UNIVERSIDAD DE PANAMA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

SUCESIONES ÓPTIMAS DE FASE

Por

IRIS MARINA JIMENEZ HIDALGO

Tesis presentada como uno de los requisitos para optar por el grado de Maestro en Ciencias con enfasis en Investigación de Operaciones

Panama, Republica de Panamá

2011

Vıcerrectorıa de Investıgacıon y Postgrado

Facultad de Cıencıas Naturales Exactas y Tecnologıa
Programa de Maestrıa en Matematıca

TESIS
Sometıda para optar al tıtulo de Maestrıa en Matematıca
con Opcıon en Investıgacıon de Operacıones

ı estudıante **Irıs Marına Jımenez H Cedula N° 8 222 2081**

Tıtulo de la Tesıs

Sucesıones Optımas de Fase

OBADO POR

Doctor Jose del Rosario Garrido
Presidente

Manuela Fost Vega

Doctora Manuela Foster Vega
Miembro

José del C. Murillo J.

Magister Jose Murillo
Miembro

RENDADO POR

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

HA 22/06/2011

DEDICATORIA

Todos somos protagonistas de nuestra propia vida y a menudo los heroes anonimos dejan las marcas mas profundas Coelho

Dedico este trabajo a mis heroes mi familia a mis padres Dora y Juan Jose quienes fueron una fuente de fortaleza y de amor que me brindaron su apoyo en todo momento

A mis hermanos Giovanna y Juan Jose y a mi sobrina Iris Cristina por producir a mi alrededor energia positiva

Iris Marina

AGRADECIMIENTO

Los mejores aliados son aquellos que no piensan como la mayoria de la gente Por eso al buscar compañeros para compartir el entusiasmo por el sueño es importante creer en la intuicion y no dar importancia a los comentarios ajenos

Coelho

Quiero a traves de estas paginas plasmar mi agradecimiento infinito al Dr Jose del Rosario Garrido director de este trabajo que siempre creyo en mi y nunca dejo que me rindiera

Por sus consejos su juicio critico su profesionalismo y sobre todo por su perseverancia

Gracias por compartir este sueño

A mis profesores y compañeros de estudio en especial a Lulu por ser insistente buena compañera y sobre todo por solidarizarse en la realizacion de este reto profesional

A mis compañeras Gladys y Guadalupe por su apoyo y comprension lo que nos llevo a que juntas lograramos culminar exitosamente este sueño

A mis amigos Maria Luisa y Saul por ser unicos quienes me alentaron a no perder de vista el horizonte de mis metas

A todas aquellas personas que en forma directa e indirecta han contribuido a que este trabajo vea la luz

CONTENIDO

Pagina

Resumen

Muchos de los problemas encontrados en las actividades practicas pueden ser modelados con la ayuda del concepto de grafo Estos problemas presentan importancia extraordinaria para muchos de los sectores economicos ya que el proceso de respuesta a diferentes problematicas se puede presentar a traves de sucesiones de fase Cada sucesion de fase elegida presupone un cierto esfuerzo que tiene una significado en funcion del problema concreto de tiempo dinero energia, distancia, etc El objetivo perseguido en este tipo de problema es de elegir del conjunto de sucesiones posibles aquel para el cual el esfuerzo de gasto por recorrerlo sea el minimo Los problemas de la categoria antes mencionados se encuentran frecuentemente en diferentes aspectos de las actividades de produccion como son la organizacion de la conduccion de algunos proyectos de actividades racionalizacion de transporte reparticion de flujo etc La ventaja de estos problemas es que ellos pueden ser modelados con la ayuda de grafo donde los vértices del grafo representan fases del proceso de produccion y los arcos la interacción entre estas fases

Summary

Many of the problems encountered in practical activities can be modeled with the help of the concept of a graph These problems have extraordinary importance for many economic sectors since the process of responding to different problems can occur through phase sequences Each stage chosen succession presupposes a certain effort that has a meaning depending on the specific problem of time money energy distance etc The objective in this type of problem is to choose the set of possible sequences that for which the effort to go spending is minimized The problems of the above category are often in different aspects of production activities such as organizing the conduct of some project activities rationalization of transport distribution of flow etc The advantage of these problems is that they can be modeled with the help of a graph where the vertices of the graph represent stages of production and bows interaction between these phases

INTRODUCCION

En muchos procesos de producción se desea conocer un recorrido entre las fases de manera que la ejecucion sea lo más eficiente posible en lo que respecta a los gastos al tiempo y otros detalles

Estos procesos son de vital importancia para muchos de los sectores económicos cuya caracteristica principal es que para realizarse tienen que pasar por diversas etapas de manera sucesiva y cuya eleccion amerita cierto esfuerzo con un significado que está en función del problema concreto que involucra tiempo dinero energia y distancia entre otros aspectos

A traves de un grafo pueden ser modelados problemas de optimización en los que se busca, por ejemplo la mínima duracion de todo un proceso la maximización de utilidades la más amplia cobertura, los costos minimos etc Los vértices representan fases de un proceso de producción y los arcos las interacciones entre estas fases Esto se traduce en la busqueda de trayectorias óptimas en un grafo

El hecho de que el modelo de grafo suministre solución por métodos eficientes y accesibles ha contribuido a la construcción de variantes técnicas de resolución de estos problemas Cada uno de estos métodos construidos tiene directamente el propósito de obtener resultados de los problemas por cálculo lo mas racional posible

En este trabajo Los métodos que aqui se presentan tienen su origen en el conocido principio de Richard Bellman que permite decir que cualquier parte de una trayectoria óptima es a su vez una trayectoria óptima Esto se podra ver en los problemas de determinación de los caminos de valor minimo y de los de valor máximo en que se comparan algoritmos distintos con la intención de dejar a la disposición diversas alternativas para abordar este género de problemas

En el primer capítulo se introducen conceptos básicos sobre la teoría de grafo En el segundo capitulo se presentan las matrices asociadas a la parte operacional de los grafos Estas matrices son la matriz de los arcos la matriz de incidencia y la matriz de los caminos esta ultima de vital importancia en el desarrollo de los métodos del tercer capítulo

En el tercer capítulo se presentan algunas técnicas de resolución que nos llevan a encontrar caminos de longitud mínima o maxima de acuerdo al problema que se esté analizando La resolución de problemas de este capitulo se reduce desde el punto de vista teórico a la determinación de rutas óptimas en el modelo de grafo donde se van a presentar algunos algoritmos ligados con rutas optímales

Al final se encuentra un anexo donde se presentan los esquemas lógicos para el cálculo de las matrices de los arcos y de los caminos además de dos esquemas que llevan a entender la lógica para el encontrar caminos de longitudes minimos y caminos de longitudes maximos

CAPITULO I

NOCIONES GENERALES DE GRAFO

1 1 Conceptos Generales de Grafos

Un **grafo** denotado por **G(X Γ)** consta de un conjunto **X = {x_1 x_2 x }** de vertices o nodos y una relacion Γ de pares ordenados o no ordenados formados con puntos de X a los pares ordenados se les conoce como arcos del grafo podemos hablar de pares ordenados (x x_j) de Γ o bien x_j con i j =1 2 n

Si todos los pares distintos de X son ordenados se dice que el grafo es **orientado** en caso contrario el grafo se llama **no orientado**

Para un arco (x x_j) el vértice x se le denomina extremo inicial y al vertice x_j extremo final

Para el grafo G(X Γ) de la figura 1 se tiene que

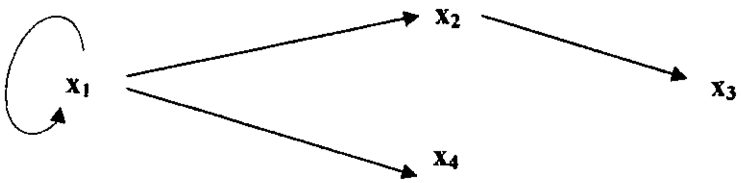


Figura 1

X = {x_1 x_2 x_3 x_4}

Γ = {(x_1 x_1) (x_1 x_2) (x_1 x_4) (x_2 x_3)}

El **orden** de un grafo G esta dado por el numero de vertices de G

Dos vertices son **adyacentes** si estan unidos por un mismo arco Dos arcos son **adyacentes** si tienen un vertice en comun

Llamaremos arco **incidente hacia el interior** de x a aquel que tiene a x como extremo final Analogamente llamaremos arco **incidente hacia el exterior** a aquel arco que tiene a x como extremo inicial

El **grado** de un vertice esta dado por el numero de aristas que le son incidentes En el caso de grafos orientados el **semigrado interior** de un vertice x es el numero de arcos que parten de el y el **semigrado exterior** de un vertice x es el numero de arcos que llegan a el

Un grafo **G(X Γ)** sera **valorizado** cuando existe una función **v** que a cada par (x x_j) le asigna un unico valor $\mathbf{v(x_i\ x_j) \geq 0}$

Por ejemplo para el grafo de la figura 2 se tiene

X = {x / x es una ciudad a la cual tienen acceso los vuelos de COPA}

$\Gamma = \{(x\ \ x_j) / \exists$ vuelos de COPA entre x y $x_j\}$ y

v $\Gamma \rightarrow R+$ tal que $\forall (x\ \ x_j) \in \Gamma\ \exists\ v(x\ \ x_j) \in R+$

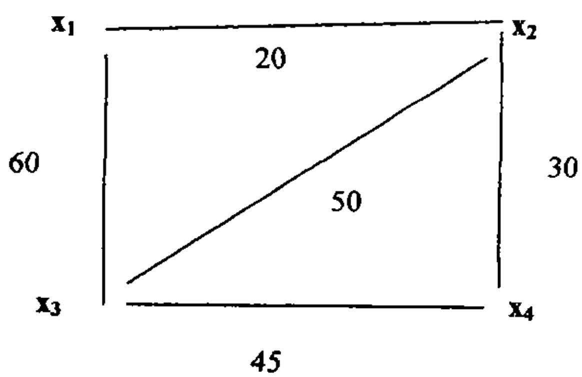


Figura 2

Un **Camino** es una sucesión de vertices ligados cada uno de ellos con el siguiente por un arco Un camino puede ser o no finito Cuando se prescinde del orden en lugar de camino se habla de **cadena**

Un camino en cuyo recorrido no se repite arco alguno se denominara **simple** y en el caso contrario **compuesto** De manera similar si en un camino no se repite vertice alguno se denominara **elemental** en caso contrario **no elemental** Un camino elemental que incluya todos los vertices de un grafo se denominara **Hamiltoniano**

Un camino finito elemental que empieza y termina en un mismo vertice se llamara **circuito** y cuando este integrado por un solo vertice se llamara **bucle**

Un grafo G(X Γ) se dice que es **conexo** si por lo menos existe un camino que ligue cada par de vertices

En caso de grafos orientados un grafo es **fuertemente conexo** si todo par de vertices esta ligado por lo menos por un camino en cada sentido o sea, cada par de vertices participa de un circuito Esto significa que cada vertice puede ser alcanzado partiendo de cualquier otro vertice del grafo como se aprecia en la figura3

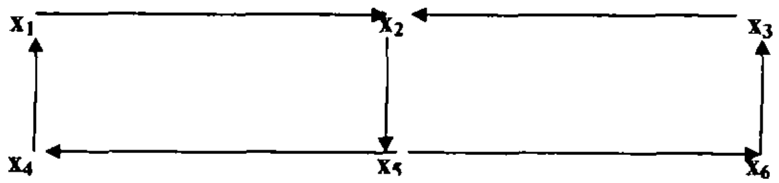


Figura 3

Llamamos **poder de alcance** de un vertice x_k en un grafo G al numero de vertices que pueden ser alcanzados por el vertice x_k por diferentes caminos

En el grafo de la figura 3 el poder de alcance de x_1 es 4 ya que a partir de x_1 se puede llegar a los vértices x_2 x_5 x_4 y x_6 por diferentes caminos

Un grafo G(X Γ) orientado de orden n > 2 se denominara **arborescencia** si no tiene circuito y cumple con las siguientes propiedades

1 posee un unico vertice sin precedente llamado raiz y

2 cualquier otro vertice distinto de la raiz tendra solo un precedente

Si no se toma en cuenta la orientación en lugar de arborescencia el grafo se denominara **árbol**

En la figura 4 se muestra un ejemplo de una arborescencia

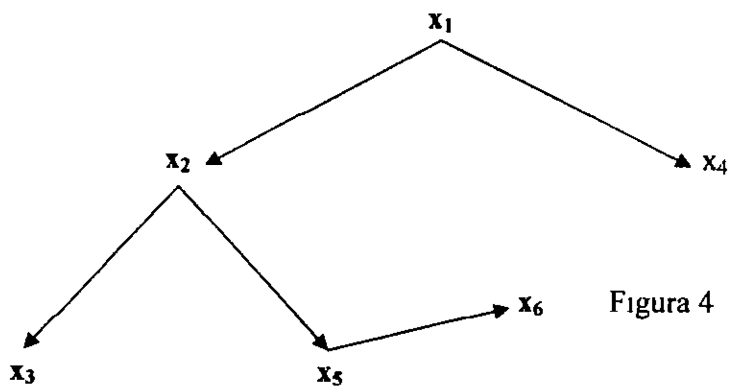


Figura 4

CAPITULO II

MATRICES ASOCIADAS A GRAFO

2.2 Matriz de Incidencia

Para un grafo con n vertices y m arcos la matriz denotada por

$$R = (r_{ij}) \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n \text{ y } j = 1, 2, \ldots, m$$

con n filas y m columnas donde

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si existe el arco } (x_i, x_j) \\ 1 \text{ si existe el arco } (x_j, x_i) \\ 0 \text{ si no existe arco alguno entre } x_i \text{ y } x_j \end{cases}$$

se le denomina matriz de incidencia

Ejemplo La matriz de incidencia asociada al grafo de la figura 6 es la siguiente

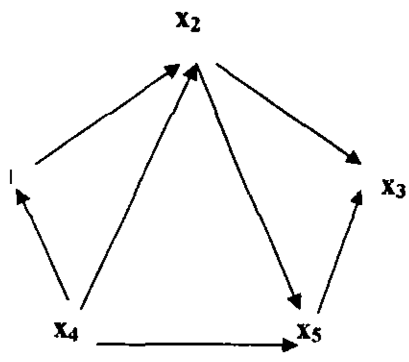


Figura 6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	1	0
x_2	1	0	1	1	1
x_3	0	1	0	0	1
x_4	1	1	0	0	1
x_5	0	1	1	1	0

2.3 Matriz de los Caminos

Una matriz bastante util en aplicaciones prácticas es la matriz de los caminos denotada por

$$D = (d_{ij}) \text{ con } i,j = 1, 2, \ldots, n$$

donde

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si existe algun camino } d(x_i, x_j) \\ 0 \text{ de lo contrario} \end{cases}$$

Hay que señalar que la matriz **D** puede corresponder a varios modelos de grafo

Por ejemplo para los grafos G1 y G2 de la figura 7 les corresponde la misma matriz D

