ■

2.1.3. Teorema.

Sea $A, B \subset X$ totalmente acotados entonces $A+B$ es totalmente acotado.

Demostración:

Sea A, B totalmente acotados. Dado ε > 0 existen $F_1 \subset A$, $F_2 \subset B$ finitos tales que $A \subset \bigcup_{x \in F_1} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, $B \subset \bigcup_{y \in F_2} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$.

Ahora, sea $F = \{ x+y / x \in F_1,\ y \in F_2 \}$. F es finito, subconjunto de $A+B$ y $A+B \subset \bigcup_{z \in F} B_{\varepsilon}(z)$. Así $A+B$ es totalmente acotado. ■

2.1.4. Teorema.

Sea $A \subset X$ totalmente acotado entonces λA es totalmente acotado, donde λ es un escalar.

Demostración:

Sea $\lambda \neq 0$ $A \subset X$ totalmente acotado entonces existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(a_k, \varepsilon)$. Luego $\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n \in \lambda A$ y además $\lambda A \subset \bigcup_{l=1}^{n} B(\lambda a_l, |\lambda| \varepsilon)$. Ya que el radio es positivo. ■

Otra herramienta para trabajar con los conjuntos totalmente acotados es la siguiente:

A es totalmente acotada si y solo si para cada ε > 0, existe $F \subset A$ finito tal que $K \subset F + B(0,\varepsilon) = \bigcup_{x \in F} B(x,\varepsilon)$.

2.1.5. Lema de Mazur.

Si H es la cápsula convexa[3] de $K \subset X$ y K es compacto entonces $\overline{H}$ es compacta.

Demostración:

Sea H la cápsula convexa de $K \subset X$ y K compacto. Basta con probar que $\overline{H}$ es totalmente acotada.

Dada una vecindad V del origen existen:

(a) Una vecindad convexa W del origen tal que $W + W \subset V$.

(b) Un subconjunto finito F de K tal que $K \subset F + W$.

La cápsula convexa de F es compacta, en efecto $co(F) = f(K_n)$ donde $K_n = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n / \varepsilon_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq n,\ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1\}$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$; porque obviamente es cerrado y acotado y $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $f : \mathbb{R}^n \to X$ esta definida por $f(x) = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_i x_i$, $f(K_n)$ es compacto. Por ello si

[3] La cápsula convexa de un subconjunto A de un espacio vectorial es el menor convexo que contiene a A y se denotará co(A)

$co(F)$ es la cápsula convexa de F entonces $K \subset co(F)+W$, pero $co(F)+W$ es convexo y contiene a K, por lo tanto contiene a H.

Así $H \subset co(F)+W$, como $co(F)$ es compacta existe $F_1 \subset co(F) \subset H$ finita tal que $co(F) \subset F_1 + W$.

Luego $H \subset (F_1 + W) + W \subset F_1 + V$, de allí H es totalmente acotada. ■

El resultado del Lema de Mazur es válido para los Espacios Vectoriales Topológicos, en el sentido que $\overline{H}$ es totalmente acotado. Particularmente para los conjuntos locamente convexos, pues en un Espacio Vectorial Topológico las bolas $B(0,\varepsilon)$ se sustituyen por vecindades convexas de 0.

2.1.6. Corolario.

Sea $K \subset X$ compacto entonces $co(K)$ es totalmente acotada.

Demostración:

Por el Lema de Mazur $\overline{co(K)}$ es compacto. Como $co(K) \subset \overline{co(K)}$ y $\overline{co(K)}$ es totalmente acotado entonces $co(F)$ es totalmente acotada. ■

2.1.7. Lema.

Sea K un subconjunto de un espacio de Banach X. K es relativamente compacto si y sólo si $\overline{co(K)}$ es compacto.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Sea K relativamente compacto por lo tanto $\overline{K}$ es compacto y $\overline{co(\overline{K})}$ es compacto. Por otra parte $K \subset \overline{K}$, de allí que $co(K) \subset co(\overline{K}) \subset \overline{co(\overline{K})}$ y $\overline{co(K)}$ es compacto.

$(\Leftarrow)$ Sea $\overline{co(K)}$ compacto, como $K \subset \overline{co(K)}$ entonces resulta que $\overline{K} \subset \overline{co(K)}$ y por lo tanto $\overline{K}$ es compacto, pues un subconjunto cerrado de un compacto es compacto por proposición 1.1.2. (1). Luego K es relativamente compacto. ∎

2.2. Espacios de Dimensión Finita.

Sólo nos referimos en esta sección a la equivalencia entre la propiedad de un conjunto de ser compacto y las propiedades de ser acotado y cerrado; para ello nos apoyamos en el Lema de Riesz.

2.2.1. Proposición.

En un espacio de Banach son equivalentes las siguientes proposiciones:

1) $K \subset X$ acotado y cerrado entonces K es compacto.

2) X tiene dimensión finita.

Demostración:

(1)$\Rightarrow$2) Supóngase que todo subconjunto K de X cerrado y acotado es compacto y que $\dim X = \infty$. Sea x_1 de norma 1, este x_1 genera un subespacio cerrado propio X_1 de dimensión 1 de X. Por el Lema de Riesz[4] existe un $x_2 \in X$ de norma 1 tal que $\|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}$ para toda $x \in X_1$ y en particular $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Los elementos x_1, x_2 generan un subespacio cerrado propio X_2 de X de dimensión 2. Por el Lema de Riesz existe un x_3 de norma 1 tal que para toda $x \in X_2$ se tiene que $\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2}$.

En particular $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ y $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$.

Procediendo por inducción, obtenemos una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X tal que $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$. Es obvio que $\{x_n\}$ no tiene subsucesiones convergentes.

El conjunto $K = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ es acotado y cerrado[5]. Esto contradice la compacidad de K. Por lo tanto la dimensión de X es finita.

[4] Kreyszig, Edwin. Funcional Análisis with aplications. Pag. 78.

[5] Como K no tiene puntos de acumulación es un conjunto cerrado.

$(2)\Rightarrow(1)$ Sea $\dim X = n$, $K \subset X$ cerrado y acotado. Además, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de X y $\{x_n\}$ cualquier sucesión en K. Cada x_m tiene una representación $x_m = \xi^{(m)} e_1 + ... + \xi_n^{(m)} e_n$.

