UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO EN LA FUNDAMENTACIÓN DEL ANÁLISIS REAL Y SUS IMPLICACIONES PEDAGÓGICAS

ÁNGELA YANETH FRANCO
6-83-622

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

VERAGUAS, REPÚBLICA DE PANAMÁ

- 2015 -

Aprobado por:

Dr. Jorge Hernández
Presidente

Dr. Jaime Gutiérrez
Miembro

Mgtr. Daniel Vásquez
Miembro

Mgrta. Giannina Núñez
Representante de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado

Fecha:____

Asesor:

JORGE E. HERNÁNDEZ U., Ph.D.

Departamento de Matemática

AGRADECIMIENTO

TODO TIENE UN MOMENTO BAJO EL SOL Y ES MOMENTO DE DAR GRACIAS:

A mi *Padre Celestial*, por haberme obsequiado la sabiduría y perseverancia necesaria para culminar esta importante etapa de mi superación profesional

Al Doctor *Jorge E Hernández U.*, quien con sus excelentes orientaciones y sugerencias, me brindo todo su apoyo para culminar de forma exitosa la elaboración de esta investigacion

Además a todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron para la realizacion de la misma

Gracias por Siempre

DEDICATORIA

Las metas son sueños y deseos que no se alcanzan facilmente Hoy cuando al culminar esta importante etapa de mi vida, tengo en el rostro reflejada la alegría que brota de mi corazón, quiero dedicar este Trabajo de Graduación

Con especial cariño a ti, mi mas preciado tesoro, por ser la fuente viva de alegría e inspiración para alcanzar este triunfo

Y a mí querido sobrino y ahijado *Dimas Hernán*, para que el mismo sirva de estímulo para el logro de sus metas profesionales

Ángela Yaneth

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

En el presente trabajo se investiga la evolución histórica del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), desde sus orígenes en el siglo XVII hasta su presentación en los siglos XX y XXI en los textos de cálculo Se exponen las teorías de integración de Cauchy, Riemann y Lebesque y se estudia la importancia del TFC en estas tres teorías Posteriormente se determinan las propiedades que debe satisfacer una función para que su derivada sea integrable, y se pueda aplicar el TFC También se demuestran algunas generalizaciones del TFC Finalmente se diseña una propuesta para la enseñanza de la derivada de las funciones trigonométricas inversas y las funciones trigonométricas basadas en el TFC, la geometría del círculo y la relación que existe entre una función y su inversa

ABSTRACT

In this work, the historical development of the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) is studied, from its origins in the XVII century until its presentation in calculus textbooks in the XX and XXI centuries The integration theory of Cauchy, Riemann, and Lebesgue are presented, and the importance of the FTC in these three theories are discussed Later, the properties that a function must satisfy for its derivative to be integrable, and that the FTC can be applied, are determined In addition, some of the generalizations of the FTC are proven Finally, this work proposes a methodology for teaching the derivative of inverse trigonometric functions and trigonometric functions based on the FTC, the geometry of circles, and the relations that exists between a function and its inverse

INTRODUCCIÓN

Uno de los ejemplos más claros en la historia del Cálculo, entre el descubrimiento y el reconocimiento de importancia, está dado por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), el cual explícitamente establece la relación inversa entre los problemas de tangentes (diferenciación) y los problemas de cuadratura (integración) Tal y como lo conocemos actualmente, el TFC es el resultado de una larga evolución de ideas Antes de su descubrimiento, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de calcular áreas, volumenes o longitud de curvas eran tan difíciles que sólo las personas con una gran pericia en la Geometría podían vencer el reto

El origen del TFC se remonta a mediados del siglo XVII con la observación de la relación que existe entre los problemas de cuadraturas y tangentes, por ejemplo, el área bajo la curva $y=x^n$ sobre el intervalo $[0,x]$ es $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, Mientras que la pendiente de la recta tangente a la curva $y=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es x^n En efecto, Isaac Barrow estableció y probó un teorema geométrico que claramente anunciaba la relación inversa entre los problemas de tangentes y cuadraturas Sin embargo, él no pudo reconocer que su teorema proveía la base para un nuevo sujeto caracterizado por un método distinto de proceder