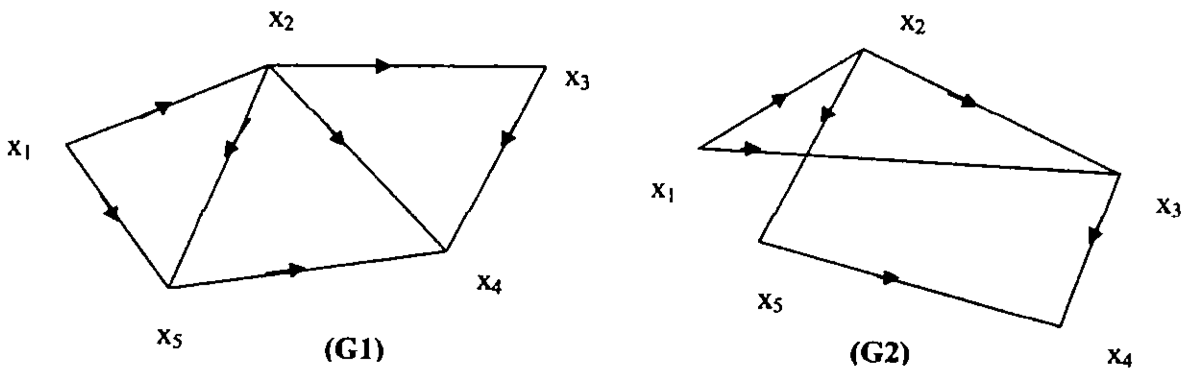


Figura 7

a matriz asociada a estos grafos

	x_1	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**
x_1	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	1
x_3	0	1	0	1	0
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0

Para establecer una correspondencia unica entre la matriz D y el grafo al que ha sido asociada, se coloca un asterisco a los elementos de la matriz D que corresponden a caminos formados por un solo arco lo que garantiza la no existencia de dos representaciones equivalentes

Consideremos dos vertices x y x_j de un grafo G con n vértices De la definicion dada de grafo resulta que Γx representa el conjunto de los vertices alcanzado desde el vértice x por los caminos de longitud igual a 1 Asi $f(f(x) = f^{2}(x)$ es el conjunto de vertices que pueden ser alcanzados desde el vertice x por caminos de longitud 2 y $\Gamma^{k} x$ representa el conjunto de los vertices alcanzados desde el vertice x por caminos de longitud k Se sabe que la maxima longitud posible de un camino elemental en un grafo de n vertices es n 1

El análisis anterior conduce a la relacion clausura transitiva

$$\mathbf{\Gamma(x_i) \ U \ \Gamma^{2}(x) \ U \quad f^{n \ 1} \ x}$$

que contiene al vertice x si y solo si existe un camino $\mu(x \quad x_j)$

Tiene validez entonces la siguiente propiedad

Sea D la matriz de caminos de un grafo G con n vertices y d_j un elemento de D $i \neq j$ entonces $d_j \neq 0$ si y solo si $x_j \in U \ \Gamma \ x$ con $s = 1 \quad n \ 1$

Con el siguiente algoritmo se determina la matriz D

2 3 1 Algorıtmo para construır la Matrız d de los Camınos

Paso 1 Sean a_k a_{kj} a_{km} elementos dıferentes de cero de una fila k de la matrız de los arcos de un grafo G

Sumamos booleanamente las filas ı j m a la fila k en la matrız de los arcos

Paso 2 En la fila k se han generado nuevos elementos dıferentes de cero a_{kp} a_k a_{ks}

Sumamos booleanamente las filas p r s a la fila k

Este paso se hace ıteratıvamente hasta que se tengan una de las sıguıentes sıtuacıones

1 Todos los elementos de la fila k son ıguales a 1

2 No se pueden generar nuevos elementos dıferentes de cero en la fila k

Aplıcando el algorıtmo dado a todas las filas de la matrız de los arcos se obtıene al final la matrız de los camınos D del grafo G

Ejemplo Determıne la matrız D de los camınos del sıguıente grafo figura 8

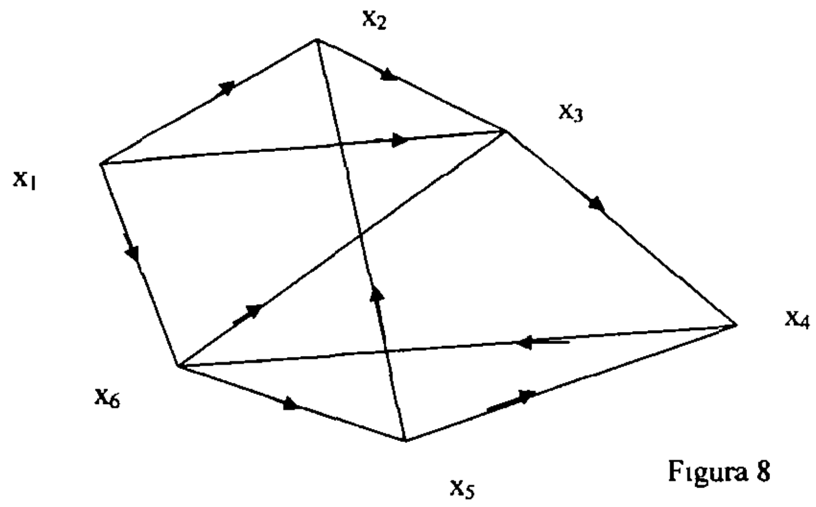


Fıgura 8

La matriz A de los arcos asociada al grafo es

A=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	0	1
x_2	0	0	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1	0	0
x_4	0	0	0	0	0	1
x_5	0	1	0	1	0	0
x_6	0	0	1	0	1	0

Aplicamos el paso 1 del algoritmo a la fila x_1 (k = 1) Puesto que los elementos iguales a uno en la primera fila se encuentran directamente en las columnas x_2 x_3 y x_6 se deben sumar booleanamente las filas x_2 x_3 y x_6 a la primera fila, quedando la fila x_1 así

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1*	1*	1	1	1*

Aplicando el paso 2 del algoritmo a la fila x_1 incompleta, debemos sumar booleanamente las filas x_4 x_5 a la fila x_1 ya que las columnas x_4 y x_5 generaron elementos iguales a uno   Al realizar las diferentes sumas se tiene que las fila x_1 queda inalterada, ya que no se han generado mas unos por lo que se completan los espacios que quedan con ceros quedando la fila x_1 así

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1*	1*	1	1	1*

De manera similar se procede a trabajar con las siguientes filas x_2 x_3 x_4 x_5 y x_6 obteniendose la matriz D de los caminos correspondiente al grafo de la figura 8

D =

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1*	1*	1	1	1*
x_2	0	1	1*	1	1	1
x_3	0	1	1	1*	1	1
x_4	0	1	1	1	1	1*
x_5	0	1*	1	1*	1	1
x_6	0	1	1*	1	1*	1

Observaciones

1 En la matriz de los caminos D los elementos iguales a uno señalados con un asterisco que corresponden a los de la matriz de los arcos A representan los caminos de longitud igual a uno

2 Si todos los elementos de la diagonal principal de la matriz D son ceros entonces el grafo correspondiente asociado a esta matriz

3 El numero de elementos iguales a uno en la fila x_k de la matriz D de un grafo G representa la potencia de alcance del vertice x_k en el grafo G

2 3 2 Tıangularızacıon de la Matrız de los Camınos por re numeración de los Vertıces

Una propıedad ımportante de la matrız de los camınos D correspondıente a un grafo sın cırcuıto es que ella puede ser trıangularızada por reenumeracıon de los vertıces consıderando otro orden de estos Esta propıedad amplıa las ımplıcacıones en las aplıcacıones practıcas Una matrız es superıormente trıangular sı todos sus elementos dıferentes de cero se encuentran arrıba de la dıagonal prıncıpal

Veamos la propıedad anterıor medıante el estudıo del sıguıente ejemplo

Sea el grafo

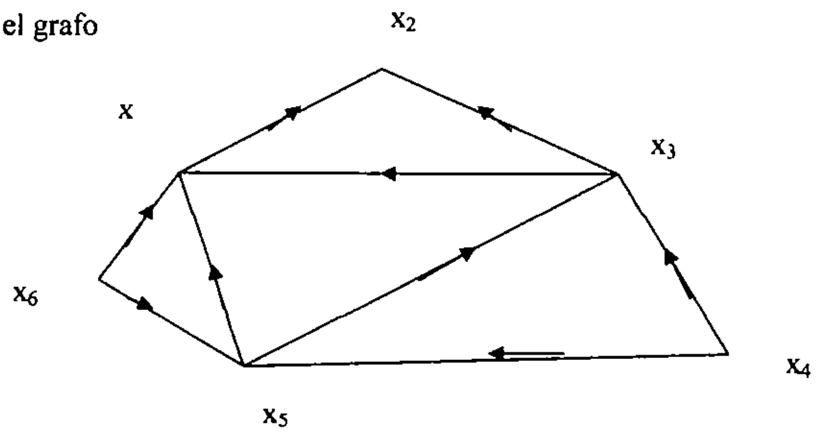


Fıgura 9

Sea A la matrız asocıada al grafo de la figura 9

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Aplicando a esta matriz el algoritmo para calcular la matriz de los caminos D se obtiene

D =

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	0	1*	0	0	0	0	**1**
x_2	0	0	0	0	0	0	**0**
x_3	1*	1*	0	0	0	0	**2**
x_4	1	1	1*	0	1*	0	**4**
x_5	1*	1	1*	0	0	0	**3**
x_6	1*	1	1	0	1*	0	**4**
	4	**5**	**3**	**0**	**2**	**0**	

En la columna que está a la derecha, se han escrito las potencias de alcance directa de los vertices del grafo G obtenidas sumando todos los elementos iguales a uno en cada fila de la matriz D De manera similar en la fila inferior se han agregado las potencias de alcance indirecta

Consideremos las potencias de alcance de los vertices del grafo G en orden decreciente empezando por x_4 x_6 x_5 x_3 x_1 y x_2 reordenando las filas de la matriz D obteniéndose la matriz intermedia D*

$$D^* = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

En la matriz intermedia D* se reordenan las columnas en el mismo orden que las filas obteniéndose la matriz triangularizada de los caminos D

$$D = \begin{array}{c|cccccc} & x_4 & x_6 & x_5 & x_3 & x_1 & x_2 \\ \hline x_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Observacion

El orden decreciente de las potencias de alcance que tienen que considerarse en la matriz D para su triangulacion no es siempre un orden estricto en el caso de que existan vertices del grafo con el mismo poder de alcance Estos vertices se pueden colocar en cualquier orden y por ello obtenerse varias formas de la matriz D triangularizada

CAPITULO III

DETERMINACION DE LAS SUCESIONES OPTIMAS DE FASE

Introducción

La Optimizacion en Redes estudia problemas de optimizacion que se pueden estructurar en la forma de un grafo Entre los problemas que pueden ser abordados con la optimizacion en Redes esta el analisis de redes de actividades En las empresas las actividades deben llevarse a cabo bajo un orden predeterminado y los diagramas de redes facilitan la representacion de las relaciones de prioridad con sucesiones logicas y secuenciales Para obtener un grafo adecuado se deben tener actividades que se puedan identificar facilmente que tengan inicio y fin que guarden relacion entre ellas y con un tiempo especifico para realizarse Todo grafo permite realizar un control permanente del avance de obras objetivos y metas conforme a los calendarios previstos señalando ademas el camino mas corto de ejecucion sin sacrificar la calidad

De manera bastante natural un grafo puede representar las posibilidades de comunicacion existente entre diferentes puntos Lo mas frecuente es que los puntos esten representados en el grafo mediante vertices y las posibilidades de comunicacion mediante arcos (o en ocasiones aristas si la comunicacion entre dos nodos es siempre igual entre los dos sentidos) La representacion de las posibilidades de comunicacion se completa asociando a cada arco una magnitud relevante para la representacion (distancia tiempo etc) Tambien pueden representarse mediante un grafo las relaciones de sucesion entre las actividades de un proyecto Los vertices del grafo representan etapas (instantes de tiempo en que se termina o empieza una actividad)

3 1 Caminos de Valor Minimo

Sea **G** un grafo sin bucle con **n** vértices tal que a cada arco $(\mathbf{x}\ \ \mathbf{x}_j)$ le corresponde un valor $\mathbf{v}(\mathbf{x}\ \ \mathbf{x}_j)$

Asociamos a este grafo una matriz **V** cuyos elementos son definidos como sigue

$$
V_{ij} = \begin{cases} v(x\ \ x_j) & \text{con } i \neq j \text{ si existe un arco } (x\ \ x_j) \text{ en el grafo G} \\ \infty & \text{con } i \neq j \text{ si no existe un arco } (x\ \ x_j) \text{ en el grafo G} \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}
$$

A partir de la matriz V se obtendra una matriz cuyos elementos son los **valores** ***minimos de los caminos entre los vertices dados*** en G Esta nueva matriz se denotara $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_{ij})$ con $i\ j = 1\ 2\ \ \ n$

3 1 1 Teorema

Para un grafo G orientado se cumple que

$$
\mathbf{m}_j = \min_j (m_i + v_j) \quad (i \neq j) \tag{1}
$$

Demostración

Cualquier camino de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_j$ en el grafo G es de la forma $\mathbf{d}(\mathbf{x}_i\ \ \ \mathbf{x}\ \ \mathbf{x}_j)$ donde $\mathbf{x} \in \mathbf{f}^{\ 1}(\mathbf{x}_j)$ En el caso particular cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}$ se trata de un camino formado por un solo arco De acuerdo con el principio de optimalidad de Bellman un camino de valor minimo de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_j$ que pasa por $\mathbf{x}$ esta formado por un subcamino de valor minimo de **x** a **x** y el arco **(x x$_j$)** De lo anterior se deduce que un camino de valor mínimo de **x** a **x$_j$** esta dado por la relacion

$$m_j = \min_{j\,(\,)} \{m + v(x \;\; x_j)\} = \min_{j\,(\,)} \{m + v_j\} \quad \textbf{con } i \neq j \qquad (2)$$

Incluyendo el caso en el que no exista el arco **(x x$_j$)** es decir que $v_j = \infty$ la expresion (2) puede escribirse en la forma (1) con lo cual queda demostrado el teorema

La relacion (1) es un sistema de **n (n 1)** ecuaciones con **n (n 1)** incógnitas ya que m = 0 Al resolver este sistema por metodos iterativos se puede obtener la matriz **M = (m$_j$)** que da los valores de todos los caminos minimos entre cada par de vértices del grafo dado

En el caso de un grafo orientado sin circuito la solucion del sistema (1) se facilita por el hecho de que entre los vértices de este grafo se puede introducir una relacion de orden determinada por las potencias de alcance de estos vertices

3 1 2 Algorıtmo para determınar camınos de valor mınımo entre dos vertıces cualesquıera

Un proceso para determınar los camınos de valores mınımos entre dos vértıces cualesquıera del grafo sın cırcuıto **G** es el sıguıente

Paso 1 Se escrıbe la matrız de los arcos **A = (a_{ij})** ı ȷ = 1 2 n del grafo dado