Como K es acotado, $\{x_m\}$ también lo es entonces $\|x_m\| \leq k$ para k>0 y para todo $m \in \mathbb{N}$

Por otra parte existe c>0 tal que para todo $x \in X$, $\|x\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|$; para más detalles ver Lema 2.4.1 del Kreyszig[6].

Así $k \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\xi^{(m)}|$.

Por lo tanto la sucesión de números $\{\xi_j^{(m)}\}$ donde j es fija, es acotada y por teorema de Bolzano-Weierstrass tiene un punto de acumulación ξ_j con $1 < j < n$. O sea $\{\xi_j^{(1)}\}$ tiene un punto de acumulación ξ_1, $\{\xi_j^{(2)}\}$ tiene un punto de acumulación ξ_2 y así sucesivamente[7]. Luego $\{x_m\}$ tiene una subsucesión $\{z_m\}$ a la cual converge a $z = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ y como K es cerrado, $z \in K$. Esto muestra que la sucesión arbitraria $\{x_m\}$ de K tiene una subsucesión convergente en $\{x_n\}$. De allí es compacto. ■

[6] Kreyszig, Edwin. Funcional Análisis with Applications. Pag. 72.
[7] Esto produce un proceso en el cual se puede extraer una subsucesión convergente de $\{\xi_j^{(m)}\}$ para los j=m.

2.3. Caracterización de Subconjuntos Compactos en Espacios de Banach de Dimensión Infinita.

En esta sección centraremos nuestra atención respecto a los espacios de dimensión infinita; utilizando tres herramientas básicas:

1. El teorema de Arzelà-Ascoli para $C[a,b]$.
2. El teorema de Riesz Kolmogorov para $L^p(\mathbb{R})$.
3. Las bases de Schauder.

2.3.1. Definición.

Una familia de funciones $\mathscr{F} = \{ f : A \to Y$, donde $A \subset X$; X e Y son espacios normados$\}$ es equicontinua si para cada $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ si $x, y \in A$ y $\|x - y\| < \delta$ para toda $f \in \mathscr{F}$

2.3.2. Teorema (Arzelà-Ascoli)

Un conjunto $U \subset C[a,b]$ es relativamente compacto si y solo si es equi-acotado y equicontinuo, esto es, si existe una constante M tal que $\|\varphi\|_\infty = \underset{[a,b]}{Sup}|\varphi| \leq M$ para toda $\varphi \in U$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, x' \in [a,b]$ y $|x - x'| < \delta$ entonces $|\varphi(x) - \varphi(x')| < \varepsilon$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Sea U relativamente compacto, entonces U es totalmente acotado. Luego existen $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in U$ tal que $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\varphi_i, 1)$. Si $\varphi \in U$ entonces $\exists i / \varphi \in B(\varphi_i, 1)$ así $\|\varphi - \varphi_i\|_\infty < 1$. Por lo tanto

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi_i\|_\infty + 1$$

$$\|\varphi\|_\infty \leq \max\|\varphi_i\|_\infty + 1 = M \text{ donde } M = \max\|\varphi_i\|_\infty + 1 .$$

Así U es equi-acotado.

Ahora probaremos que es equicontinuo. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ tal que $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(\varphi_i, \varepsilon)$.

Si $\varphi \in U$ entonces existe i tal que $\varphi \in B(\varphi_i, \varepsilon)$ de allí

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - \varphi_i(x)| + |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| + |\varphi(y) - \varphi_i(y)|$$

$$\leq 2\varepsilon + |\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| .$$

Como cada φ_i es uniformemente continua, para cada i existe un δ_i tal que $|x - y| < \delta_i$; implica que $|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \varepsilon$. Si $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ y $|x - y| < \delta$ entonces para todo i, $|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \varepsilon$; por lo tanto $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$. Así U es equicontinuo.

$(\Leftarrow)$ En el otro sentido, se U equi-acotado y equicontinuo. Demostraremos que U es relativamente compacto. Sea $G = [a, b]$, como G es un subconjunto compacto de un espacio normado X; existe una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathrm{N}}$ de puntos de G, densos en G.

Sea $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ una sucesión en U. La sucesión de puntos de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $\{\varphi_n(x_1)\}_{n\in N}$ es acotada ya que $|\varphi_n(x_1)| \leq \|\varphi_n\|_\infty \leq M$ y por teorema de Bolzano-Weirstrass se puede extraer una subsucesión convergente, denótese como $\{\varphi_{1,n}(x_1)\}_{n\in N}$ o sea $\varphi_{1,1}(x_1), \varphi_{1,2}(x_1), \varphi_{1,3}(x_1), \ldots, \varphi_{1,n}(x_1), \ldots$; donde $\lim_{n\to\infty} \varphi_{1,n}(x_1) = \varphi(x_1)$

La sucesión $\{\varphi_{1,n}(x_2)\}_{n\in N}$ es acotada ya que $|\varphi_{1,n}(x_2)| \leq \|\varphi_n\|_\infty \leq M$ y por el teorema de Bolzano-Weirstrass se puede extraer un subsucesión convergente, denótese como $\{\varphi_{2,n}(x_2)\}_{n\in N}$ o sea $\varphi_{2,1}(x_2), \varphi_{2,2}(x_2), \varphi_{2,3}(x_2), \ldots, \varphi_{2,n}(x_2), \ldots$; con $\lim_{n\to\infty} \varphi_{2,n}(x_2) = \varphi(x_2)$ y así procedemos sucesivamente. Pero $\{\varphi_{2,n}(x_1)\}_{n\in N}$ también converge y su límite es $\varphi(x_1)$ ya que $\{\varphi_{2,n}(x_1)\}_{n\in N}$ es una subsucesión de $\{\varphi_{1,n}(x_1)\}_{n\in N}$; pues si una subsucesión converge su subsucesión también converge y al mismo límite.