Las contribuciones de Newton y Leibniz, a los cuales apropiadamente se le acredita el descubrimiento del cálculo, no fue meramente que ellos reconocieron el TFC como un hecho matemático, sino que emplearon este para extraer de la rica mezcla de las técnicas infinitesimales iniciales un poderoso instrumento algorítmico para cálculos sistematizados

En este trabajo se explora la historia del TFC, desde su origen en el siglo XVII hasta su presentación en los siglos XX y XXI en los textos de cálculo Por razones didácticas se ha dividido el escrito en tres capítulos En el primer capítulo titulado Orígenes del Teorema Fundamental del Cálculo, se estudian las contribuciones de Evangelista Torricelly, Isaac Barrow, Isaac Newton y Gottfried Leibniz También se presenta la teoria de integración segun Augustin – Louis Cauchy, Friedrich Bernhard Riemann y Henri Lebesque, y se analiza la importancia del TFC en cada una de estas teorías

El segundo capítulo, titulado el Teorema Fundamental del Cálculo en el Análisis Real, está dedicado a estudiar el alcance y limitaciones del TFC Se estudian las condiciones que debe satisfacer una función para que su derivada sea integrable y se puede aplicar el TFC También se presentan algunas generalizaciones del TFC y se utiliza la teoría de integración y el TFC para introducir los conceptos de función logarítmica y función exponencial Finalmente se enuncian los teoremas del cálculo diferencial e integral que se necesitan para construir el árbol genealógico de TFC

En el tercer y ultimo capítulo se presenta una propuesta de enseñanza de la derivada de las funciones trigonométricas utilizando el Teorma Fundamental del Cálculo y la geometría del círculo, la cual rompe los esquemas tradicionales, ya que tienen que hacer uso de algunos limites trigonométricos

CAPÍTULO 1: ORÍGENES DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Aunque el descubrimiento del Teorema Fundamental del Cálculo se le atribuye a Gottfried Leibniz (1646 – 1716) y a Isaac Newton (1642 – 1727) a finales del siglo XVI, el desarrollo de este teorema ni comenzó ni terminó con ellos Como Carl Boyer señala en la conclusión de su libro The History of the Calculus and Its Conceptual Development [7], debemos reconocer las contribuciones de Newton y Leibniz como pasos a través de un continuo que se remonta por lo menos a los tiempos de Eudoxus de Cnidus y ha continuado a través de Euler, Cauchy y Weierstrass

Cuando nos ubicamos en la matemática del siglo XVII, la integral y la derivada no se conciben como operadores en el sentido moderno Ni siquiera los objetos de estos operadores, las funciones, existían en el sentido formal de los tiempos modernos En lugar de funciones, los objetos a los cuales se les aplicaba el cálculo eran curvas La integral era entendida como área (cuadraturas) y la derivada era definida como la razón de los lados del triángulo característico, el triángulo formado por el eje horizontal, el segmento de recta desde este eje al correspondiente punto de la curva (usualmente vertical) y la recta tangente a la curva en este punto En lugar de limitarse a la derivada, Leibniz trabajó con el triángulo diferencial, un triángulo semejante al triángulo característico, pero con lados representando los diferenciales de las variables y la pendiente de la hipotenusa representando la derivada