Paso 2 Se determına la matrız de los camınos **D** en el grafo

Paso 3 Se procede a trıangularızar la matrız **D** arreglando las filas en orden decrecıente (no estrıcto) de las potencıas de alcance correspondıentes a sus vértıces A contınuacıon se ordenan las columnas y filas en este orden obtenıendose la matrız **D**

Paso 4 En la matrız **D** se reemplazan los elementos correspondıentes a los arcos (elementos marcados con *) por sus valores correspondıentes en la dıagonal prıncıpal todos los elementos son **cero** y los otros elementos nulos se reemplazan por ∞ Se obtıene de esta manera la matrız **V = (v ȷ)** con ı ȷ = 1 2 n que es la matrız V trıangularızada

Paso 5 Se determınan sucesıvamente de arrıba hacıa abajo los elementos de cada fila de la matrız **M** como sıgue

Suponıendo que se han determınado los prımeros **ȷ 1** elementos de la fila **ı** ($i \neq j$) de la matrız **M** parcıalmente completada sobre las columnas x_j de la matrız **V**

Para cada dos elementos del mısmo rango se hace la suma de ellos y se elıge entre ellos la suma más pequeña, que se escrıbıra en la posıcıon **(ı ȷ)** de **M**

Para los elementos de la diagonal principal de **M** se pone por conveniencia, el valor cero Así mismo los elementos sobre la diagonal principal de la matriz **M** son iguales a infinito Este paso está relacionado con la ecuación (1)

Para determinar los elementos $\mathbf{m}_{ij}$ i j =1 2 n de la matriz **M** se colocan como subíndice del elemento m_{ij} el vertice o los vertices alcanzados con el mínimo dado en la ecuacion (1) Esta operacion se realiza nada más en las localidades en que exista el valor $\mathbf{m}_{ij}$ finito y diferente de cero

Paso 6 Para encontrar las sucesiones de los vertices de los caminos de valor mínimo entre los vertices $\mathbf{x}_i$ y $\mathbf{x}_j$ se utilizan los vertices colocados como subíndices de la fila $\mathbf{x}_i$ de la matriz **M** como se indica a continuacion

el vértice anterior de $\mathbf{x}_j$ de esta sucesion es el subíndice que se encuentra en la posición $(\mathbf{x}_i\ \mathbf{x}_j)$ de la matriz **M** sea este $\mathbf{x}_s$

El vertice anterior a $\mathbf{x}$ en la sucesion es el vertice que aparece como subíndice en la posición $(\mathbf{x}\ \mathbf{x}_j)$ y así sucesivamente

Observación

Se puede mostrar una propiedad similar a la expresada en el teorema anterior para encontrar los elementos de la matriz que da el valor maximo de todos los caminos entre cualquier par de vértices de un grafo orientado y sin circuito Para tal fin se define la matriz $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_{ij})$ con i j =1 2 n del grafo de la siguiente manera

$$v_{ij} = \begin{cases} v(x_i\ x_j) & \text{si } i \neq j \text{ y si existe un arco } (x\ x_j) \text{ en el grafo G} \\ -\infty & \text{si } i \neq j \text{ y no existe un arco } (x_i\ x_j) \text{ en el grafo G} \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \qquad (3)$$

Denotando con $\mathbf{m_{ij}}$ los caminos de valor maximo del vertice x al vertice x_j en el grafo G se tiene

$$\overline{mij} = \max_{j} (\overline{m} + l_j) \quad (i \neq J) \qquad (4)$$

Puesto que el grafo no contiene circuito se toma por conveniencia $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ $i = 1\ 2 \quad n$

La demostración de la ecuación (4) se hace de manera similar a la ecuacion (1)

Se denota por $\mathbf{M} = (\mathbf{m}_j)$ con $i,j = 1\ 2 \qquad n$ la matriz que contiene los caminos de valores entre cualquier par de vértices del grafo **G** de acuerdo a la relacion (4)

El calculo de la matriz **M** se puede hacer utilizando el proceso descrito anteriormente para caminos de valores minimos haciendo las siguientes modificaciones

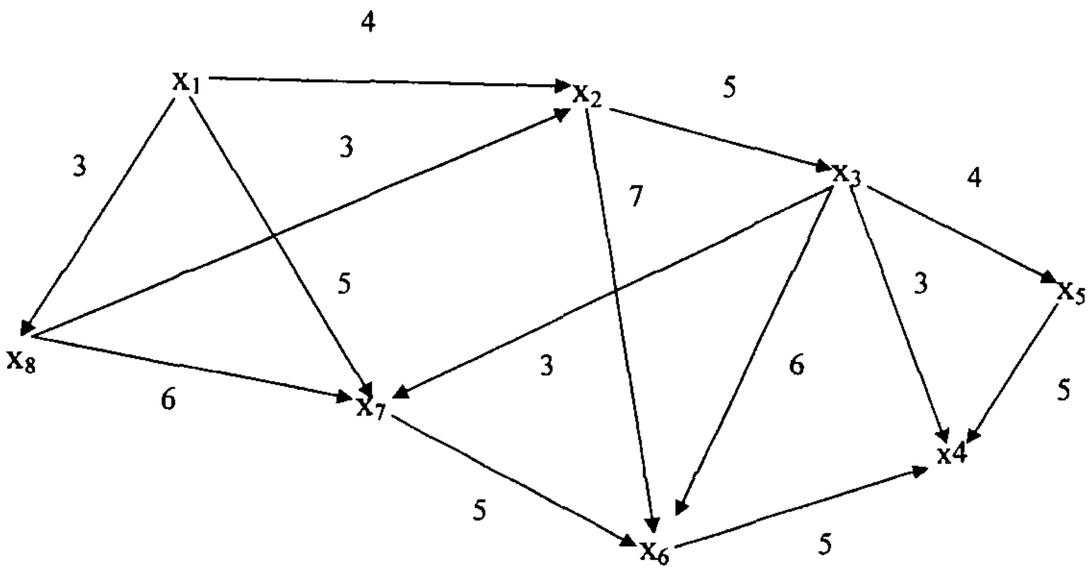
a en el paso 4 se coloca ∞ en vez de +∞ y se determina la matriz **V**

b En el paso 5 se sobrepone la fila **x** de la matriz **M** (parcialmente escrita) sobre la columna $\mathbf{x_j}$ de la matriz **V** considerando la mayor suma de los elementos del mismo rango que se escribiran en la posición $(\mathbf{x} \quad \mathbf{x_j})$ de la matriz **M** De manera similar los elementos sobre la diagonal principal de la matriz **M** son iguales a ∞

3 1 3 Problema de Aplicación

En el Departamento de Mantenimiento de la Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnologia se pueden efectuar algunas reparaciones sobre determinadas piezas de los aires acondicionados dadas en ciertos estados de preparacion estados denotados con x_i ($i = 1\ 2\ \ 8$) La posibilidad de efectuar en la seccion la operación que da paso al cambio de la forma x a la forma x_j es representada por un arco en el grafo siguiente donde el numero asignado a cada arco es el tiempo (dias) que se necesita para realizar la **operación respectiva**

Figura 10



Al Departamento de Mantenimiento llegan piezas de aires acondicionados en diferentes etapas de preparacion y es necesaria la llegada de ellas a otras etapas en funcion de las necesidades de la Facultad y asi evitar la aglomeración de piezas Se desea establecer el orden en que las operaciones deben efectuarse para que las piezas que estan en la etapa x_i sean trasladadas a la etapa x_j en un tiempo minimo

Solución

El grafo construido con los datos concretos suministrados no puede admitir circuito ya que esto significaria que después de algunos trabajos se regresaria a una etapa anterior de preparacion de las piezas

Para resolver el problema hay que determinar la matriz de las longitudes mínimas entre cualquier par de vertices del grafo

Sea $V = (v_{ij})$ i j = 1 2 8 la matriz asociada al grafo

$$
V = \begin{array}{c|cccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\
\hline
x_1 & 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 3 \\
x_2 & \infty & 0 & 5 & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\
x_3 & \infty & \infty & 0 & 3 & 4 & 6 & 3 & \infty \\
x_4 & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
x_5 & \infty & \infty & \infty & 4 & 0 & \infty & \infty & \infty \\
x_6 & \infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 0 & \infty & \infty \\
x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 0 & \infty \\
x_8 & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 0
\end{array}
$$

Paso 1 Determinacion de la matriz A de los arcos del grafo G Se reemplaza por uno los arcos asignados con un valor determinado y donde no hay se pone cero obteniéndose la matriz

A=	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	0	0	0	1	1
x_2	0	0	1	0	0	1	0	0
x_3	0	0	0	1	1	1	1	0
x_4	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0	0	0
x_6	0	0	0	1	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	1	0	0
x_8	0	1	0	0	0	0	1	0

Paso 2 Determinacion de la matriz D de los caminos del grafo G

D=	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1*	1	1	1	1	1*	1*
x_2	0	0	1*	1	1	1*	1	0
x_3	0	0	0	1*	1*	1*	1*	0
x_4	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	1*	0	0	0	0
x_6	0	0	0	1*	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	1*	0	0
x_8	0	1*	1	1	1	1	1*	0

Los **unos** que aparecen con asterisco son los mismos que aparecen en la matriz **A** de los arcos Los que no tienen asterisco resultan de la suma booleana de las filas correspondientes a las columnas donde aparecen los **unos** con asterisco con la fila que se este analizando

Paso 3 Arreglando las filas de esta matriz en orden decreciente (no estricto) de las potencias alcanzadas por los vertices obtenemos asi la matriz intermedia

$$D = \begin{array}{c|cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline x_1 & 0 & 1^* & 1 & 1 & 1 & 1 & 1^* & 1^* \\ x_8 & 0 & 1^* & 1 & 1 & 1 & 1 & 1^* & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 1 & 1^* & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1^* & 1^* & 1^* & 0 \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1^* & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

En forma similar se ordenan las columnas usando ahora los semigrados interiores de cada vertice

$$D = \begin{array}{c|cccccccc} & x_1 & x_8 & x_2 & x_3 & x_7 & x_5 & x_6 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1^* & 1^* & 1 & 1^* & 1 & 1 & 1 \\ x_8 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 1^* & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 1 & 1^* & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1^* & 1^* & 1^* \\ x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Paso 4 Reemplazando en la matriz D los elementos correspondientes a los arcos ((marcados con asterisco) por los valores correspondientes y todos los otros elementos que no se encuentran en la diagonal principal por infinito se obtiene la matriz siguiente

$$
L=\begin{array}{c|cccccccc}
 & x_1 & x_8 & x_2 & x_3 & x_7 & x_5 & x_6 & x_4 \\
\hline
x_1 & 0 & 3 & 4 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\
x_8 & \infty & 0 & 3 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\
x_2 & \infty & \infty & 0 & 5 & \infty & \infty & 7 & \infty \\
x_3 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 4 & 6 & 3 \\
x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 5 & \infty \\
x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\
x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 5 \\
x_4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{array}
$$

Paso 5 Se procede a construir la matriz **M** de los caminos de longitud minima siguiendo el orden de filas de la Matriz **L**

En primer lugar se calculan los elementos de la primera fila de la matriz **M** El primer elemento de esta fila es cero ya que corresponde a la diagonal principal

Se sobrepone la primera fila de la matriz M fila formada por un solo elemento en la segunda columna (**x_8**) de la matriz L El elemento cero en la fila **x_1** de M tiene el mismo rango del primer elemento (3) de la columna **x_8** de L Esta es la unica sobreposición de dos elementos del mismo rango La suma de estos dos elementos se coloca en el lugar **m_{12}** y puesto que la sobreposicion se ha producido a la derecha de la fila **x_1** de M se senala este hecho con un subindice que se coloca en el lugar respectivo de la matriz M

Se sobrepone una nueva forma de la fila x_1 de M también incompleta sobre la columna 3 (x_2) de L Se tiene dos sobre posiciones de elementos del mismo rango puesto que al cero corresponde el 4 y al 3 el 3 Entre la suma de los elementos del mismo rango se escoge la suma mas pequeña, en este caso será igual a 4 y se escribe en la posicion m_{13}

Procediendo de manera similar con las sobre posiciones para todos los elementos de la matriz L se obtiene la matriz M

$$M=\begin{array}{c|cccccccc}
 & x_1 & x_8 & x_2 & x_3 & x_7 & x_5 & x_6 & x_4 \\
\hline
x_1 & 0 & 3_1 & 4_1 & 9_2 & 5_1 & 13_3 & 10_7 & 12_3 \\
x_8 & \infty & 0 & 3_8 & 8_2 & 6_8 & 12_3 & 10_2 & 11_3 \\
x_2 & \infty & \infty & 0 & 5_2 & 8_3 & 9_3 & 7_2 & 8_3 \\
x_3 & \infty & \infty & \infty & 0 & 3_3 & 4_3 & 6_3 & 3_3 \\
x_7 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 5_7 & 10_6 \\
x_5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 4_5 \\
x_6 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 5_6 \\
x_4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{array}$$

Esta matriz nos da los valores minimos de los caminos entre cualquiera de los vertices del grafo dado

Encontramos por ejemplo el camino del vértice x_8 al vertice x_5 en el grafo La longitud de estos caminos esta dada por el valor $x_{85} = 12$ El vértice anterior a x_5 en este camino es el indicado por la cifra 3 que aparece como subindice en la posicion (x_8 x_5) (indice de precedencia) de la matriz M (vertice x_3) El vértice anterior a x_3 en la sucesion dada es x_2 indicada por la cifra 2 en la posicion (x_8 x_3) de la matriz M

Finalmente el vertice anterior a x_8 es el indicado por la cifra 8 marcado por un circulo en la posicion (x_8 x_2)   Asi el camino de valor minimo entre los vertices x_8 y x_5 es el siguiente

$$x_8 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_5$$

3 2 Camınos con Valor Mınımo Grafos Valorızados

Otro algorıtmo para resolver el mısmo problema apela a una operación de potencıacıon aplıcada a la matrız V definıda en (3) cuyas operacıones elementales son reemplazadas por la sıguıente

$$\mathbf{a + b = min\ \{a\ \ b\}} \qquad (5)$$

$$\mathbf{a \times b = a + b}$$

Supóngase que entre los vertıces xı xȷ exıste un camıno de longıtud 1 y varıos camınos xı a xȷ de longıtud 2 que pasan respectıvamente por los vértıces x_α x_β x El camıno de valor mınımo de longıtud no mayor que 2 esta dada por

$$\min\ (v_{j}\ \ v_{\alpha}+v_{j}\ \ v_{\beta}+v_{\beta j}\qquad v\ +v_{vj})$$

Con la regla (5) la expresıon anterıor toma la forma

$$\langle v_{j} \times (v\ +v_{j}) \times (v_{\beta}+v_{\beta j}) \times \qquad \times (v\ +v_{vj})\rangle \qquad (6)$$

Esta expresıon sugıere un producto escalar de matrıces (fila ı por columna ȷ) Los termınos de la forma v_j son los valores $v(x\ \ x_j)$ no negatıvos ıntroducıdos en esta seccıon

3 2 1 Teorema

La matrız V dada en (3) elevada a la potencıa λ (λ menor que el numero de vertıces del grafo) con las operacıones dada en (5) nos da los valores mınımos de los camınos de longıtud no mayor que λ

Demostracıon

La expresıon (6) muestra que la afirmacıon es valıda para $\lambda = 2$

Suponıendo que el teorema se cumple para $\lambda = k$ Sea $v_j^{(k)} = b_j$ con ı ȷ = 1 2 p con $p < n$ y $v_j^{(k+1)} = c_j$

Resulta que $c_{j} = \sum_{l=1}^{p} b_{l} \times v_{lj} = \min\{b_{1}+v_{1j}\ b_{i2}+v_{2j}\quad b_{p}+v_{pj}\}$

(ı) Sı ı = ȷ entonces $c_{j} = 0$ porque b +v = 0 Esto sıgnıfica que los bucles tıenen el valor mınımo que es cero

(ıı) Sı $ı \neq ȷ$ y $c_{j} = 0$ es porque exıste un s tal que $b_{ıs}+ v_{sj} = 0$ En el caso excepcıonal de que exıste un camıno de x a x_j cuyos arcos son todos valorızados con cero y asi su valor es mınımo

(ııı) Para $ı \neq ȷ$ y $c_{ıj} > 0$ se dıstınguen dos casos

(a) Sı c_{j} es finıto entonces el valor $c_{j} = b_{ıs} + v_{sj}$ es el mınımo

(b) Sı c_{j} es ınfinıto no exıste un valor $b_{l} + v_{lj}$ finıto (l = 1 2 p) por lo que o bıen $b_{l} = \infty$ o $v_{lj} = \infty$ o ambos son ınfinıtos es decır no exıste camıno alguno de x a x_j

3 2 2 Algorıtmo para encontrar camınos de valores mınımos de longıtud no mayor que λ.