De esta forma se ha creado un proceso de diagonalización en la que puedo extraer un subsucesión de $\{\varphi_n(x_i)\}_{i,n\in N}$. Hacia allá encaminamos nuestro esfuerzo.

$$\varphi_{1,1}(x_1), \varphi_{1,2}(x_1), \varphi_{1,3}(x_1), \ldots, \varphi_{1,n}(x_1), \ldots \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_{1,n}(x_1) = \varphi(x_1)$$

$$\varphi_{2,1}(x_2), \varphi_{2,2}(x_2), \varphi_{2,3}(x_2), \ldots, \varphi_{2,n}(x_2), \ldots \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_{2,n}(x_2) = \varphi(x_2)$$

$$\varphi_{3,1}(x_3), \varphi_{3,2}(x_3), \varphi_{3,3}(x_3), \ldots, \varphi_{3,n}(x_3), \ldots \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_{3,n}(x_3) = \varphi(x_3)$$

$$\varphi_{n,1}(x_n), \varphi_{n,2}(x_n), \varphi_{n,3}(x_n), \ldots, \varphi_{n,n}(x_n), \ldots \quad \text{con} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_{n,n}(x_n) = \varphi(x_n)$$

Consideremos la subsucesión $\{\varphi_{n,n}\}_{n\in\mathrm{N}}$. Para cada i, $\varphi_{n,n}(x_i)\to\varphi(x_i)$. Demostraremos que $\{\varphi_{n,n}\}_{n\in\mathrm{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C[a,b]=C(G)$.

Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para todo $\varphi\in U$ si $|x-y|<\delta$ entonces $|\varphi(x)-\varphi(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$ pues U es equicontinuo. Como $\{x_i\}$ es denso en G y G es compacto, existe i_0 tal que $G\subseteq\bigcup_{i=1}^{i_0}B(x_i,\delta)$.

Sea $x\in G$ entonces para cada i, $1\leq i\leq i_0$

$$|\varphi_{n,n}(x)-\varphi_{m,m}(x)|\leq|\varphi_{n,n}(x)-\varphi_{n,n}(x_i)|+|\varphi_{n,n}(x_i)-\varphi_{m,m}(x_i)|+|\varphi_{m,m}(x_i)-\varphi(x)|$$

$\leq\frac{2}{3}\varepsilon+|\varphi_{n,n}(x_i)-\varphi_{m,m}(x_i)|$ para cada i, N_i: $n,m\geq N_i$. Entonces $|\varphi_{n,n}(x_i)-\varphi_{m,m}(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$, tomemos $N=\max\{N_1,N_2,\ldots,N_{i_0}\}$ si $n,m\geq N$.

Así $|\varphi_{n,n}(x)-\varphi_{m,m}(x)|<\varepsilon$ por lo tanto $\|\varphi_{n,n}(x)-\varphi_{m,m}(x)\|_\infty\to 0$. Como el espacio es completo la sucesión $\{\varphi_{n,n}\}_{n\in\mathrm{N}}$ converge, con lo cual U es relativamente compacto. ■

2.3.3. Observación.

Sea $C(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones de dominio $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$) continuas, convergentes a cero al infinito[8] y con la norma $\|f\| = \max_{x\in \bar{x}} |f(x)|$.

$C(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach. (Si $\{f_n\}_{n\in N}$ es una sucesión de Cauchy en $C(\mathbb{R})$ que converge a una función f, la cual es continua de

$$|f_m(x)| \leq |f_m(x) - f_n(x) + f_n(x)|$$

$$|f_m(x)| \leq |f_m - f_n| + |f_n(x)|$$

$$|f_m(x)| \leq \varepsilon + |f_n(x)| \text{ para } m, n > n(\varepsilon)$$

pasando a límite para $m \to \in$ se tiene que $|f(x)| < \varepsilon + |f_n(x)| \quad \forall n > n(\varepsilon)$ y $\forall x \in \mathbb{R}$.

Fijamos $n > n(\varepsilon)$ entonces $|f_n(x)| < \varepsilon$ para $|x| > \delta(\varepsilon)$ y luego $|f(x)| < 2\varepsilon$ para $|x| > \delta(\varepsilon)$); por esto $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2.3.4. Proposición.

Un subconjunto $\mathscr{F}$ de $C(\mathbb{R})$ es relativamente compacto si y solo si es un conjunto de funciones equi-acotado, equicontinuo y convergentes uniformemente a cero al infinito.

Demostración:

En efecto, dado que $C(\mathbb{R})$ es completo, $\mathscr{F}$ es relativamente compacto si y solo si es totalmente acotado entonces es acotado y por lo tanto existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|f\| < M$,

---

[8] O sea $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$\forall f \in \mathscr{F}$; además, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe un subconjunto finito de $\mathscr{F}$.

Sea $\{f_1,...,f_n\}$ ε-denso en $\mathscr{F}$ entonces existe $f_j \in \{f_1,...,f_n\}$ tal que $\|f - f_j\| < \varepsilon$. Sea $|f_j(x)| < \varepsilon$ para $|x| > M_j(\varepsilon)$; puesto que $M(\varepsilon) = \max\{M_1(\varepsilon),...,M_n(\varepsilon)\}$ se tiene que $|f(x)| \le \|f - f_j\| + |f_j(x)| < 2\varepsilon$ para $|x| > M(\varepsilon)$, por lo tanto $\mathscr{F}$ es un conjunto de funciones uniformemente convergentes a cero al infinito.

Finalmente $|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f_j(x')| + |f_j(x') - f_j(x'')| + |f_j(x'') - f(x'')|$

$$|f(x') - f(x'')| \le 2\|f - f_j\| + |f_j(x') - f_j(x'')|$$

en $[-M(\varepsilon), M(\varepsilon)]$ la función f_j es uniformemente continua. Así, existe $\delta_j(\varepsilon)$ tal que $|f_j(x') - f_j(x'')| < \varepsilon$ para $x', x'' \in [-M(\varepsilon), M(\varepsilon)]$ con $|x' - x''| < \delta_j(\varepsilon)$.

Sea $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon),...,\delta_2(\varepsilon)\}$. Ahora, si $x', x'' \in [-M(\varepsilon), M(\varepsilon)]$ y $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ resulta que $|f(x') - f(x'')| < 3\varepsilon$.

Si por ejemplo $x' < -M(\varepsilon)$ y $x'' \in [-M(\varepsilon), M(\varepsilon)]$, $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$; ahora $|f_j(x') - f_j(x'')| \le |f_j(x') - f_j(-M(\varepsilon)| + |f_j(-M(\varepsilon)) - f_j(x'')| < 3\varepsilon$ y por lo tanto tenemos que $|f(x') - f(x'')| < 5\varepsilon$.