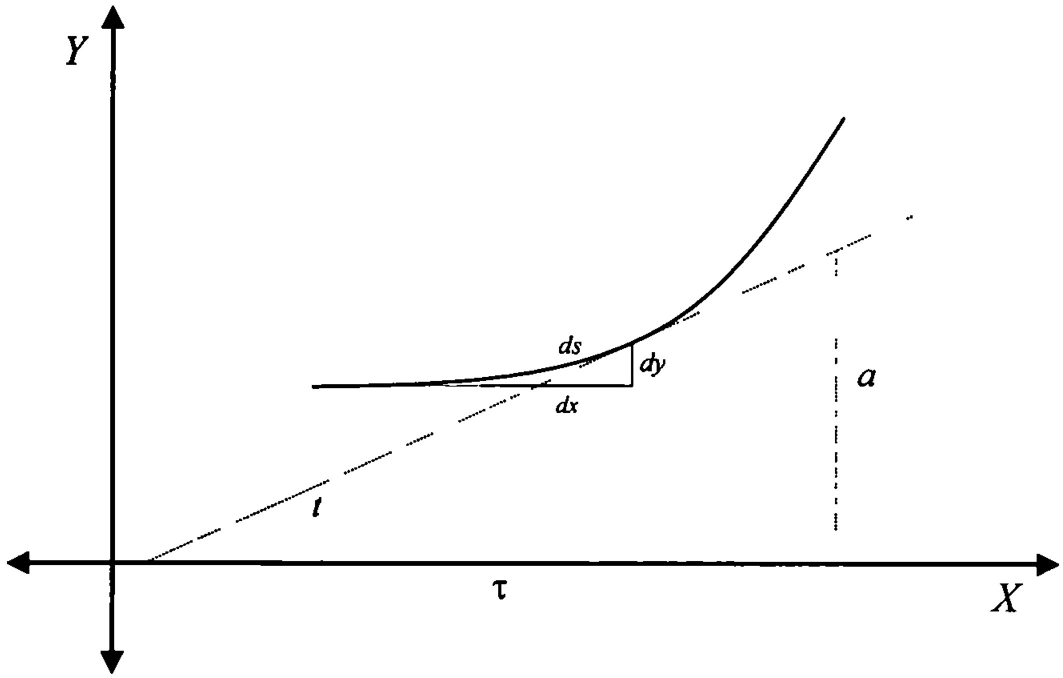


Figura 1 1

$$\frac{ds}{t} = \frac{dy}{a}$$

Detrás de este punto de vista geométrico del Cálculo, hay también una idea dinámica la cual hace ver la integración como una acumulación de una cantidad descrita por su razón de cambio Este es el punto de vista adoptado por Newton cuando habla de fluentes (cantidades variables) y fluxiones (la razón de cambio de dichas cantidades) Más que reconocer la naturaleza inversa de la integración y la diferenciación, el ingenio de Newton y Leibniz se basa en la habilidad de desplazarse fácilmente entre la interpretación geométrica y dinámica del Cálculo Leibniz interpreta la integración como una suma de áreas infinitas Newton usa modelos geométricos para razonar acerca de la relación entre aceleración, velocidad y distancia Realmente, la unica diferencia real entre los aspectos geométricos y dinámicos del Cálculo, eso si consideramos a la variable independiente como una distancia o como el tiempo Aunque conceptualmente ellas son totalmente diferentes El Cálculo evoluciona debido a que las concepciones geométricas y dinámicas de la derivada y la integral llegaron a ser vistas como manifestaciones de principios generales comunes, pero tomó mucho tiempo e ingenio extraer estos principios generales

1.1 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO ANTES DE NEWTON Y LEIBNIZ.

La aplicación de los conceptos de tiempos y movimiento al estudio de las curvas llevaron a Evangelista Torricelli (1608 -1647) y a Isaac Barrow (1630 – 1677) a un entendimiento por lo menos intuitivo de la relación inversa entre los problemas de cálculo de tangentes y de cuadraturas, es decir, entre las operaciones de diferenciación e integración

De un lado, las investigaciones medievales y los trabajos de Galileo Galiley sugieren que el movimiento de un punto, a lo largo de una recta con velocidad variable, puede ser representado mediante una gráfica de su velocidad versus el tiempo Usando la idea de indivisibles se deduce que la distancia total recorrida por el punto sería igual al área bajo la curva de velocidad versus tiempo, ya que la distancia recorrida durante un intervalo infinitesimal de tiempo seria igual al producto de la longitud de este intervalo de tiempo y de la velocidad instantánea