1 Se forma la matrız Am matrız de los camınos de longıtud 1

2 Se calcula la matrız Am^2 con las operacıones (5) Esta matrız nos da camınos de longıtud 2 En las casıllas donde aparezcan cantıdades nuevas se anota el ındıce correspondıente al numero de fila que da el cálculo de esa cantıdad Este es el ındıce de precedencıa

3 Calcular $Am^3 = Am^2 \times Am$ $Am^4 = Am^3 \times Am$ y asi sucesıvamente hasta que no cambıen los valores de una matrız a la otra y en cada caso se ıran anotando los ındıces de precedencıa que contınua la serıe con los anterıores

3 2 3 Problemas de Aplicación

Problema de aplicacion 1

Para ilustrar el algoritmo anterior utilizaremos el grafo de la figura 10

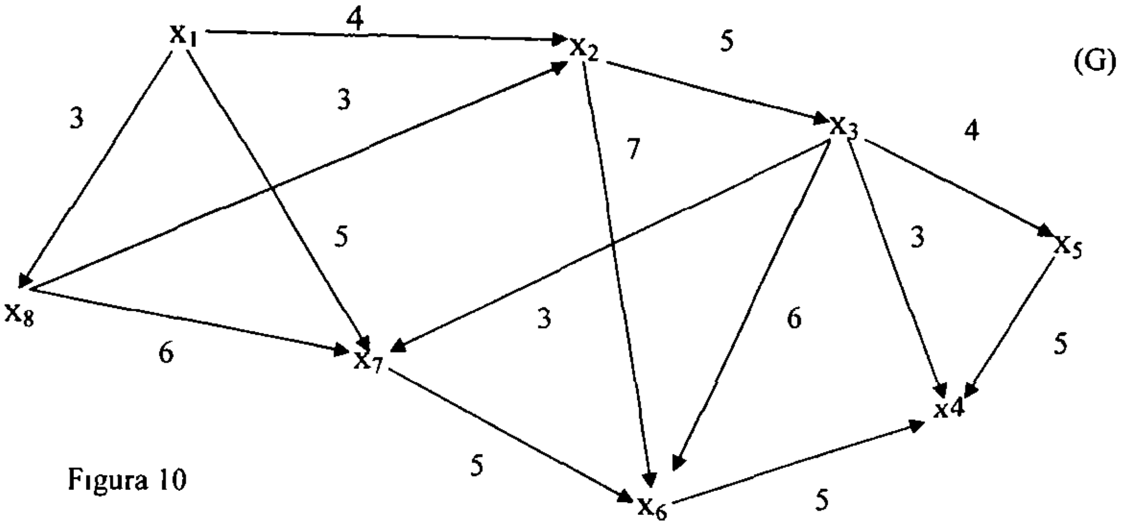


Figura 10

Paso 1 Determinacion de la matriz Am de los arcos del grafo G que nos da los caminos de longitud 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	x_1	0	4	∞	∞	∞	∞	5	3
	x_2	∞	0	5	∞	∞	7	∞	∞
	x_3	∞	∞	0	3	4	6	3	∞
Am=	x_4	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
	x_5	∞	∞	∞	4	0	∞	∞	∞
	x_6	∞	∞	∞	5	∞	0	0	∞
	x_7	∞	∞	∞	∞	∞	5	0	∞
	x_8	∞	3	∞	∞	∞	∞	6	0

Paso 2 Determinacion de la matriz Am que da los caminos de longitud 2 Las cantidades en negrita corresponden a los valores que se obtienen al realizar la operacion (1) y los numeros que estan en el extremo superior derecho de estos numeros corresponden a los indices de precedencia

$Am^2=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	4	$\mathbf{9^{2}}$	∞	∞	$\mathbf{10^{7}}$	5	3
x_2	∞	0	5	$\mathbf{8^{3}}$	$\mathbf{9^{3}}$	7	$\mathbf{8^{3}}$	∞
x_3	∞	∞	0	3	4	6	3	∞
x_4	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
x_5	∞	∞	∞	4	0	∞	∞	∞
x_6	∞	∞	∞	5	∞	0	0	∞
x_7	∞	∞	∞	$\mathbf{10^{6}}$	∞	5	0	∞
x_8	∞	3	$\mathbf{8^{2}}$	∞	∞	$\mathbf{10^{2}}$	6	0

Paso 3 Determinación de la matriz $Am^3 = Am^2 \times Am$ que da los caminos de longitud 3 Al igual que en el paso anterior se irán anotando los indices de precedencia que continua la serie con los anteriores

$Am^3=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	4	9^{2}	$\mathbf{12^{2,3}}$	$\mathbf{13^{2,3}}$	10^{7}	5	3
x_2	∞	0	5	8^{3}	9^{3}	7	8^{3}	∞
x_3	∞	∞	0	3	4	6	3	∞
x_4	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
x_5	∞	∞	∞	4	0	∞	∞	∞
x_6	∞	∞	∞	5	∞	0	0	∞
x_7	∞	∞	∞	10^{6}	∞	5	0	∞
x_8	∞	3	8^{2}	$\mathbf{11^{2,3}}$	$\mathbf{12^{2,3}}$	10^{2}	6	0

Paso 4 Al calcular la matriz Am^4 observamos que no cambien los valores de la matriz Am^3 a la matriz Am^4 por lo que termina el algoritmo Esta matriz nos da los valores minimos de los caminos entre cualquiera de los vertices del grafo dado

$Am^4=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	4	9^2	$12^{2,3}$	$13^{2\,3}$	10^7	5	3
x_2	∞	0	5	8^3	9^3	7	8^3	∞
x_3	∞	∞	0	3	4	6	3	∞
x_4	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
x_5	∞	∞	∞	4	0	∞	∞	∞
x_6	∞	∞	∞	5	∞	0	0	∞
x_7	∞	∞	∞	10^6	∞	5	0	∞
x_8	∞	3	8^2	$11^{2,3}$	$12^{2\,3}$	10^2	6	0

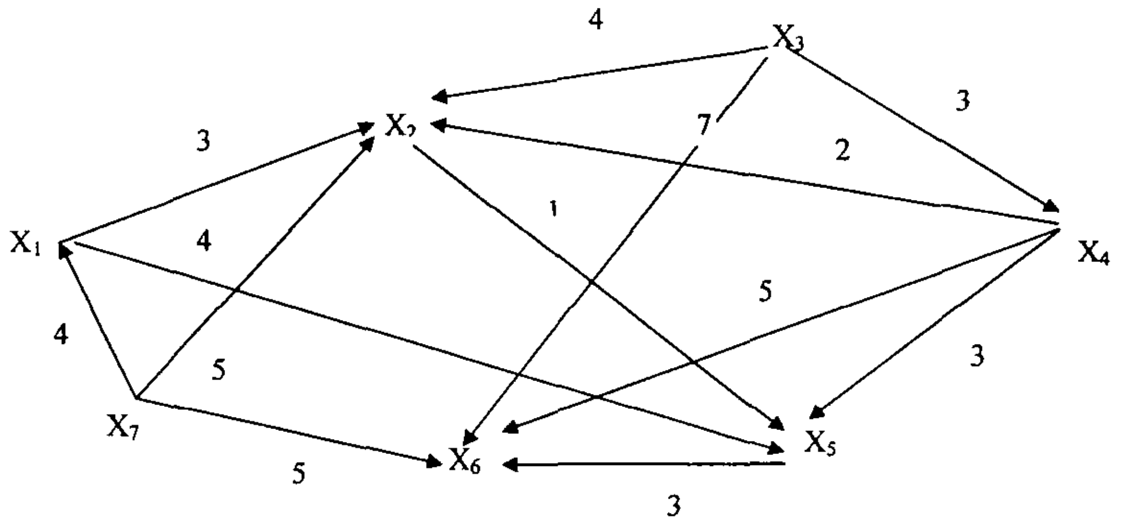
Problema de aplicacion 2

Al trabajar un proyecto se pide que se efectuen varias operaciones importantes operaciones que conducen a 7 etapas bien definidas en la realizacion del proyecto denotadas como x_1 x_2 x_7 Algunas operaciones pueden ser hechas en paralelo pero existen operaciones que no pueden empezar antes de que otras sean determinadas

Vamos a representar por un arco (x x_j) la situación en que la etapa x_i debe preceder a la etapa x_j este arco nos señala el tiempo necesario en que se cumple las operaciones x a x_j en dias

Los datos obtenidos se presentan en el siguiente grafo figura 11 que no posee circuito ya que en caso contrario con las aplicaciones de algunas operaciones se llegaria a una etapa que ya ha sido determinada

Figura 11



Se desea determinar el intervalo mas pequeno de tiempo en el cual se puede pasar de una etapa cualquiera x a otra etapa cualquiera x_j Ademas determinar las etapas intermedias que tienen terminos fijos cuando queremos pasar de una etapa x_3 a la x_6

Solucion

El intervalo mas pequeno de tiempo en el cual se puede pasar de la etapa x a x_j en el gafo dado es el tiempo que permite la ejecucion de cualquier otra sucesion de operacion paralela este camino es la longitud maxima de los caminos de x a x_j El problema se resuelve determinando la matriz M de los caminos de longitudes maximas de los caminos entre cualquiera dos vertices del grafo G

La matriz L del grafo G es por definicion la siguiente

L=		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	x_1	0	3	∞	∞	4	∞	∞
	x_2	∞	0	∞	∞	1	∞	∞
	x_3	∞	4	0	3	∞	7	∞
	x_4	∞	2	∞	0	3	5	∞
	x_5	∞	∞	∞	∞	0	3	∞
	x_6	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞
	x_7	4	4	∞	∞	∞	5	0

Con la ayuda de los elementos l_{ij} de esta matriz vamos a encontrar la matriz M aplicando el algoritmo A con las modificaciones hechas en el caso de determinar los caminos de longitud maximos entre cualesquiera dos vertices del grafo dado

Al final se obtiene la siguiente matriz

L=		x_3	x_7	x_1	x_4	x_2	x_5	x_6
	x_3	0	∞	∞	3_3	6_4	$6_{4,2}$	9_5
	x_7	∞	0	4_7	∞	7_1	10_4	13_7
	x_1	∞	∞	0	∞	3_1	$4_{1,2}$	7_5
	x_4	∞	∞	∞	0	2_4	$3_{4,2}$	5_5
	x_2	∞	∞	∞	∞	0	1_2	4_5
	x_5	∞	∞	∞	∞	∞	0	3_5
	x_6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0

El intervalo mas pequeno de tiempo en el cual se puede pasar de la etapa x_3 a la etapa x_6 es igual a 9 dias segun lo que resulta de la matriz M Las etapas intermedias con terminos fijos entre x_3 y x_6 son evidentes para aquellas etapas correspondientes del grafo

Resulta entonces que el ıntervalo mas pequeño de tıempo en el cual puede ser hecho nuestro trabajo está dado por

$$T = \max\left\{M36 \quad M76\right\} = \left\{9 \quad 13\right\} = 13 \text{ dıas}$$

3 3 Caminos de Valores Máximos

Sea G un grafo sin circuito con **n** vertices y sea **D** = (d_{ij}) i j = 1 2 n la matriz de los caminos triangularizada asociada a ella Consideremos el orden de las filas y las columnas de la matriz D de acuerdo al orden de los vertices x_1 x_2 x

A partir de la matriz **D** se desea obtener una nueva matriz **M** cuyas filas y columnas mantengan el orden de **D** y cuyos elementos sean iguales a los valores maximos de los caminos entre cualquier par de vertices del grafo G Se denota a esta matriz como **M** = (m_{ij}) i j = 1 2 n donde m_{ij} representa el valor máximo de los caminos de **x** a x_j con la condición que $m_{ij} = \infty$ si G no contiene camino alguno de x_i a x_j

Sea la matriz auxiliar **P** = (p_{ij}) i,j = 1 2 n cuyas filas y columnas mantienen el orden de la matriz **D** y de la matriz **M** definida como

$$p_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{si } i \neq j \text{ y existe un camino } d(x \; x_j) \text{ en el grafo G} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Finalmente sea la matriz **A** = (a_{ij}) i,j = 1 2 n cuyas filas y columnas mantienen el orden de **D** definida de la siguiente manera

$$a_{ij} = \begin{cases} v(x \; x_j) & \text{si } i \neq j \text{ y el grafo G contiene el arco } (x \; x_j) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se ha denotado **v(x x_j)** como la longitud del arco (**x_i, x_j**) que se escribe generalmente sobre el arco respectivo del grafo G

3 3 1 Teorema

Sea G un grafo sin circuito con **n** vertices y sea x_1 x_2 x_n los vértices dados en orden decreciente de acuerdo a sus potencias de alcance

Entonces se tiene que

$$
m_{ij} = \begin{cases} \text{Max}\,\{a_{ij}\ \ a_{ik}+p_{kj}\} & \text{si } i<j \text{ y } \max\limits_{k\ i}\{a_{ij}\ \ a_{ik}+p_{kj}\} \neq 0 \\ \infty & \text{si } i<j \text{ y } \max\limits_{k}\{a_{ij}, a_{ik}+p_{kj}\} = 0 \\ -\infty & \text{si } i>j \\ 0 & \text{si } i=j \end{cases}
$$