Para terminar si $x',x''<-M(\varepsilon)$ entonces $|f_j(x')-f_j(x'')|\leq|f_j(x')|+|f_j(x'')|$ y por lo tanto $|f(x')-f(x'')|<4\varepsilon$ de donde $|f(x')-f(x'')|<5\varepsilon$ $\forall x',x''\in\mathbb{R}$, con $|x'-x''|<\delta(\varepsilon)$. Luego hemos probado que $\mathscr{F}$ es un conjunto de funciones equicontinuas. ■

2.3.5. Teorema (Riesz-Kolmogorov).

Sea $1\leq p<+\infty$. Un subconjunto $\mathscr{F}$ de $L^p(\mathbb{R})$ es relativamente compacto si y sólo si:

1. $\displaystyle\sup_{f\in\mathscr{F}}\|f\|_p<+\infty$
2. $\displaystyle\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)|^p dx=0$ uniformemente respecto a $f\in\mathscr{F}$.
3. $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\int_{|x|>M}|f(x)|^p dx=0$ uniformemente respecto a $f\in\mathscr{F}$.

Demostración:

$L^p(\mathbb{R})$ es completo para $1<p<+\infty$, $\mathscr{F}$ es relativamente compacto si y solo si es totalmente acotado. Luego para todo $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ existe un subconjunto finito $F=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ de $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(f_i,\varepsilon)$. Por esto si $f\in\mathscr{F}$, $\|f\|_p\leq\|f_i\|_p+\varepsilon$ par un i, por lo tanto $\|f\|\leq M$ si $M=\max\|f_i\|_p+\varepsilon$, con lo cual se prueba (1).

Fijemos $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sea $\{f_1,\dots,f_n\} \subset \mathscr{F}$ ε-denso en $\mathscr{F}$, $M_j \in \mathbb{R}^+$ tal que $\left(\int_{|x|>M_j} |f_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, $j = 1,2,\dots,n$.

Supongamos que $M = \max\{M_1,\dots M_n\}$. Sea $f \in \mathscr{F}$, luego existe $f_j \in \{f_1,\dots,f_n\}$ tal que $\|f - f_j\|_p < \varepsilon$; ahora por la desigualdad de Minkowski se tiene:

$$\left(\int_{|x|>M} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{|x|>M} |f(x) - f_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>M} |f_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_{|x|>M} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f - f_j\|_p + \left(\int_{|x|>M} |f_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon .$$

De allí es válido (3).

Además, por la continuidad en media en $L^p(\mathbb{R})$ existe $\delta_j(\varepsilon)$ tal que si $|y| > \delta_j(\varepsilon)$ entonces $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_j(x+y) - f_j(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ con $j = 1,2,\dots,n$ y luego si $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon),\dots,\delta_n(\varepsilon)\}$ se tiene para $|y| > \delta(\varepsilon)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f_j(x+y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}} |f_j(x+y) - f_j(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f_j(x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 2\|f - f_j\|_p + \varepsilon$$

$< 3\varepsilon$. Esto prueba el punto (2).

Inversamente, supongamos que es válido (1), (2) y (3). Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y pongamos que $\mathcal{M}_a(f)(x) = \dfrac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f(x+y)dy$, $x \in \mathbb{R}$.

Sea $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ entonces por la desigualdad de Holder y considerando el teorema de Tonelli y Fubini se tiene que

$$\|M_a(f) - f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \left(f(x+y) - f(x) \right) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|M_a(f) - f\|_p \leq \frac{1}{2a} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int |f(x+y) - f(x)|^p dy \right) (2a)^{\frac{p}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|M_a(f) - f\|_p = \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \left(\int |f(x+y) - f(x)|^p dx \right) dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|M_a(f) - f\|_p \leq \sup_{|y| \leq a} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Por lo tanto, en virtud de (2) resulta que $\|M_a(f)-f\|_p \underset{a\to 0+}{\to} 0$ uniformemente respecto a $f \in \mathscr{F}$. Fijamos ahora $a \in \mathbb{R}^+$ y pongamos $\mathscr{F}_a = \{\mathscr{M}_a(f), f \in \mathscr{F}\}$. Resulta entonces que:

$$| \mathscr{M}_a(f)(x) | \le \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} |f(x+y)|dy$$

$$| \mathscr{M}_a(f)(x) | \le \frac{1}{2a}\left(\int_{-a}^{a} |f(x+y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} (2a)^{\frac{1}{p'}}$$

$$| \mathscr{M}_a(f)(x) | = \frac{1}{(2a)^{\frac{1}{p}}}\|f\|_p.$$

Luego $\mathscr{F}_a$ es un conjunto de funciones equiacotadas.

Resulta que: $$|\mathscr{M}_a(f)(x')-\mathscr{M}_a(f)(x'')| \le \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} |f(x'+y)-f(x''+y)|dy$$

$$|\mathscr{M}_a(f)(x')-\mathscr{M}_a(f)(x'')| \le \frac{1}{2a}\left(\int_{-a}^{a} |f(x'+y)-f(x''+y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} (2a)^{\frac{1}{p'}}$$

$$|\mathscr{M}_a(f)(x')-\mathscr{M}_a(f)(x'')| \le \frac{1}{2a}\left(\int_{-a}^{a} |f(x''-x'+t)-f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Por lo tanto $\mathscr{F}_a$ es un conjunto de funciones equicontinuas.

Ahora, fijamos un número arbitrario δ>0; por el teorema de Arzelá-Ascoli el conjunto de las funciones $\mathscr{M}_a(f) / [-\delta,\delta]$ es relativamente compacto en $C[-\delta,\delta]$; luego fijamos $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrario, entonces existe un subconjunto finito $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ de $\mathscr{F}$ tal que para toda $f \in \mathscr{F}$ existe $f_j \in \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ tal que $\underset{|x|\le\delta}{Sup} \left| \mathcal{M}_a(f)(x) - \mathcal{M}_a(f_1)(x) \right| < \varepsilon$.