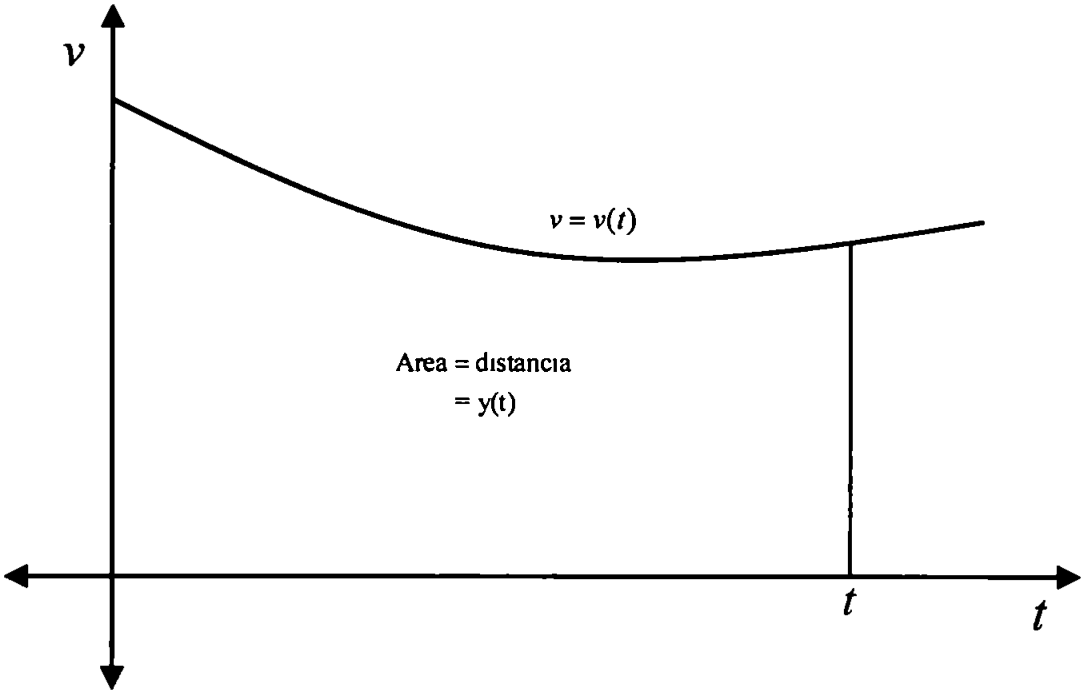


Fıgura 1 2

Por otro lado, el mısmo movımıento puede ser representado medıante una gráfica de desplazamıento versus tıempo Sı un punto se mueve a lo largo de la curva $y = y(t)$ con velocıdad horızontal 1 y velocıdad vertıcal v , el vector velocıdad de este punto será la resultante de un vector horızontal de longıtud 1 y un vector vertıcal de longıtud v Por lo tanto, la pendıente de la recta tangente a la curva de desplazamıento $y = y(t)$ será la velocıdad v

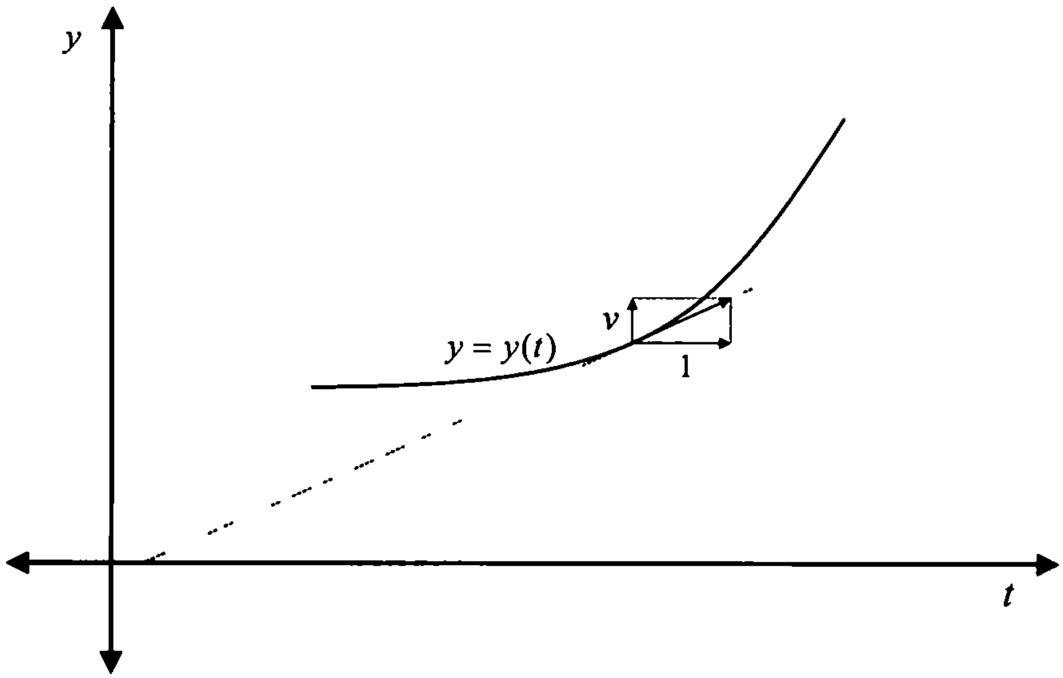


Figura 1 3

Específicamente, la relación entre estas dos figuras es que la pendiente de la recta tangente a la curva del área $y = y(t)$ (Figura 1 3) es igual a la ordenada de la curva original $v = v(t)$ (Figura 1 2) Esta es una embrionaria formulación del Teorema Fundamental del Cálculo (la razón de cambio del área bajo la curva es igual a su ordenada), Esta idea fue el punto de partida de Newton para el desarrollo de un cálculo algorítmico