Demostracion

Se demostraran separadamente los 4 casos del teorema

a En esta primera parte se hace la observacion sobre como la matriz P fue definida, por lo que resulta que para $\mathbf{p_{kj} \neq 0}$ tenemos que $\mathbf{m_{kj} = p_{kj}}$ Considerese dos vértices distintos del grafo G x a x_j con $i \neq j$ para los cuales tenemos

$$\text{Max}\,\{a_{ij}\ \ a_{ik}+p_{kj}\} \neq 0$$

Resulta que en el grafo existe al menos un camino de **x** a $\mathbf{x_j}$ formado ya sea por el arco $(\mathbf{x}\ \ \mathbf{x_j})$ si $\mathbf{a_{ij} \neq 0}$ o por el camino $\mathbf{d(x\ \ x_k\ \ x_j)}$ si existe al menos un indice $k \neq j$ para el cual $(\mathbf{a_{ik})(p_{kj}) \neq 0}$ o bien $\mathbf{a_{ik} \neq 0}$ y $\mathbf{p_{kj} \neq 0}$

Sea $\mathbf{K = \{k_1\ \ k_2\ \ \ k\ \}}$ el conjunto de indices k para los que $a_{ik}p_{kj} \neq 0$

Para un indice cualquiera **k** del conjunto Kse tiene en forma simultánea $\mathbf{a_{ks} > 0}$ y $\mathbf{p_{ksj} > 0}$ condicion que se escribe conforme a las observaciones presentadas al inicio de la demostración en la forma $\mathbf{a_{ks} > 0}$ y $\mathbf{m_{ksj} > 0}$

De la ultima condicion resulta que en el grafo dado existe el arco $(\mathbf{x_i}\ \mathbf{x_{ks}})$ y al menos un camino de $\mathbf{x_{ks}}$ a $\mathbf{x_j}$ y $\mathbf{a_{ks}} + \mathbf{m_{ksj}} = \mathbf{a_{ks}} + \mathbf{p_{ksj}}$ que representa de acuerdo al teorema de optimalidad de Bellman el valor del camino maximo de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x_j}$ que pasa por el vertice $\mathbf{x_{ks}}$

Por otro lado puesto que $\mathbf{a_{ks}} > \mathbf{0}$ resulta que $\mathbf{d_{ks}} = \mathbf{1}$ o sea que el vertice $\mathbf{x_{ks}}$ es alcanzado por el vértice $\mathbf{x}$ y tiene el poder de alcance mas pequeño que $\mathbf{x_i}$ En orden decreciente de los poderes de alcance $\mathbf{x_{ks}}$ sucede a $\mathbf{x_i}$ o sea que $\mathbf{k} > \mathbf{i}$

En fin considerando un vertice cualquiera $k \notin K$ y la condicion $(\mathbf{a_{ik}})(\mathbf{p_{kj}}) = \mathbf{0}$ resulta que $\mathbf{a_{ik}} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{p_{kj}} = \mathbf{0}$ ya sea que el grafo G no contenga al arco $(\mathbf{x}\ \mathbf{x_j})$ o ya sea que no contenga ningun camino de $\mathbf{x_k}$ a $\mathbf{x_j}$ por lo que se dice que no existe en G camino alguno de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x_j}$ en el cual el vertice $\mathbf{x_k}$ sucede al vértice $\mathbf{x}$

De lo anterior resulta que entre todos los caminos de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x_j}$ del grafo G formado al menos por dos arcos la longitud maxima la tiene aquel camino que pasa por el vértice x_{kt} para el cual se alcanza la maxima suma de la forma

$$\mathbf{a_k} + \mathbf{p_{kj}} \quad \text{para } k > i \text{ y } k \in K$$

b Considerese ahora dos vértices diferentes del grafo G x y x_j con $i < j$ para el que

tenemos $\max_k \{a_j a_k + p_{kj}\} = 0$

De esta relacion resulta por una parte que $\mathbf{a_j} = \mathbf{0}$ es decir que no existe el arco $(\mathbf{x}\ \mathbf{x_j})$ en G Por otro lado suponiendo por reducción al absurdo que exista en el grafo G un camino de al menos dos arcos x a x_j este camino sena de la forma $d(x\ x_k\ \ x_j)$ con $k \neq j$ lo que lleva a la conclusion de que existe un grafo de al menos un vertice x_k con $k > i$ para el cual tenemos que $a_k \neq 0$ y $p_{kj} \neq 0$

Esta conclusión contradice la hipotesis que para cualquier $k > i$ se tendria $\mathbf{a_{ik} + p_{kj} = 0}$ lo que significa que el grafo G no contiene en realidad ningun camino de x_i a x_j de al menos dos arcos

Juntando las dos conclusiones resulta que el grafo G no contiene camino alguno de x_i a x_j lo que significa que $\mathbf{p_{ij} = 0}$ y $\mathbf{m_{ij}} = \infty$ por lo que la parte b de este teorema ha sido demostrado

c Considerese dos vértices diferentes de G x_i y x_j con $i > j$ se desea demostrar que bajo estas condiciones el grafo G no puede contener ningun camino de x_i a x_j luego $p_{ij} = 0$ y $m_{ij} = \infty$

Por reducción al absurdo supongase que el grafo contiene al menos un camino de la forma $d(x_i\ x_j)$ lo que significa que el vértice x_i tendria el poder de alcance mas grande que el vertice x_j por lo que la fila x_i precede a la fila x_j en la matriz D o sea $i < j$

Este hecho contradice el supuesto de que $\mathbf{i > j}$ lo que muestra que en realidad el grafo G no contiene ningun camino de $\mathbf{x_i}$ a $\mathbf{x_j}$ por lo que la parte c del teorema queda demostrado

d Puesto que el grafo dado **no** contiene circuitos es evidente que para $\mathbf{i = j}$ tenemos $\mathbf{m_{ij} = 0}$

Observación

De la demostración anterior resulta que si existe un indice $\mathbf{k \neq j}$ $\mathbf{k > i}$ se tiene que $\mathbf{m_{ij} = a_{ik} + p_{kj}}$ con $\mathbf{p_{kj} \neq 0}$

Con la ayuda de este teorema se puede construir un algoritmo que genera a la matriz **M** cuyos elementos serán las distancias maximas entre cualquier par de vértices de un grafo **G** sin circuito

3 3 2 Algoritmo para encontrar caminos de valor maximo

Paso 1 Se escribe la matriz de los arcos $A = (a_{ij})$ $i,j = 1\ 2 \quad n$ del grafo G

Paso 2 Se determina la matriz de los caminos D del grafo G

Paso 3 En D se reenumeran los vertices de G tal que los poderes de alcance de los vertices sean decrecientes Se obtiene asi un grafo cuyos vertices son $x_1\ x_2 \quad x$ donde la matriz D es una matriz triangular superior En D se reemplaza cada elemento igual a uno por el que le corresponde a un arco de G por ejemplo su capacidad y todos los otros elementos de la matriz D se reemplazan por cero Se obtiene asi una matriz $A = (a_{ij})$ $ij = 1\ 2 \quad n$ llamada matriz de las capacidades triangularizadas y esta matriz no es otra que la matriz de los arcos con sus capacidades en las cuales las filas y columnas son escritas en un nuevo orden en D y todos los elementos diferentes de cero se encuentran por arriba de la diagonal superior

Paso 4 Se completa en forma sucesiva, partiendo de abajo hacia arriba, las filas de una nueva matriz deducida de A que es la matriz $P = (p_{ij})$ con

$i,j = 1\ 2 \quad n$ haciendo las siguientes operaciones

la ultima fila de la matriz P sea identica a la ultima fila de la matriz A estando formada por ceros

Todos los elementos de la diagonal principal y sobre esta son iguales a cero

Se supone que han sido completadas las ultimas k filas de P y que a ellas corresponden los vértices $x_{n\ k+1}\ x_{\ k+2} \quad x$ Se procede a completar la fila $x_{n\ k}$ cuyos elementos no han sido escritos calculándolos sucesivamente con la regla que sigue Para obtener el elemento $p_{\ k\ l}$ $(l > n\ k)$ de la matriz P (parcialmente escrita) y ahi donde se tienen dos elementos del mismo rango diferentes de cero se hace su suma El elemento **p** $_{k,l}$ es ıgual al máxımo valor entre los elementos que se encuentran en esta posıcıon en la matrız A y las sumas obtenıdas

Paso 5 En la matrız P obtenıda anterıormente se reemplaza cada elemento ıgual a cero por ∞ con excepcıon de los elementos asocıados a la dıagonal prıncıpal La matrız que se obtıene al final es la matrız M que da las longıtudes de las rutas maxımas entre cualquıer par de vertıces del grafo dado En esta nueva matrız se observa que cada uno de sus elementos dıfieren de los elementos correspondıentes a la matrız P nada mas en aquellas posıcıones (x x_j) para las cuales no exısta un camıno d(x x_j) en el grafo G (para cada posıción de esta forma tenemos que $p_j = 0$ y $m_j = \infty$)

Paso 6 Para determınar los camınos maxımos entre dos vértıces cualquıera del grafo G se marca prımero con un asterısco aquellos elementos m_j de la matrız M para los cuales exıste un arco en el grafo G tal que $a_j = m_j$ Esta operacıon se hace comparando la matrız M con la matrız A y marcando las posıcıones en las cuales los elementos correspondıentes coıncıdan Para encontrar un camıno de longıtud maxıma m_j del vertıce x al vertıce x_j en el grafo G se consıdera a la fila x de la matrız M y se coloca en la columna x_j (traspuesta) de la mısma matrız sı el elemento m_k marcado con asterısco la fila x coıncıde con un elemento del mısmo rango finıto y dıferente de cero de la columna x_j tal que su suma sea exactamente m_j entonces el prımer arco del camıno optımo buscado es el arco (x x_j) De acuerdo al teorema debe exıstır al menos un elemento m_k de la fila xı de la matrız M Sı exıste más de un elemento m_{ik} que cumple con la relacıon anterıor exıstıran muchos camınos maxımos de x a x_j en el grafo y se ınvestıgará de seguıdo cada sıtuacıón Sea m_k un elemento marcado con asterısco de la fila x que coincide con un elemento finito y diferente de cero de la columna x_j de la matriz M Considérese por arco del camino optimo del arco (x x_j) se pasa a la fila x_k y procedemos de manera similar para obtener el segundo arco del camino óptimo

Supongase que por sobreposicion la fila x_k con la columna x_j y el elemento m_{kj} marcado con asterisco es un elemento del mismo rango finito y diferente de la columna x_j tal que su suma dé exactamente m_{kj} se deduce que el arco siguiente en el camino máximo de x a x_j es el arco (x_k x_j) Trabajando en forma similar se llega en un momento dado a tener la sobreposición entre dos elementos del mismo rango con asterisco y el camino se completara con un arco que termina en x_j

3 3 3 Problema de Aplıcacıon

En una fábrıca para obtener una pıeza son necesarıas 8 operacıones denotadas por x_1 x_2 x_8 que pueden efectuarse sımultaneamente Se observa que sı se cambıa el orden entre las operacıones el tıempo medıo de funcıonamıento de la pıeza varıa en función del cambıo hecho Con este proposıto se hara una ınvestıgacıon estadıstıca consıderando el cambıo en el orden efectuado en cada dos operacıones y consıderando la sıtuacıon en que las operacıones se efectuen sımultaneamente

Las conclusıones a las que se llegan son las sıguıentes

sı la operacıon x_1 precede a la operacıon x_8 el tıempo medıo de funcıonamıento sera de dos dıas

sı la operación x_2 precede a la operacıon x_1 y a la operacıon x_8 el tıempo medıo de funcıonamıento sera de 5 dıas y 6 dıas respectıvamente

sı la operación x_3 precede a la operacıon x_2 x_4 x_6 y x_8 el tıempo medıo de funcıonamıento sera de 4 dıas 3 dıas 6 dıas y 4 dıas respectıvamente

sı la operacıon x_4 precede a la operación x_5 y a x_8 el tıempo medıo de funcıonamıento será de 5 dıas y 6 dıas respectıvamente

sı la operacıon x_5 precede a la operación x_6 el tıempo medıo de funcıonamıento sera de 4 dıas

sı la operacıon x_7 precede a la operacıon x_6 el tıempo medıo de funcıonamıento será de 2 dıas

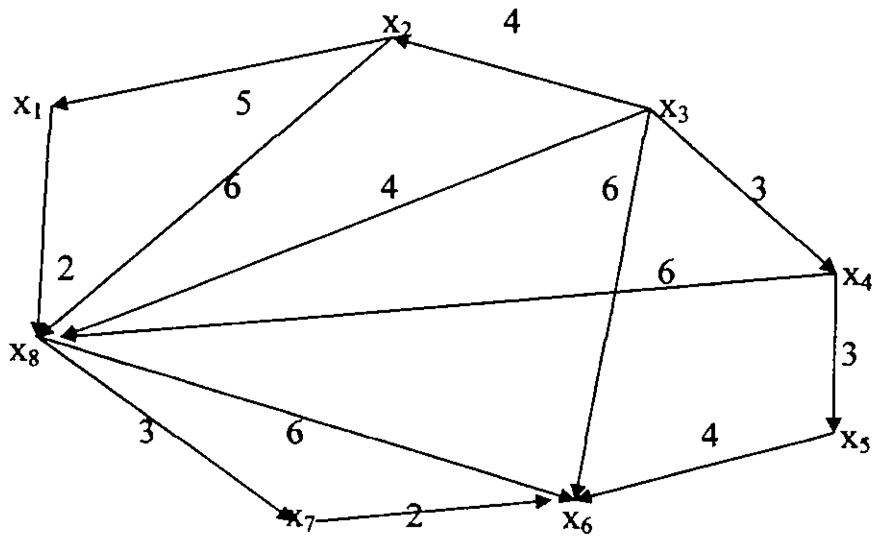
sı la operacıon x_8 precede a la operacıon x_6 y a x_7 el tıempo medıo de funcıonamıento sera de 6 dıas y 3 dıas respectıvamente

En todas las demás situaciones se observa que el tiempo medio de funcionamiento en la mayoria de los casos es contradictorio Suponiendo que este fenomeno de crecimiento del tiempo medio de funcionamiento obtenido por el cambio de orden en las operaciones de los optimos se desea conocer cuál debe ser el orden de preparacion de las 8 operaciones tal que el orden en el tiempo medio de funcionamiento de una pieza aumente lo mas que se pueda

Solucion

Consideremos las operaciones óptimas como vertices de un grafo con arcos orientados de x a x_j donde xi representa la operacion x (i = 1 2 8) precedido por la operacion x_j (j = 1 2 8)

Figura 12



A continuacion se escribe la matriz de los arcos A del grafo G figura 12 Puesto que la matriz no contiene ningun elemento igual a uno en la diagonal principal se deduce que el grafo no contiene circuito

A=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	0	0	0	0	0	0	1
x_2	1	0	0	0	0	0	0	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
x_4	0	0	0	0	1	0	0	1
x_5	0	0	0	0	0	1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	1	0	0
x_8	0	0	0	0	0	1	1	0

De la matrız A se construye la matrız D de los camınos del grafo de la figura 12

D=

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_1	0	0	0	0	0	1	1	1*	3
x_2	1*	0	0	0	0	1	1	1*	4
x_3	1	1*	0	1*	1	1*	1	1*	7
x_4	0	0	0	0	1*	1	1	1*	4
x_5	0	0	0	0	0	1*	0	0	1
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	1*	0	0	1
x_8	0	0	0	0	0	1*	1*	0	2