Ahora

$$\| \mathcal{M}_a(f) - \mathcal{M}_a(f_j) \|_p^p \le \int_{-\delta}^{\delta} | \mathcal{M}_a(f)(x) - \mathcal{M}_a(f_j)(x) |^p dx +$$

$$\int_{|x|>\delta} | \mathcal{M}_a(f)(x) - \mathcal{M}_a(f_j)(x) |^p dx$$

$$\| \mathcal{M}_a(f) - \mathcal{M}_a(f_j) \|_p^p \le 2\delta - \varepsilon^p + \int_{|x|>\delta} | \mathcal{M}_a(f)(x) - \mathcal{M}_a(f_j)(x) |^p dx$$

La última integral del último miembro se acota con

$$\left(\| \mathcal{M}_a(f) - f \|_p + \left(\int_{|x|>\delta} |f(x) - f_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>\delta} |f_j(x) - \mathcal{M}_a(f_j)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p .$$

Así existe $a_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\| \mathcal{M}_a(f) - f \|_p < \varepsilon$ para $0 < a \le a_\varepsilon$.

$$\left(\int_{|x|>p} |f(x) - f_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{|x|>\delta} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>\delta} |f_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \text{ si } \delta > \delta(\varepsilon) \text{ por (3).}$$

Ahora, fijamos $a \le a_\varepsilon$ y resulta que:

$$\left(\int_{|x|>\delta} |f_j(x) - \mathcal{M}_a(f_j)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{|x|>\delta} |f_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>\delta} | \mathcal{M}_a(f_j)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon \text{ para}$$

$\delta > \delta'(\varepsilon)$.

Esto prueba que el conjunto $\{\mathcal{M}_a(f_j);\quad j=1,2,...,n\}$ es ε-denso en $\mathcal{F}_a$ de cualquier modo si se fija $a\in\mathbb{R}^+$ suficientemente pequeño.

Por otra parte $\| \mathcal{M}_a(f)-f\|_p \underset{a\to 0+}{\longrightarrow} 0$ uniformemente respecto a $f\in\mathcal{F}$. Esto asegura que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto. ■

Observemos que el teorema ahora demostrado es válido aunque $L^p(\mathbb{R})$ sea sustituido por $L^p(A)$ para cualquier subconjunto A L-medible de $\mathbb{R}^n$.

2.4. Compacidad en Espacios de Banach que tienen una Base de Schauder.

En un espacio de Banach dotado de una base de Schauder se dan condiciones necesarias y suficientes de compacidad relativa. En general una condición suficiente es que el conjunto sea totalmente acotado, así las condiciones que aseguran el acotamiento total son condiciones suficientes de compacidad relativa.

Es necesario señalar que en la definición de conjunto totalmente acotado se puede sustituir las vecindades de los puntos del conjunto por vecindades de puntos que no pertenecen al conjunto, lo importante es que el recubrimiento se pueda hacer con conjuntos de diámetro arbitrariamente pequeño

2.4.1. Definición: (Base de Schauder).

Si un espacio normado X contiene una sucesión de puntos $\{e_n\}$ con la propiedad que para todo $x \in X$ hay una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}$ tal que $\|x-(\alpha e_1+\alpha e_2+...+\alpha e_n)\| \to 0$ (con $n \to \infty$) entonces $\{e_n\}$ es una base de Schauder de X. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ que tiene suma x se llama la expansión de x respecto a $\{e_n\}$ y se escribe $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$

2.4.2. Proposición.

Sea X un espacio de Banach dotado de una base Schauder $\{e_n\}_{n \in \mathrm{N}}$, $K \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si:

1- K es acotado.

2- $\forall \varepsilon > 0$; $\exists n(\varepsilon) \in \mathrm{N}$ tal que si $n \geq n(\varepsilon)$ entonces $\underset{x \in K}{Sup} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k e_k \right\| < \varepsilon$ donde $\sum_{n} \xi_n e_n$ es la representación de x en la base de Schauder.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Sea $K \subset X$ relativamente compacto, donde X tiene una base de Schauder. Por proposición 1.2.14. K es totalmente acotado.

Dado ε = 1 existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k, 1)$. Sea h el máximo de $\|x_i - x_j\|$ para $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$. Ahora, escojo $x, y \in A$ cualquiera, por lo tanto $x \in N(x_1, 1)$, $y \in N(x_j, 1)$; para ciertos i, j.

Luego $\|x - y\| \le \|x - x_i\| + \|y - x_i\| \le \|x - x_i\| + \|y - x_j\| + \|x_i - x_j\| < 2 + h$. Así K es acotado.

Dado $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \ldots, x_p \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{h=1}^{p} B(x_h, \varepsilon)$. Sea $x \in K$, entonces $x \in B(x_{h'}, \varepsilon)$ donde $h' \in \{1, 2, \ldots, p\}$ es decir que $\|x - x_{h'}\| < \varepsilon$.

Por otra parte, existe $n_0(\varepsilon)$ tal que si $n \ge n(\varepsilon)$ $\left\|\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^h e_k - x_h\right\| < \varepsilon$ para $h = 1, 2, \ldots, p$.

Entonces si $n \ge n(\varepsilon)$ $\sum_{k=n}^{\infty} \xi_k e_k = x - \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k e_k$

$\sum_{k=n}^{\infty} \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^{h'} e_k - \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k e_k + x_{h'} - \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^{h'} e_k + x - x_{h'}$ por lo tanto

$\left\|\sum_{k=n}^{\infty} \xi_k e_k\right\| \le \|P_{n-1}(x_h) - P_{n-1}(x)\| + \varepsilon + \varepsilon \le (M + 2)\varepsilon$ para una oportuna constante positiva M[9]; esto asegura que se cumpla la segunda condición.

[9] $M > 0$ tal que para todo n $\|P_n(x)\| \le M\|x\|$, véase la proposición 4.1.14 de Megginson

Note que para obtener ε en la desigualdad, se parte de $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{M+2} > 0$.

($\Leftarrow$) Primero observe que el vector que aparece en la norma en (2) es precisamente $x - \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k e_k$. Por esto si $L > 0$ es una cota de $\|x\|$ en K, además si tomo ε > 0 y n como un número natural oportuno tal que $n = \max\{n(\varepsilon), n(1)\}$ entonces resulta que para todo $x \in K$, $\left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right\| \leq L+1$.

Si Φ es el cuerpo de los escalares, se considera la base usual de Φ^n y la norma $\|(\xi_1,\ldots,\xi_n)\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right\|$. La bola cerrada de centro el origen y radio $L+1$ en Φ^n es compacta (por ser de dimensión finita el espacio). La aplicación de Φ^n en X definida por $(\xi_1,\ldots,\xi_n) \to \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ es continua; por lo tanto su imagen $K_n = \{ x \in K / x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \}$ también es compacta.