Aparentemente Barrow descubrió la relación inversa fundamental entre los problemas de cálculo de tangentes y de cuadraturas, pero él no desarrollo totalmente la posibilidad de las representaciones analíticas de las operaciones involucradas, él no fue capaz de hacer uso efectivo de esto Barrow redujo sistemáticamente los problemas inversos de tangentes a problemas de cuadraturas, pero él no convirtió los problemas de cuadraturas en problemas relacionados con el cálculo de tangentes usando esta relación inversa, esto es, él no expreso los problemas de cuadraturas en términos de antiderivadas, como se hace generalmente en el cálculo Barrow no divisó ventajas haciendo esto ya que él no había reducido su método de tangente a una forma algorítmica simple, como hicieron Newton y Leibniz un tiempo más tarde

La posible descripción del Teorema Fundamental del Cálculo presentada por Barrow en la lección décima de su obra "Geometrical Lectures" es la siguiente

Por conveniencia sea y, z ejes orientados positivamente como se muestra en la Figura 1 4 Dada una función creciente y positiva $y = f(x)$, denotemos por $z = A(x)$ el área entre la curva $y = f(x)$ y el intervalo $[0, x]$ a lo largo del eje x Dado un punto $D(x_0, 0)$ en el eje x, denotemos por T el punto en el eje x tal que

$$DT = \frac{DF}{DE} = \frac{A(x_0)}{f(x_0)}$$

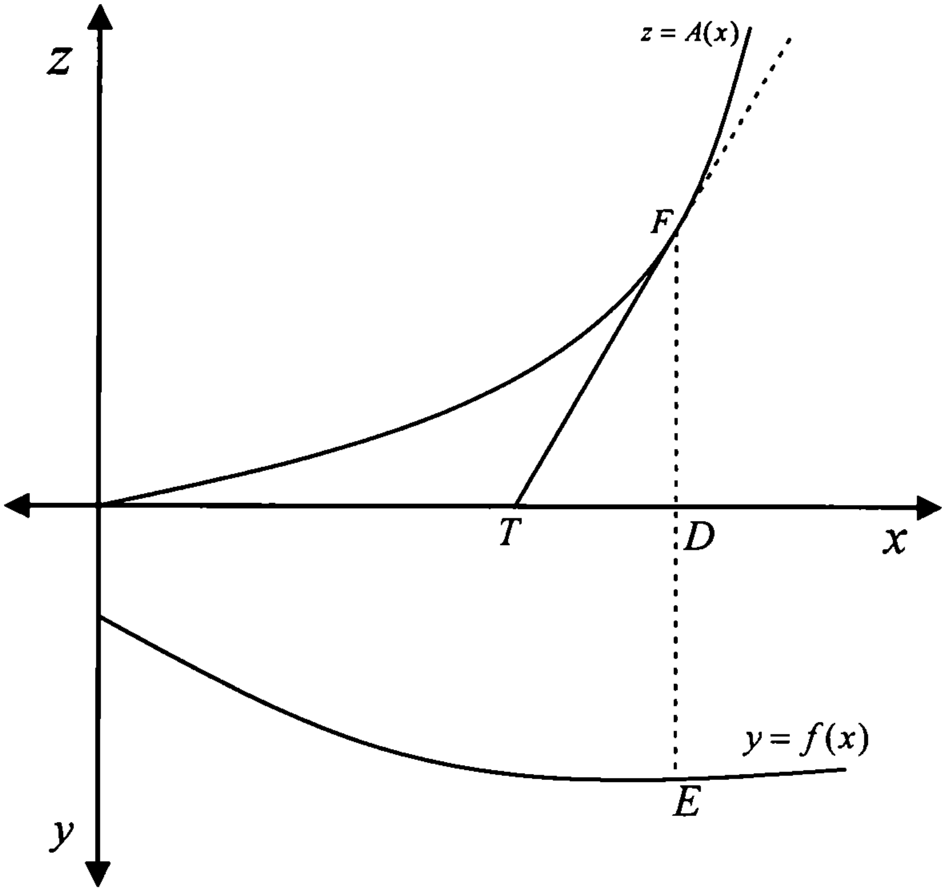


Figura 1 4

Barrow afirma que la recta TF toca la curva $z = A(x)$ sólo en el punto $F(x_0, A(x_0))$