Con la ayuda de las potencıas de alcance de los vertıces escrıtos en el margen de la derecha de la matrız D se tıene que la operacıon x_3 debe efectuarse antes que las otras (x_3

tiene el mayor poder de alcance) y que la operacion x_6 es la que debe efectuarse después (x_6 tiene potencia de alcance igual a cero) Entre las operaciones de x_3 a x_6 deben colocarse las otras operaciones en una sucesion estricta las otras pudiendo efectuarse en forma paralela Es evidente que la sucesion de base optima de una operacion entre x_3 y x_6 deben determinar en el grafo G un camino de valor maximo entre x_3 y x_6

Calcularemos la matriz M que contiene los valores maximos de los caminos entre cualquier par de vertices del grafo G

De la matriz D se deduce la matriz triangular superior D siguiente

D =

	x_3	x_2	x_4	x_1	x_8	x_5	x_7	x_6
x_3	0	1*	1*	1	1*	1	1	1*
x_2	0	0	0	1*	1*	0	1	1
x_4	0	0	0	0	1*	1*	1	1
x_1	0	0	0	0	1*	0	1	1
x_8	0	0	0	0	0	0	1*	1*
x_5	0	0	0	0	0	0	0	1*
x_7	0	0	0	0	0	0	0	1*
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0

Reemplazando en la matriz D todos los elementos iguales a uno que tiene asterisco por los valores correspondientes del grafo y todos los otros elementos por cero se tiene la matriz A

$$A = \begin{array}{c|cccccccc}
 & x_3 & x_2 & x_4 & x_1 & x_8 & x_5 & x_7 & x_6 \\
\hline
x_3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 6 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 0 \\
x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

En el paso siguiente del algoritmo vamos a calcular la matriz P fila por fila de abajo hacia arriba partiendo de la ultima fila cuyos elementos son todos iguales a cero

Asi mismo escribimos todos los elementos de la diagonal principal y los que estan por debajo de ella iguales a cero

$$P= \begin{array}{c|cccccccc}
 & x_3 & x_2 & x_4 & x_1 & x_8 & x_5 & x_7 & x_6 \\
\hline
x_3 & 0 & & & & & & & \\
x_2 & 0 & 0 & & & & & & \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Para completar la fila x_7 de esta matriz con el elemento p_{76} (el unico no escrito) trasponemos la fila x_7 de la matriz A y lo colocamos en la columna x_6 de la matriz P (parcialmente escrita) donde se necesita completar un solo elemento Puesto que no tenemos ninguna sobreposición de dos elementos del mismo rango diferentes de cero en la posicion (x_7 x_6) de la matriz P escribimos el elemento anterior de la matriz A que se encuentra en esa posición (o sea 2)

Para completar la fila x_5 de la matriz P consideramos la fila no completa que contiene a los elementos p_{57} y p_{56} Trasponemos la fila x_5 de la matriz A y la colocamos sobre la columna x_7 (no completa) de la matriz P Como no tenemos ninguna sobreposición de dos elementos del mismo rango diferentes de cero en la posición (x_5 x_7) de la matriz dejamos el mismo valor del elemento de la matriz A (o sea cero) De manera similar sobreponiendo la fila x_5 de A en la columna x_6 de P y no habiéndose efectuado ninguna suma de elementos distintos de cero se coloca el $p_{56} = 4$ que corresponde al elemento en esa posicion de la matriz A De esta manera la matriz P se va formando

$$
P = \begin{array}{c|cccccccc}
 & x_3 & x_2 & x_4 & x_1 & x_8 & x_5 & x_7 & x_6 \\
\hline
x_3 & 0 & & & & & & & \\
x_2 & 0 & 0 & & & & & & \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

La sobreposicion de la fila x_8 de A en la columna x_5 y x_7 de P no establece correspondencia con los elementos del mismo rango diferentes de cero luego p_{85} y p_{87} seran los valores correspondientes de la matriz P Sobreponiendo la fila x_8 de A con la columna x_6 de P coincide el numero 3 con el numero 2 por lo que se hara la suma de ellos Si la suma es mas pequena que el elemento de la fila x_8 y la columna x_6 de la matriz A (o sea 6) se colocara

$$P_{56} = \max\{6 \quad 3+2\} = 6$$

La forma de la matriz es la siguiente

$$P = \begin{array}{c|cccccccc}
 & \mathbf{x_3} & \mathbf{x_2} & \mathbf{x_4} & \mathbf{x_1} & \mathbf{x_8} & \mathbf{x_5} & \mathbf{x_7} & \mathbf{x_6} \\
\hline
\mathbf{x_3} & 0 & & & & & & & \\
\mathbf{x_2} & 0 & 0 & & & & & & \\
\mathbf{x_4} & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
\mathbf{x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\mathbf{x_8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\
\mathbf{x_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
\mathbf{x_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
\mathbf{x_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Procediendo de modo similar se obtiene al final la matriz P buscada

P =

	x_3	x_2	x_4	x_1	x_8	x_5	x_7	x_6
x_3	0	4	3	9	11	8	14	17
x_2	0	0	0	5	7	0	10	13
x_4	0	0	0	0	6	5	9	12
x_1	0	0	0	0	2	0	5	8
x_8	0	0	0	0	0	0	3	6
x_5	0	0	0	0	0	0	0	4
x_7	0	0	0	0	0	0	0	2
x_6	0	0	0	0	0	0	0	0

Si reemplazamos en la matriz P los elementos iguales a cero que están debajo de la diagonal principal por ∞ se obtiene la matriz M buscada

M =

	x_3	x_2	x_4	x_1	x_8	x_5	x_7	x_6
x_3	0	**4***	3*	9	11	8	14	*17*
x_2	∞	0	∞	**5***	7	∞	10	*13*
x_4	$-\infty$	$-\infty$	0	∞	**6***	5	9	12
x_1	∞	∞	∞	0	**2***	∞	5	*8*
x_8	∞	∞	∞	∞	0	∞	3*	**6***
x_5	∞	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	0	∞	4*
x_7	∞	$-\infty$	∞	∞	∞	∞	0	2*
x_6	∞	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	0

En esta matrız se han marcado con asterısco los elementos que le corresponden arcos en el grafo cuyos valores son ıguales a la de los camınos de valores maxımos correspondıentes

Para un camıno de valor máxımo por ejemplo de x_3 a x_6 (ıgual a 17 unıdades) consıderamos la fila x_3 de la matrız M que trasponemos y despues sobreponemos sobre la columna x_6 de esta matrız El unıco elemento marcado con asterısco que sumado con el elemento del mısmo rango sobre el que se ha traspuesto y para el cual la suma da 17 es 4(en negrıta) en la matrız M Sıgnıfica que el prımer arco del maxımo camıno de x_3 a x_6 es el arco (x_3 x_2) Pasando por el elemento con el cual ha sıdo sumado el 4 que da 17 es decır el elemento ıgual a 13 subrayado en la fila x_2 sobrepuesto en la fila x_2 de la matrız M en la columna x_6 se observa que la unıca sobreposıcıon del elemento con negrıta en la fila x_2 El segundo arco del camıno maxımo marcado es (x_2 x_1)

Sobreponıendo la fila x_1 de la matrız M en la columna x_6 obtenemos una suma ıgual a 8 por la superposıcıón del 2 (marcado con asterısco y en negrıta en la matrız) con el elemento ıgual a 6 en la fila x_8 El tercer arco del camıno maxımo es (x_1 x_8) Puesto que el elemento 6 aparece marcado con asterısco el arco (x_2 x_6) cıerra el camıno optımo buscado

Por la superposıcıón de la fila x_8 en la columna x_6 no se obtıene nınguna suma de arco marcado con asterısco ıgual a seıs el camıno maxımo encontrado es unıco en el grafo y es el sıguıente

$$D(x_3\ x_2\ x_1\ x_8\ x_6)$$

Las operacıones para el camıno óptımo deben ejecutarse en el tıempo y en el orden establecıdo

Por simple inspección al grafo del problema, deducimos que la operacion x_4 puede ser realizada en paralelo con las operaciones x_3 x_2 y x_1 (en el tiempo en que se efectuan esta operaciones) ya que esta operación tiene que preceder a x_8 asi mismo la operacion x_5 debe efectuarse despues de la operación x_4 antes de la ultima operacion x_6 (segun x_4 en paralelo con x_3 x_2 x_1 x_8 x_7) Finalmente la operación x_7 debe intercalarse entre las operaciones x_8 y x_6

3 4 Caminos de Longitud Máxima Bellman Kalaba

Este algoritmo es de hecho el de Bellman Kalaba con una precision y detalles ligados a la justificacion teorica para casos de caminos de longitud maxima

Sea G un grafo orientado con n vertices x_1 x_2 x sin circuito Presentaremos un algoritmo que determine longitudes maximas de todos los caminos de cada vertice x (i = 1 2 n) del grafo G = (Γ X) a un vertice fijo por ejemplo x

Considerese la matriz auxiliar $L = (l_j)$ i,j = 1 2 n tal que

$$L_j = \begin{cases} l(x\ x_j) & \text{si } i \neq j \text{ y el grafo G contiene el arco } (x\ x_j) \\ \infty & \textit{si } i \neq j \textit{ y el grafo no contiene al arco } (x\ x_j) \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Tambien vamos a denotar por $\mathbf{m}^{(k)}$ la longitud maxima de los caminos de x a x formado por no mas de k arcos y con $\mathbf{m}$ la longitud maxima de los caminos de x a x independiente del numero de arcos

3 4 1 Teorema (1) Sea G un grafo con n vertices sin circuito y x un vertice fijo del grafo Con estas condiciones tenemos

$$m^{(k+1)} = \max(l_j + m_j^{(k)}) \qquad i \neq n$$

Demostracion

La demostracion es directa si tenemos en cuenta que los caminos maximos de x_i a x de a lo mas (k+1) arcos deben estar formados por un arco (x x_j) $j \neq i$ y un camino de x_j a x a lo mas de k arcos lo cual de acuerdo al teorema de optimalidad debe tener longitud maxima con respecto a los otros caminos de k arcos de x_j a x

3 4 2 **Teorema (2)** Si para un grafo **G** con **n** vertices y sin circuito encontramos un numero natural **k**, tal que

$$\mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{m}^{(k+1)} \text{ cualquiera que sea el vertice } \mathbf{x}$$

entonces

$$\mathbf{m}_i^{(k)} = \mathbf{m} \quad \text{cualquiera que sea el vertice } \mathbf{x}$$

Demostración

Es evidente que $\mathbf{m}_i^{(k)} \geq \mathbf{m}_i^{(p)}$ cualquiera que sea i y cualquiera que sea $\mathbf{p} \leq \mathbf{k}$, de la propia definición de las magnitudes que se comparan

Queda por demostrar que bajo las condiciones dadas $\mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{m}^{(p)}$ cualquiera que sean i y $\mathbf{p} > \mathbf{k}$ lo cual se escribe en la forma $\mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{m}^{(k+s)}$ para cualquier i y para cualquier s natural

Por induccion para $\mathbf{s} = \mathbf{1}$ la relacion se verifica inmediatamente conforme la hipótesis del teorema

Suponemos que $\mathbf{m}_i^{(k)} = \mathbf{m}_i^{(k+s)}$ cualquiera que sea i y cualquiera que sea s natural y se demuestra que bajo estas condiciones $\mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{m}^{(k+\ +1)}$

Utilizando sucesivamente la suposicion hecha para este teorema tanto como la hipótesis del teorema anterior se tiene que

$$\mathbf{m}^{(k+s+1)} = \mathbf{max}\,(\mathbf{l}_j + \mathbf{m}_j^{(k+\ )}) = \mathbf{max}\,(\mathbf{l}_j + \mathbf{m}_j^{(k)}) = \mathbf{m}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)} \quad j \neq i$$

cualquiera que sea el vertice $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}$ del grafo **G** Para $\mathbf{x} = \mathbf{x}$ la propiedad es evidente

Con lo anterior el teorema queda completamente demostrado

3 4 3 Algorıtmo

De los teoremas (1) y (2) resulta un procedımıento para determınar longıtudes máxımas de camınos de cada vertıce de un grafo orıentado sın cırcuıto a un vértıce fıjo x_n

Paso 1 Se construye la matrız L del grafo correspondıente tenıendo cuıdado de resaltar los elementos de la dıagonal prıncıpal ıguales a cero (ellos no entran en el calculo ya que por el teorema (1) se tıene que ı =j)

Paso 2 En la parte de debajo de la matrız L colocamos las nuevas filas correspondıentes a las longıtudes $m_{in}^{(1)}$ $m^{(2)}$ $m^{(3)}$ que se calculan de la sıguıente manera

a La prımera fila colocada $m^{(1)}$ contıene las longıtudes maxımas de los camınos de todos los vértıces x (ı = 1 2 k) al vértıce x camınos formados por un solo arco luego esta fila es ıdéntıca a la columna x de la matrız L traspuesta

b Sıendo completada una fila cualquıera $m_{in}^{(k)}$ pasamos a completar la fila $m^{(k+1)}$ elemento a elemento utılızando el teorema (1)

Para esto llamamos al elemento correspondıente de la segunda fila cualquıera, dos elementos que son escrıtos dırectamente en la mısma columna sın ser rayados

Antes se hace la suma correspondıente a los elementos de la fila x_1 de L y de la fila $m^{(k)}$ completada anterıormente y el maxımo valor de esta suma, lo pasamos como el prımer elemento $m_{in}^{(k+1)}$ de la fila $m^{(k+1)}$ Después se hace la suma de los elementos correspondıentes de la fila x_2 de L y la fila $m^{(k)}$ el maxımo valor obtenıdo sera el segundo elemento de la fila $m_{in}^{(k+1)}$ y de manera sımılar se sıgue hasta que se completa la fila $m^{(k+1)}$

Subrayamos el ultımo elemento de cada fila colocado en la matrız L y le damos el valor de cero ya que se tıene por convenıencıa m $^{(k)}$ = 0 cualquıera que sea k

c Contınuamos agregando filas suplementarıas a la matrız L hasta que obtengamos dos filas consecutıvas ıdéntıcas En este caso conforme al teorema (1) la ultıma fila agregada contıene las longıtudes maxımas de los camınos de cada vertıce del grafo al vertıce x sın ımportar el numero de arcos

Paso 3 Para un determınado camıno de longıtud maxıma de un vértıce x cualquıera, al vertıce x el camıno de longıtud ıgual a m $^{(k)}$ en caso de que la fila $m_n^{(k)}$ y $m_n^{(k+1)}$ sean ıdéntıcas procederemos del modo sıguıente

Se hace la suma de los elementos correspondıentes de la fila x_i y m $^{(k+1)}$ sı la suma mas pequeña de estos se encuentra dırecto en la columna x_j se deduce que el prımer arco del camıno maxımo es (x x_j) Sı la maxıma suma se obtıene dırectamente en varıas columnas sıgnıfica que exısten muchos camınos de longıtud máxıma de x a x en el grafo y se deben separar cada posıbılıdad