Dado ε > 0, sean $x^l,\ldots,x^m \in K_n$ tales que $K_n \subset \bigcup_{l=1}^{m} B(x^l, \varepsilon)$. Entonces si $x \in K$, como $\left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right\| \leq L+1$ también $\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in K_n$ y por lo tanto para un índice $1 \leq 1 < m$, $\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \in B(x^l, \varepsilon)$. Pues bien $\|x - x^l\| \leq \left\|x - \sum_{l=1}^{n} \xi_l e_l\right\| + \left\|x' - \sum_{l=1}^{n} \xi_l e_l\right\| < 2\varepsilon$.

Esto asegura que $K \subset \bigcup_{l=1}^{m} B(x^l, 2\varepsilon)$ y por la arbitrariedad de ε se concluye que K es relativamente compacto. ■

2.4.3. Ejemplos de Espacios de Banach con Base de Schauder.

Durante mucho tiempo se pensó que todo espacio de Banach separable X poseía una base de Schauder hasta que Per Enflo demostró lo contrario. Lo cierto es que todo espacio de Banach con base de Schauder es Separable.

A continuación presentamos algunos ejemplos de espacios de Banach que poseen base de Schauder.

1. **Espacios de Hilbert Separables.**

Un espacio de Hilbert es llamado separable si contiene una sucesión completa ortonormal. Es decir, todo elemento de x en el espacio de Hilbert puede ser representado por $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, x_n) X_n$ con $\{x_n\}$ ortonormal completo.

Como ejemplos de espacios de Hilbert Separables podemos mencionar el espacio $L^2([-\pi, \pi])$ y el espacio L^2.

2. Base de Schauder de $C[a,b]$.

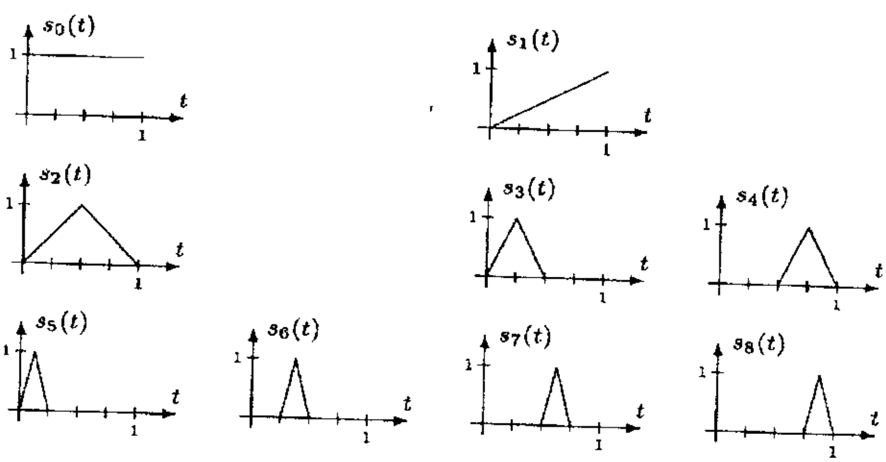
En $C[0,1]$ se define $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ de la siguiente manera:

$s_0(t) = 1$ $\quad\quad$ $s_1(t) = t$ $\quad\quad$ Si $n \geq 2$ y para $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $2^{m-1} < n \leq 2^m$

$$s_n(t) = \begin{cases} 2^m\left(t - \left(\dfrac{2n-2}{2^m} - 1\right)\right) & \text{si } \dfrac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \dfrac{2n-1}{2^m} - 1 \\[2ex] 1 - 2^m\left(t - \left(\dfrac{2n-1}{2^m} - 1\right)\right) & \text{si } \dfrac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \dfrac{2n}{2^m} - 1 \\[2ex] 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Fig. 1. Términos de la clásica base de Schauder.

La siguiente gráfica ilustra el comportamiento de s_n, o sea los primeros términos de la clásica base de Schauder para $C[0,1]$



Sea $f \in C[0,1]$. Definimos $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ en $C[0,1]$ así:

$$p_0 = f(0)s_0$$

$$p_1 = p_0 + (f(1) - p_0(1))s_1$$

$$p_2 = p_1 + (f(\frac{1}{2}) - p_1(\frac{1}{2}))s_2$$

$$p_3 = p_2 + (f(\frac{1}{4}) - p_2(\frac{1}{4}))s_3$$

$$p_4 = p_3 + (f(\frac{3}{4}) - p_3(\frac{3}{4}))s_4$$

$$p_5 = p_4 + (f(\frac{1}{8}) - p_4(\frac{1}{8}))s_5$$

$$p_6 = p_5 + (f(\frac{3}{8}) - p_5(\frac{3}{8}))s_6$$

$$p_7 = p_6 + (f(\frac{5}{8}) - p_6(\frac{5}{8}))s_7$$

$$p_8 = p_7 + (f(\frac{7}{8}) - p_7(\frac{7}{8}))s_8 ;$$ así sucesivamente.

Entonces p_0 es la función constante que coincide con f en 0, mientras que p_1 coincide con f en 0 y 1 e interpola linealmente entre ellos, p_2 coincide con f en 0, 1 y ½ e interpola linealmente entre ellos y así sucesivamente; es decir que las p_n son poligonales sobre los puntos de abcisa de la forma $\frac{m}{2^n}$, $1 \leq m \leq 2^n$, apoyados en la gráfica de la función f.

Para cada entero no negativo no negativo n, sea α_n el coeficiente de s_n en la fórmula p_n. Entonces $p_m = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n s_n$ para cada m.

Por la continuidad uniforme de f se tiene que $\lim_m \|p_m - f\|_\infty = 0$ y por lo tanto $f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n s_n$.

Ahora sea $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión cualquiera de escalares tales que $f = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n s_n$.

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) s_n = 0$ de allí $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) s_n(t) = 0$ donde $t = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \ldots$ Así $\alpha_n = \beta_n$ para cada n. Por lo tanto existe una única sucesión $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ de escalares tales que $f = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n s_n$ y así la sucesión $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una base para $C[0,1]$.