Note que la pendiente m de la recta TF es

$$m = \frac{DF}{DT}$$

Como

$$DF = A(x_0) \qquad y \qquad DT = \frac{A(x_0)}{f(x_0)}$$

Se tiene que

$$m = \frac{A(x_0)}{\frac{A(x_0)}{f(x_0)}} = f(x_0)$$

Si Barrow hubiese acertado que TF es la recta tangente a la curva $z = A(x)$ en un sentido analítico, con pendiente $A(x)$ definida apropiadamente, de este resultado se obtendría la conclusión que

$$A(x_0) = f(x_0)$$

el cuál es el Teorema Fundamental del Cálculo Sin embargo, Barrow sólo acertó (y probó) que TF es tangente a la curva $z = A(x)$ en el sentido griego de que la recta toca a la curva en un solo punto

Para probar que TF toca la curva $z = A(x)$ sólo en el punto $F(x_0, A(x_0))$, Barrow considera un punto $I(x_1, A(x_1))$ sobre la curva $z = A(x)$ con $x_1 < x_0$ y procede a probar que el punto K, intersección de la recta horizontal IL con la recta TF, se encuentra a la derecha del punto I como se muestra en la Figura 1 5

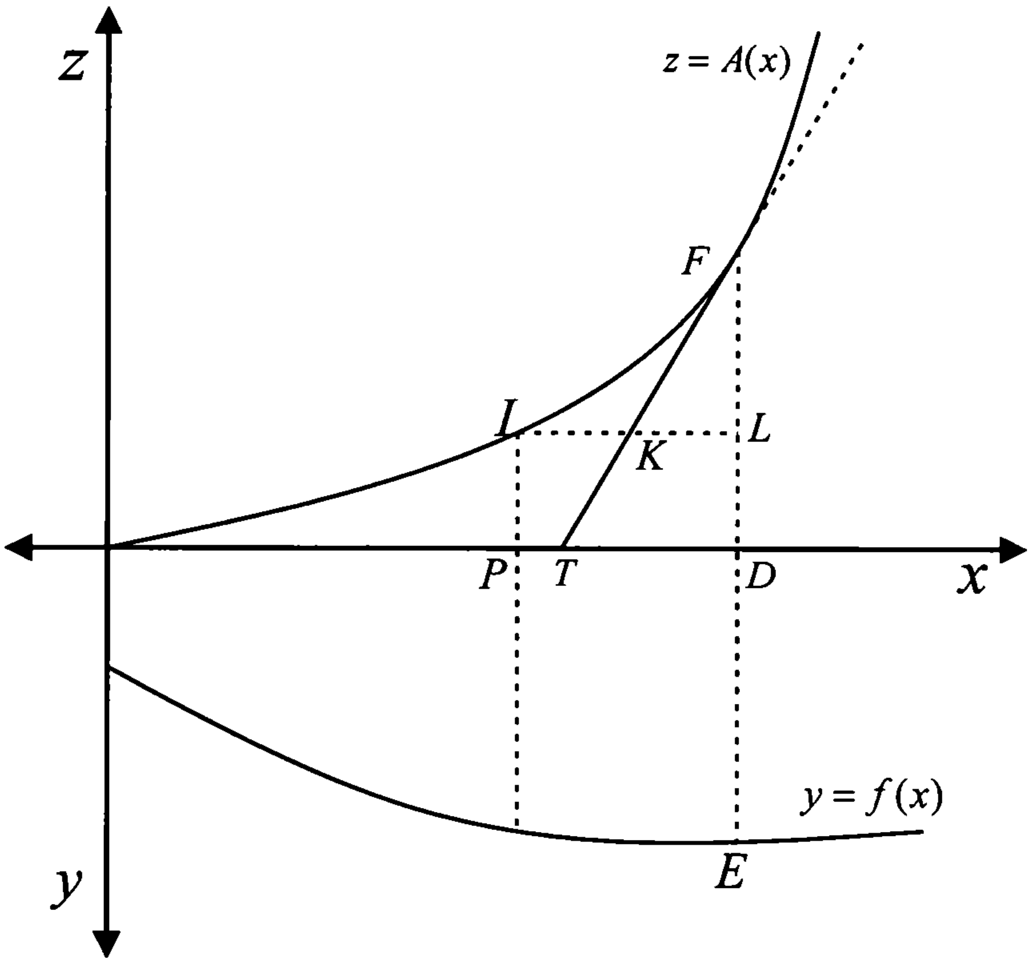


Figura 1 5

En efecto, por la definición del punto T y por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{LF}{LK}=\frac{DF}{DT}=\frac{A(x_0)}{\frac{A(x_0)}{f(x_0)}}=f(x_0)=DE$$

Por lo tanto,

$$LF = LK \quad DE$$

Además,

$$LF = DF - LD = DF - PI = A(x_0) - A(x_1)$$

Como la función $y = f(x)$ es creciente, se tiene que

$$A(x_0) - A(x_1) < DP\ DE$$

Por consiguiente,

$$LK \quad DE = LF < DP.DE$$

Lo cual implica que

$$LK < DP = LI$$

Así pues el punto K se encuentra a la derecha del punto I El caso $x_1 > x_0$ se prueba de forma similar Por consiguiente, la recta TF toca la curva $z = A(x)$ sólo en el punto $F(x_0, A(x_0))$

Como se ha podido observar, este resultado de Barrow se puede interpretar como uno de los primeros enunciados del Teorema Fundamental del Cálculo, basado en la geometría clásica y no precisamente como un proceso algorítmico