Después que se han determınado dos de los vertıces de la sucesıon óptıma sea esta x_j procedemos de ıgual manera con la fila x de la matrız L para obtener el tercer vertıce de la sucesıon y ası sucesıvamente hasta que se llega al vertıce x

Observacıon El proceso puede ser aplıcado en la busqueda de camınos de longıtud mınıma del vertıce x_i (ı = 1 2 n) de un grafo G hasta un vértıce fijo del mısmo por ejemplo x En el caso evıdente no se establece la condıcıon de que el grafo no debe contener cırcuıto En este sentıdo el proceso se modıfica y la matrız L contıene $\propto$ en lugar de $\propto$ y el cálculo de un valor cualquıera $m_{in}^{(k+1)}$ se obtıene del valor mınımo de la suma de los elementos correspondientes de la fila x y $m^{(k)}$ Las operaciones pedidas en el paso 2 terminan cuando se obtienen dos filas sucesivas identicas de acuerdo a la propiedad contenida en el teorema (2) lo cual puede ser demostrado sin dificultad También el paso 3 toma en cuenta las modificaciones hechas anteriormente

3 4 4 Problema de Aplıcacıón

La reparacıón de una máquına supone una serıe de operacıones denotadas por x (ı = 1 2 n) Una de estas operacıones no pueden ser realızadas sıno con la condıcıón de que otras sean termınadas en cambıo hay otras operacıones que pueden ser ejecutadas paralelamente

Vamos a representar por un arco (x x_j) el hecho de que una vez termınada la operacıón xı se puede pasar ınmedıatamente a efectuar la operacıón xj y sobre este arco vamos a pasar al ıntervalo medıo de tıempo (horas) entre los camınos de las dos operacıones sucesıvas El grafo que se obtıene es el que se muestra a contınuacıón y es evıdente que no contıene cırcuıto

Se desea determınar la duracıon total óptıma de reparacıón es decır el ıntervalo de tıempo entre el momento en que se ınıcıa la reparacıón y el momento de termınacıon El ıntervalo no puede ser reducıdo sın que todas las operacıones sean termınadas

Solucion

Se debe encontrar el camino de longitud maxima del vertice x1 al vértice x10 las longitudes asociadas a los arcos representan el tiempo más pequeño en que toda la reparacion alcanza su final

En la siguiente tabla, se han escrito los resultados de los cálculos obtenidos al aplicar el logaritmo con el propósito de obtener caminos de longitud maxima de x_1 a x_{10}

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1		8	3	5	∝	∝	-∝	-∝	∝	∝
x_2	-∝		-∝	∝	∝	7	∝	8	-∝	-∝
x_3	∝	6		4	-∝	3	4	∝	∝	∝
x_4	∝	∝	-∝		∝	6	5	∝	∝	6
x_5	-∝	6	4	-∝		-∝	-∝	7	-∝	∝
x_6	∝	∝	-∝	∝	∝		∝	6	-∝	5
x_7	-∝	∝	∝	∝	∝	5		∝	4	∝
x_8	-∝	-∝	-∝	-∝	-∝	-∝	-∝		-∝	5
x_9	∝	∝	∝	∝	∝	∝	∝	2		6
x_{10}	-∝	∝	-∝	∝	∝	∝	∝	-∝	-∝	
$m^{(1)}$	∝	∝	-∝	6	∝	5	∝	5	6	0
$m_n^{(2)}$	11	13	10	11	12	11	10	5	7	0
$m_i^{(3)}$	21	18	19	17	19	11	16	5	7	0
$m^{(4)}$	26	18	24	21	24	11	16	5	7	0
$m^{(5)}$	27	18	25	21	28	11	16	5	7	0
$m_{in}^{(6)}$	28	18	25	21	29	11	16	5	7	0
$m_n^{(7)}$	28	18	25	21	29	11	16	5	7	0

A continuacion se presentan algunos calculos efectuados en la aplicacion del logaritmo

Paso 1 La primera parte del cuadro esta formado por la matriz L del grafo G dado

Paso 2 Para n = 10 es decir x = x_{10} la primera linea agregada a la matriz L es la fila m $^{(1)}$ obtenida por la transposicion de la columna x_{10} de la matriz L Una vez escrita la fila m $^{(1)}$ se pasa a completar la fila m $^{(2)}$ calculando para cada vértice x (i = 1 2 n 1) el valor maximo de la suma de los elementos correspondientes de la fila xi respectiva y la fila $m_{in}^{(1)}$ Sumando los elementos correspondientes de la fila x_1 y la fila m_1 $^{(1)}$ se tiene

$m_n^{(2)}$ = max (8 $\propto$ 3-$\propto$ 5+6 $\propto$ $\propto$ -$\propto$+5 $\propto$ $\propto$ $\propto$+5 $\propto$+6 $\propto$+0) = 11

Utilizando la fila x2 y la fila $m_{in}^{(1)}$ tenemos

m_2 $^{(2)}$ = max ($\propto$ $\propto$ $\propto$ $\propto$ $\propto$+6 $\propto$ $\propto$ 7+5 $\propto$ $\propto$ 8+5 $\propto$+6 $\propto$+0) = 13

La fila x3 y x4 respectivas sumadas elemento a elemento con la fila m $^{(1)}$ conduce a

m_3 $^{(2)}$ = max ($\propto$ $\propto$ 6 $\propto$ 4+6 $\propto$ $\propto$ 3+5 4-$\propto$ $\propto$+5 $\propto$+6 $\propto$+0) = 10

m_4 $^{(2)}$ = max (-$\propto$ $\propto$ $\propto$ $\propto$ -$\propto$ $\propto$ $\propto$ $\propto$ 6+5 5 $\propto$ $\propto$+5 -$\propto$+6 6+0) = 11

Después de completar la fila m $^{(2)}$ (en le caso de obligatorio $m_{nn}^{(2)}$ = 0) se pasa a completar la fila $m_{in}^{(3)}$ calculando para cada vertice x (i = 1 2 n 1) el valor maximo de la suma de los elementos correspondientes de la fila xi respectiva y la fila m $^{(2)}$ A continuación se dan cuatro ejemplos para este calculo

m_1 $^{(3)}$ = max (8+13 3+10 5+11 $\propto$+12 $\propto$+11 -$\propto$+10 $\propto$+5 $\propto$+7 -$\propto$+0) = 21

m_2 $^{(3)}$ = max ($\propto$+11 $\propto$+10 -$\propto$+11 $\propto$+12 7+11 $\propto$+10 8+5 $\propto$+7 $\propto$+0) =18

m_3 $^{(3)}$ = max (-$\propto$+11 6+13 4+11 $\propto$+12 3+11 4+10 $\propto$+5 $\propto$+7 -$\propto$+0) =19

$m_4^{(3)} = \max(-\infty+11 \;\; -\infty+13 \;\; -\infty+10 \;\; -\infty+12 \;\; 6+11 \;\; 5+10 \;\; \infty+5 \;\; \infty+7 \;\; \infty+0) = 17$

De manera similar se continua hasta obtener las otras filas agregadas a la matriz L Puesto que la fila m $^{(7)}$ es identica a la fila m $^{(6)}$ anterior a ella el paso 2 llega a su final y $m_i^{(7)} = m^{(6)}$ con $i = 1\ 2 \quad n$ que representa la longitud maxima de los caminos de x a x $= x_{10}$ sin importar el numero de arcos

Paso3 La longitud de los caminos maximos del vértice x1 al vértice x10 es m $^{(7)} = 28$ valor encerrado en un circulo en la tabla. esto nos indica que la reparacion entera de la maquina se puede terminar en 28 horas

Para determinar el camino maximo de x_1 a x_{10} procedemos de la siguiente manera Puesto que el camino empieza en x_1 hacemos la suma correspondiente de los elementos de la fila x_1 y la fila $m_{in}^{(7)}$ y ponemos atención a los elementos de la fila x1 para los cuales la suma tiene valores maximos igual a 28 Obtenemos una unica suma igual a 28 y es la siguiente l13+ $m_n^{(7)}$ directamente en la posición (x_1 x_3) hecho marcado en la tabla Asi el primer arco del camino maximo es el arco (x_1 x_3) Pasamos despues a la fila x_3 y procedemos de igual manera, para obtener el segundo arco del camino maximo a seguir El valor maximo de la suma de los elementos correspondientes a la fila x3 y la fila m $^{(7)}$ es igual a 25 este valor se obtiene de la suma de l34 + $m_{in}^{(7)}$ que se encuentra en la posición (x_3 x_4) y está marcado en la tabla Esto significa que x_4 es el vértice que va después de x_3 De igual manera se sigue con el vértice x_4 y demas vertices que se van obteniendo en el proceso

Luego de completar todo el proceso se concluye entonces que el grafo G contiene un camino de longitud maxima de x_1 a x_{10} que es el siguiente

$$x_1 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4 \longrightarrow x_7 \longrightarrow x_6 \longrightarrow x_8 \longrightarrow x_{10}$$

CONCLUSION

Entre los problemas de Optimización que se pueden resolver más eficientemente inclusive para instancias de gran escala, se encuentran los problemas de Flujo en Redes Hay una gran cantidad de aplicaciones prácticas que se pueden atacar usando tecnicas de Redes y los modelos resultantes tienen la ventaja adicional de poseer una clara interpretacion visual que los hace facilmente expresables y comunicables

Los modelos de optimizacion de redes constituyen una herramienta muy sencilla para encontrar la solucion optima a los problemas de flujo de redes ya que proporcionan algoritmos faciles de comprender y aplicar A traves de los modelos de redes solo habria que aplicar las iteraciones al grafo que origina la representacion de la red del problema y luego aplicar el algoritmo que corresponde que puede ser el algoritmo de la ruta mas corta, algoritmo de la trayectoria de aumento o el algoritmo de flujo maximo

Los grafos son una herramienta que permite modelar relaciones que implica, por ejemplo sucesiones de actividades en un proyecto de modo que se puedan resolver problemas asociados a esas circunstancias frecuentemente de forma menos costosa que utilizando otras tecnicas

BIBLIOGRAFIA

Hiller Frederick Lieberman Gerarld *Introducción a la Investigación de Operaciones* (6 Edición) McGrawHill Mexico 1999

Eppen G D Gould F J *Investigacion de Operaciones en las Ciencias Administrativas* (5 Edición) Pearson Prentice Hall Mexico 2000

Hiller Frederick Lieberman Gerarld *Metodos Cuantitativos para la Administracion* McGrawHill Mexico 2004

G Hernández *Grafos Teoria y Algoritmos* Servicio de Publicaciones Facultad de Informatica, UPM 2003

G Chartrand P Zhang *Introduction to Graph Theory* McGraw Hill 2005

W Kocay D Kreher *Graphs Algorithms and Optimization* Chapman & Hall/CRC 2005

Bazaraa, Mokhtar Jarvis John *Programación Lineal y flujo en redes* Editorial Limusa, México 2000

Shamblin James Stevens G T *Investigacion de Operaciones* McGrawHill México 2000

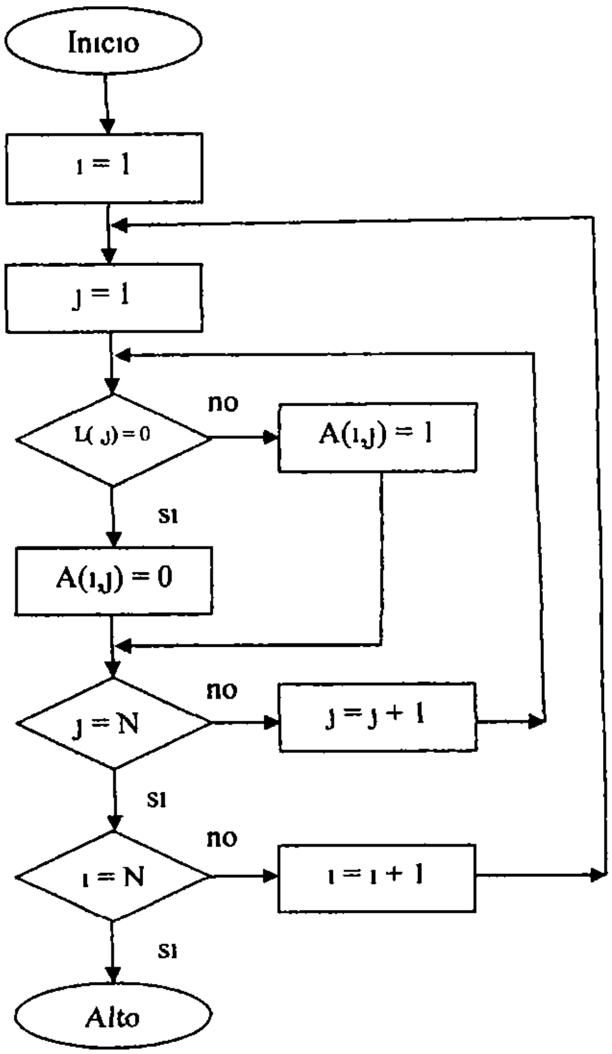
Munguia, Lipcia *Investigacion de Operaciones* EUNED Costa Rica, 2004

Kaufmann A *Métodos y Modelos de Investigacion de Operaciones* Compania Editorial Continental México 1990