2.4.3.1. Teorema.

Sea una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio de Banach X tal que:

(1) $x_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

(2) Existe M tal que $\left\| \sum_{n=1}^{m_1} \alpha_n x_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n=1}^{m_2} \alpha_n x_n \right\|$ con $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$; $m_1 \leq m_2$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_2} \in F$.

(3) $[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}] = X$.

Entonces $\{x_n\}$ es una base de Schauder de X.

Demostración:

Sea $\{x_n\}$ una secesión que satisface (1), (2) y (3). $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ sucesiones de escalares tales que $\sum_n \beta_n x_n$ y $\sum_n \gamma_n x_n$ convergen al mismo límite, por lo que pasando al límite resulta por (2) $|\beta_1 - \gamma_1| \|x_1\| \leq M \left\| \sum_n \beta_n x_n - \sum_n \gamma_n x_n \right\|$ y $\beta_1 = \gamma_1$. De esto se sigue por inducción que $\beta_n = \gamma_n$, para cada entero positivo n. Así, para $x \in X$ existe a lo sumo una sucesión $\{\alpha_n\}$ de escalares tales que $x = \sum_n \alpha_n x_n$.

Para cada entero positivo m y cada sucesión finita no nula de escalares, sea $p_m(\sum_n \alpha_n x) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n$; de (2) se sigue que cada p_m es un operador lineal acotado para $\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ sobre $\langle\{x_1,...,x_m\}\rangle$ teniendo una norma no mayor que M. p_n tiene una extensión lineal acotada P_m de X sobre $\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ con norma no mayor que M [10].

Para cada $x \in X$, $y \in \langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$\|P_m x - x\| \leq \|P_m x - P_m y\| + \|P_m y - y\| + \|y - x\|$$

$$\|P_m x - x\| \leq (M+1)\|x - y\| + \|P_m y - y\|$$

Escogiendo m finito o infinito se demuestra que $\lim Sup_m \|P_m x - x\| \leq (M+1)\|x - y\|$ para cualquier $x \in X$, $y \in \langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$. Como y es un elemento arbitrario de un

[10] Para más detalles ver Teorema 1.1.9 de An Introduction to Banach Space Theory. Robert E. Meggison.

subconjunto denso de X, entonces $\lim Sup_m \|P_m x - x\| = 0$ cualquiera que sea $x \in X$, esto es, $\lim_m P_m x = x$ para cada x en X.

Fíjese x en X y sea α_1 tal que $P_1 x = \alpha_1 x_1$. Ahora $P_1 P_2 y = P_1 y$ para cualquier y en el subconjunto denso $\langle\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ de X. Así $P_1 P_2 = P_1$. Por lo tanto, existe un α_2 tal que $P_2 x = \sum_{n=1}^{2} \alpha_n x_n$. Precediendo por inducción se obtiene la sucesión de escalares $\{\alpha_n\}$ tal que $P_m x = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n$ para cada m, así $x = \lim_m P_m x = \sum_n \alpha_n x_n$. ■

3. Base de Haar para $L_p[0,1]$.

Sea $1 < p < \infty$. Se define la sucesión $\{h_n\}$ en $L_p[0,1]$ como sigue:

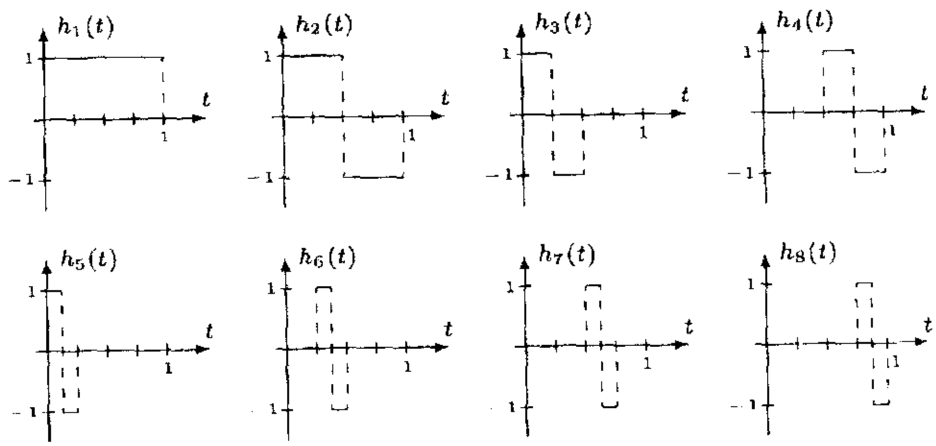
$h_1 = 1$ en $[0,1)$

$h_1 = 0$ en 1

$$h_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{2n-2}{2^m} - 1 \le t < \dfrac{2n-1}{2^m} - 1 \\ -1 & \text{si } \dfrac{2n-1}{2^m} - 1 \le t < \dfrac{2n}{2^m} - 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro lado;} \quad \text{para } n \ge 2,\ m \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } 2^{m-1} < n \le 2^m \end{cases}$$

Fig. 2: Términos de la base de Haar.

La siguiente gráfica ilustra el comportamiento de h_n; es decir, los primeros términos de la base de Haar para $L_p[0,1]$.



Observe que h_n es un múltiplo positivo de la derivada del correspondiente S_n en la base de Schauder de $[0,1]$.

Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de escalares, n_0 y m_0 enteros positivos tales que $n_0 \geq 2$ y $2^{m_0-1} < n_0 \leq 2^{m_0}$. Además, I_1 y I_2 son los respectivos intervalos $\left[\frac{2n_0-2}{2^{m_0}}-1, \frac{2n_0-1}{2^{m_0}}-1\right)$ y $\left[\frac{2n_0-1}{2^{m_0}}-1, \frac{2n_0}{2^{m_0}}-1\right)$. Sea α el valor constante de $\sum_{n=1}^{n_0-1} \alpha_n h_n$ en $I_1 \cup I_2$. Por medio de cálculos elementales se muestra que $s^p + t^p - 2\left(\frac{(s+t)}{2}\right)^p \geq 0$, donde $s,t \geq 0$ por lo cual se tiene que:

$$\int_{[0,1]}\left|\sum_{n=1}^{n_0}\alpha_n h_n\right|^p - \int_{[0,1]}\left|\sum_{n=1}^{n_0-1}\alpha_n h_n\right|^p = \int_{I_1}\left|\alpha+\alpha_{n_0}\right|^p + \int_{I_2}\left|\alpha-\alpha_{n_0}\right|^p - \int_{I_1\cup I_2}\left|\alpha\right|^p$$

$$\int_{[0,1]}\left|\sum_{n=1}^{n_0}\alpha_n h_n\right|^p - \int_{[0,1]}\left|\sum_{n=1}^{n_0-1}\alpha_n h_n\right|^p = \frac{\left|\alpha+\alpha_{n_0}\right|^p + \left|\alpha-\alpha_{n_0}\right|^p - 2\left|\alpha\right|^p}{2^{m_0}} \geq 0$$