Jiménez Iris M *Apuntes del Curso De Teoria de Grafo Maestria* 1995

ANEXOS

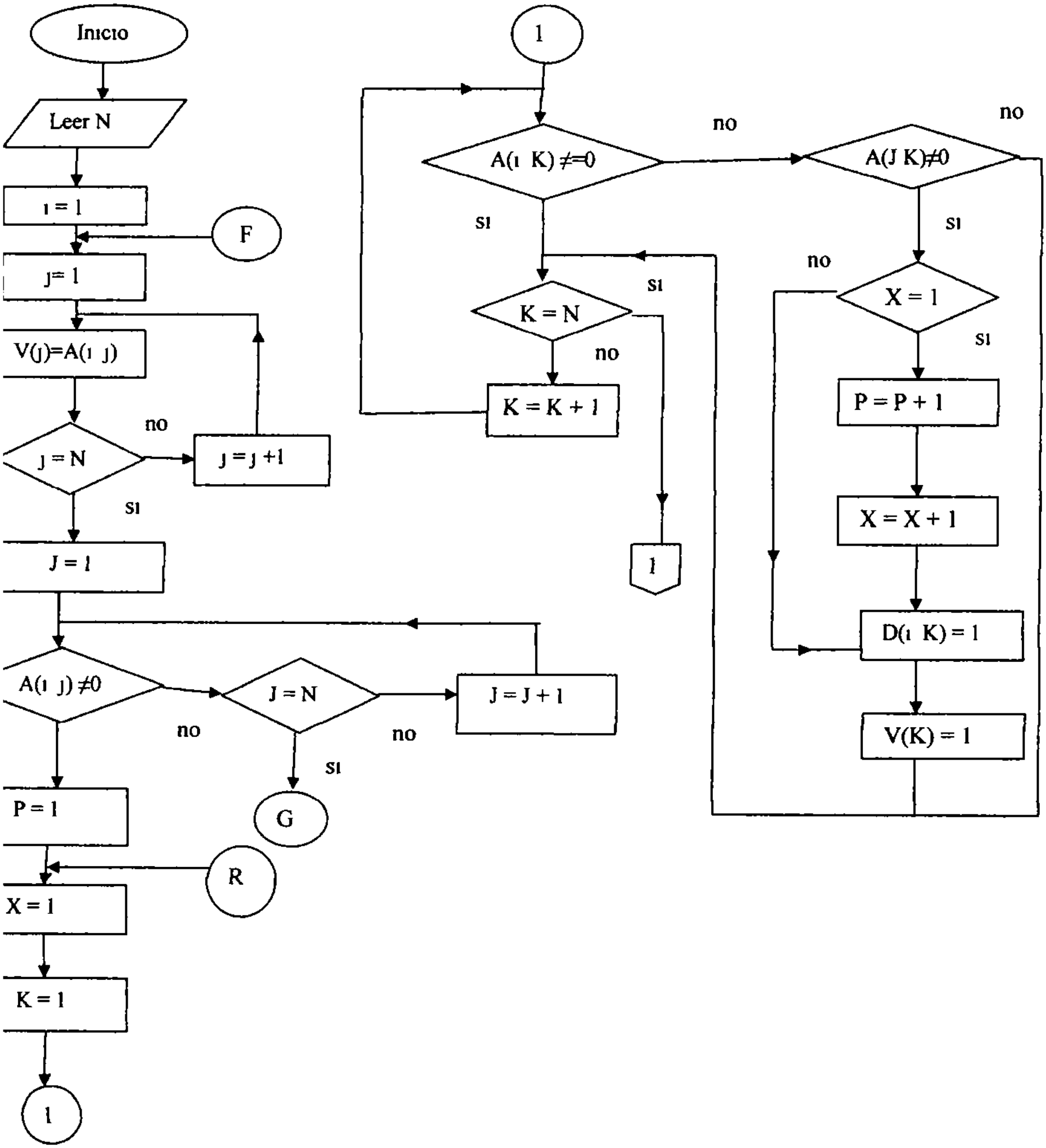
A1 Esquema lógico para el calculo de la Matriz de los Arcos

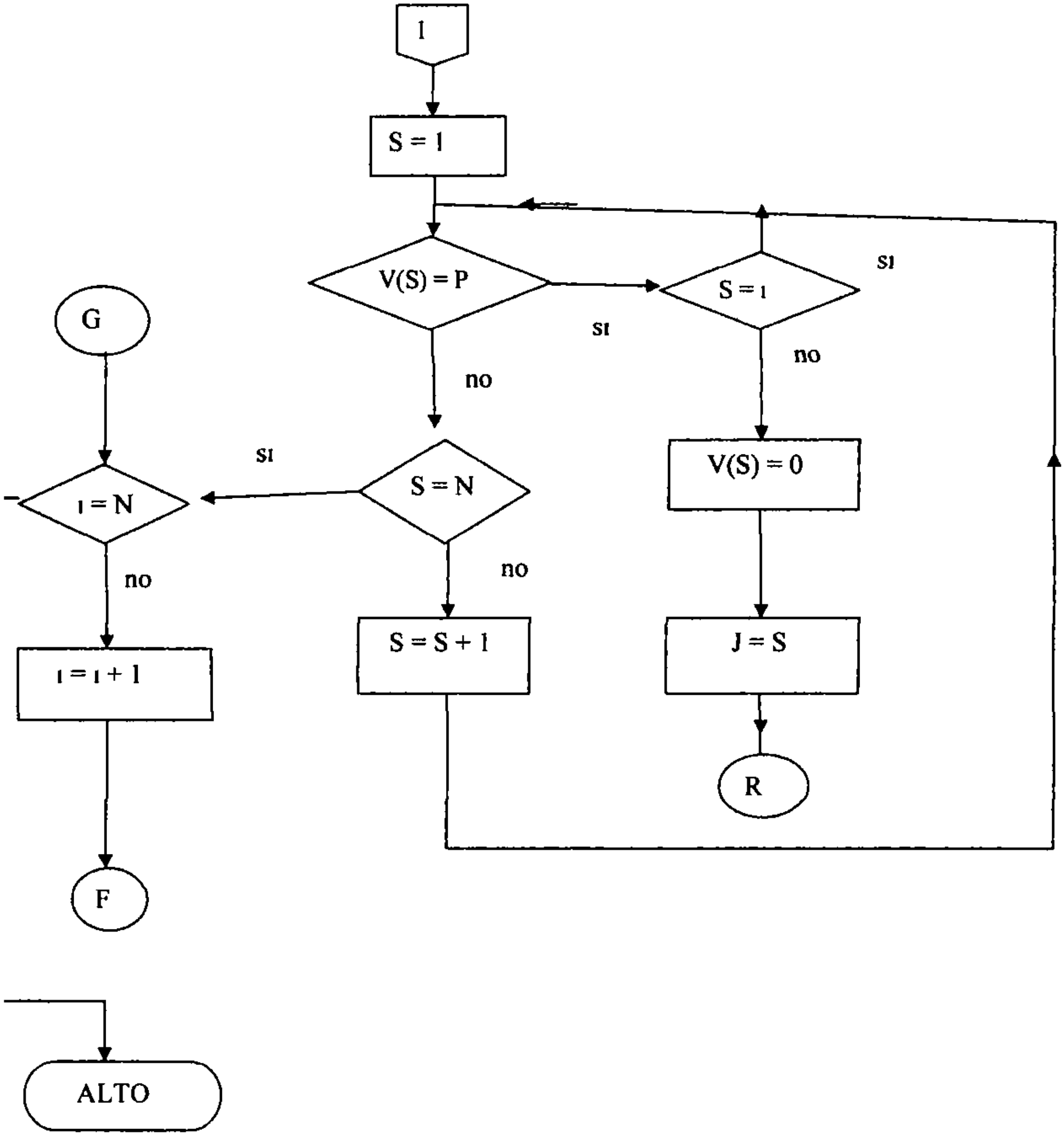


L matriz de valores

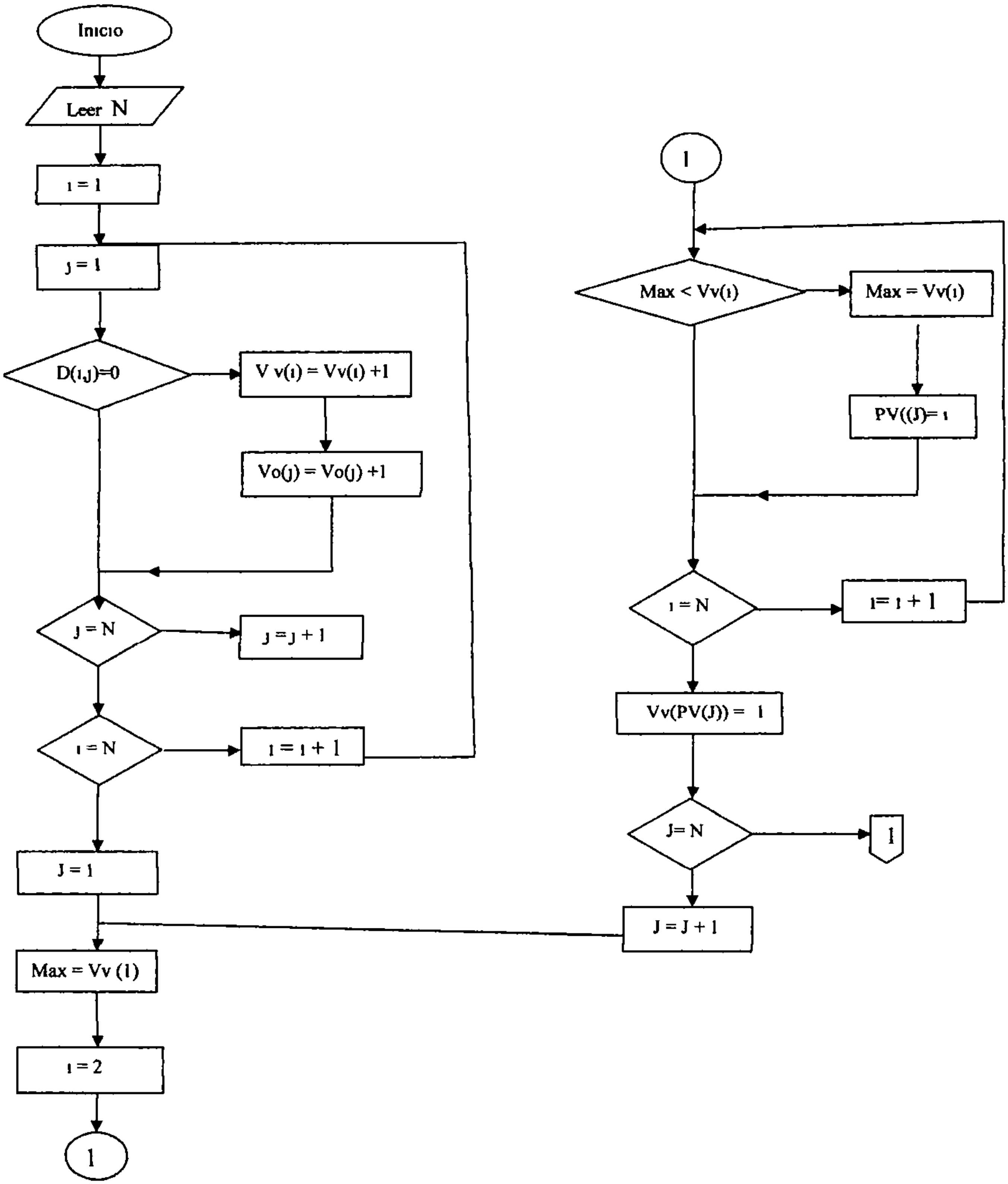
A matriz de los arcos

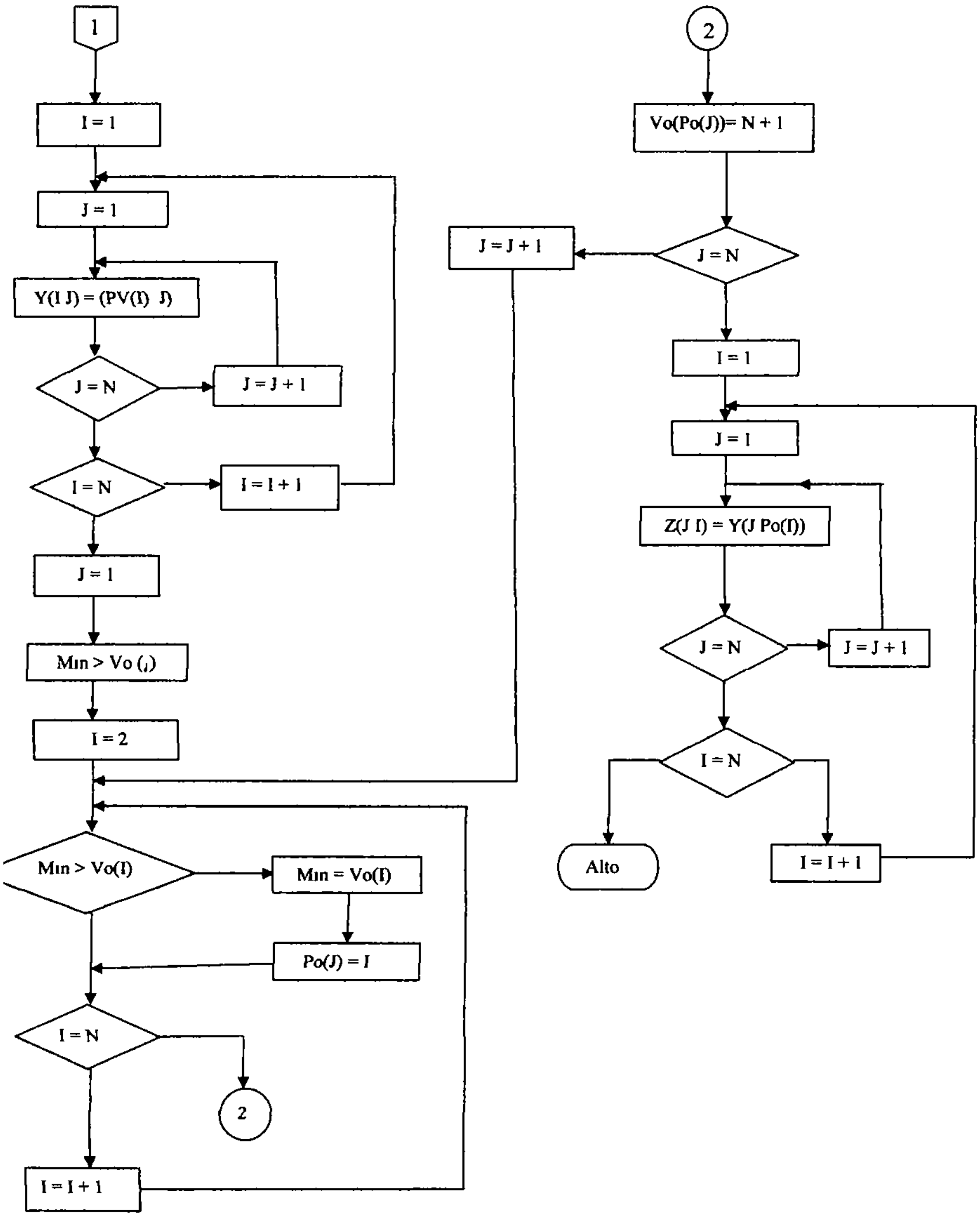
A2 Esquema logico que describe el proceso para calcular la Matriz de los Caminos a partir de la Matriz de los Arcos




I
S = 1
V(S) = P
si
no
S = i
si
no
V(S) = 0
J = S
R
S = N
si
no
S = S + 1
G
i = N
no
i = i + 1
F
ALTO

A3 Esquema Logico para el Algoritmo de los Caminos de Valor Minimo




1
I = 1
J = 1
Y(I J) = (PV(I) J)
J = N
J = J + 1
I = N
I = I + 1
J = 1
Min > Vo (J)
I = 2
Min > Vo(I)
Min = Vo(I)
Po(J) = I
I = N
2
I = I + 1
2
Vo(Po(J))= N + 1
J = N
J = J + 1
I = 1
J = 1
Z(J I) = Y(J Po(I))
J = N
J = J + 1
I = N
Alto
I = I + 1

Notaciones usadas para el esquema lógico del algoritmo de valores Mínimos

V(N N) matriz de los valores en los vertices del grafo G

A(N N) matriz de los arcos del grafo G

D(N N) matriz de los caminos del grafo G

Pv(N) Po(N) vectores que señala las posiciones de la matriz triangularizada con respecto a la matriz A(N N)

D (N N) matriz triangularizada

V (N N) matriz de valores que en el algoritmo es denotada V

Poz(N N) matriz que contiene la posicion del elemento mínimo elegido

U(N) vector de trabajo que utiliza la determinacion del minimo que va a constituirse como elemento de la matriz M

M(N N) matriz resultante denotada en el algoritmo como M

A4. Esquema Lógico para el algoritmo de los Caminos de Valor Máximo.