Por lo tanto $\left\|\sum_{n=1}^{n_0-1}\alpha_n h_n\right\|_p \leq \left\|\sum_{n=1}^{n_0}\alpha_n h_n\right\|_p$ y así $\left\|\sum_{n=1}^{m_1}\alpha_n h_n\right\|_p \leq \left\|\sum_{n=1}^{m_2}\alpha_n h_n\right\|_p$ para cualesquiera $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ y $m_1 \leq m_2$.

$\langle\{h_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ contiene la función indicador de todo intervalo diádico $\left[\frac{n-1}{2^m}, \frac{n}{2^m}\right)$; $1 \leq n \leq 2^m$; o esa, que las funciones características de los conjuntos diádicos $\left[\frac{n-1}{2^m}, \frac{n}{2^m}\right)$; $1 \leq n \leq 2^m$ pertenecen al espacio generado por las funciones de Haar $\langle\{h_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$. Lo cual se prueba por inducción. Observe que $\chi_{[0,1)} = h_1$; también pertenecen a $\langle\{h_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$ las características de los conjuntos diádicos $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ pues $\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)} = \frac{\chi_{[0,1)}+h_2}{2}$ y $\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right)} = \frac{\chi_{[0,1)}-h_2}{2}$ (1) (lo que constituye el paso crucial en la demostración).

Supóngase, en efecto, que todos los conjuntos diádicos hasta el orden m pertenecen a $\langle\{h_n : n \in \mathbb{N}\}\rangle$. Los conjuntos diádicos de orden $m+1$ se obtienen dividiendo por el punto medio los anteriores, así a partir de $\left[\frac{n-1}{2^m},\frac{n}{2^m}\right)$; donde $1 \le n \le 2^m$ es posible determinar $k \in \mathbb{N} : 2^m < k \le 2^{m+1}$ tal que:

$$\chi_{\left[\frac{n-1}{2^m},\frac{2n-1}{2^{m+1}}\right)} = \frac{\chi_{\left[\frac{n-1}{2^m},\frac{n}{2^m}\right)}+h_k}{2} \qquad \chi_{\left[\frac{2n-1}{2^{m+1}},\frac{n}{2^m}\right)} = \frac{\chi_{\left[\frac{n-1}{2^m},\frac{n}{2^m}\right)}-h_k}{2} \tag{2}$$

donde $k = n + 2^m$. Tomando todos los posibles valores de n se obtienen los 2^{m+1} conjuntos diádicos de la forma $\left[\frac{n-1}{2^{m-1}},\frac{n}{2^{m+1}}\right)$; $1 \le n \le 2^{m+1}$.

Esto muestra que $L_p[0,1] = \left[\{h_n : n \in \mathbb{N}\}\right]$, pues el espacio generado por las características de los conjuntos diádicos es denso en L^p. Como cada $h_n \neq 0$ por el teorema anterior $\{h_n\}$ es base para $L_p[0,1]$.

CONCLUSIONES

- Los Espacios de Banach son espacios vectoriales topológicos, por esto es de esperarse que algunos resultados sean extensibles a éstos. Sin embargo hay que tener en cuenta que además son localmente convexos.

- En los espacios topológicos localmente convexos el Lema de Mazur es válido, pero sólo para caracterizar los conjuntos totalmente acotados.

- Los Teoremas de Ascoli-Arzelà y de Riesz-Kolmogorov sugieren que cuando los puntos del espacio tienen propiedades especiales, los compactos serán conjuntos cuyos elementos tienen estas propiedades de manera uniforme; pero nuestra investigación progresó en este sentido sólo en el caso de los espacios dotados de una Base de Schauder.

BIBLIOGRAFÌA

BACHEAN, George and NIRICI Lawrence. 1972. Funtional Analysis Academic. Press, Inc. United Status of American. 530 págs.

DEBNATH, Lokenath and MIKUSI'NSKI Piort. 1990. Introduction to Hilbert Space with Applications. Academic Press, Inc. United States of America. 509 págs.

IRIBARREN, Ignacio. 1987. Topología de Espacios Métricos. Editorial Limusa. Méxic. 253 págs.

KOLMOGOROV, A. N. and FOMIN. Elements of the Theory of Functions an Funcional Análisis. Vol. I.

MEGGINSON, Robert E. 1998. An Introduction to Banach Space Theory. Springer-Verlag New York, Inc. 596 págs..

PINI, Bruno. 1972. Secondo Corso di Analisi Matematica. I Parte. Cooperativa Libraría Universitaria. Bologna.

PINI, Bruno. 1978. Terzo Corso di Analisi Matematica. II Parte. Cooperativa Libraría Universitaria. Bologna.

RUBIANO O., Gustavo N. 1997. Topología General. Impreso en la Sección de Publicaciones de la Facultad de Ciencias, Departamento de Física, Matemática y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia. 181 págs.

RUDIN, Walter. 1966. Real and Complex Analysis. Segunda Edition, TMH. Mc Graw-Hill. New Delhi.

RUDIN, Walter. 1977. Functional Analysis. Mc Graw-Hill. New . 397 págs.

SIMMONS, G.F. Introduction to Topology and Moderm Analysis. International Student Edition. Mc. Grw-Hill. 372 págs.

WILLARD, Stephen. 1970. General topology. Addison-Wesley Publishing Company. United Status of America. 369 págs.

http://cursos.itam.mx/an2/pdf/apun3.pdf.

http://www.sectormatematica.c//librosmat/topología.padf.

http://www.branchingature.org/Topología-General-Dario-Sanchez.pdf.

http://mathwarld.world.wolfram.com

arxiv:mat.FA/9602208v129Feb1996

http://www.math.niv.edu/ Rusia/known-math//99/schauder

http://www.,ath.niu.edu/rusin/known-math/96/schauder.