Finalmente queremos puntualizar que un resultado similar al de Barrow fue presentada un poco más temprano en 1668 por el matemático escoces James Gregory (1638 – 1675) quien aparentemente duplica algunos de los descubrimientos claves de Newton y Leibniz En su obra Geometricae Pars Universalis publicada en 1668, Gregory probó como determinar la longitud de una curva encontrando el área bajo curva relacionada En notación moderna Gregory establece y prueba que para una constante adecuada c, escogida tal que las razones son iguales a una razón comparada, la longitud de la curva definida por $y=f(x)$ desde $x=a$ hasta $x=b$ es igual al área bajo la curva definida por $y=c\sqrt{1+(f\,(x))^2}$ entre los mismos límites Luego Gregory propone y resuelve el problema inverso Dada una curva definida por $y=g(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$, determinar una curva relacionada definida por $y=u(x)$ tal que el área bajo la primera curva es igual a la longitud de la segunda curva Él sabe que la pendiente de la tangente de u está dada por $c^{-1}\sqrt{g^2(t)-c^2}$ Gregory prueba entonces un resultado equivalente a la primera versión del Teorema Fundamental del Cálculo, esto es, si definimos una curva $u(x)$ en términos del área bajo una curva cuya ordenada está definida por $\frac{z}{c}$, en notación moderna

$$u(x)=\frac{1}{c}\int_a^x z(t)dt$$

Entonces $\frac{z}{c}$ describe la pendiente de la tangente a u.

De esto se deduce que

$$u(x)=\frac{1}{c}\int_a^x\left(g^2(t)-c^2\right)dt$$

Gregory murió prematuramente antes de ganarse su propio reconocimiento por sus contribuciones a la Matemática.

1.2 NEWTON Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Primeramente Newton resuelve el problema de encontrar la relación entre las fluxiones $\dot{x},\dot{y}$, dada la relación $f(x,y)=0$ entre x, y donde $f(x,y)=\sum a_{ij}x^i y^i$ es una función polinomial.

Esta relación la expresa como

$$\sum\left(\frac{i\dot{x}}{x}+\frac{j\dot{y}}{y}\right)a_{ij}x^{i}y^{j}=0$$

Donde, en términos modernos, $\dot{x},\dot{y}$ son simplemente las derivadas de x,y con respecto a t, es decir

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}\qquad,\qquad \dot{y}=\frac{dy}{dt}$$

y

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{dy}{dx}$$

Después de esto Newton plantea el problema inverso de encontrar y en términos de x y la razón $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ de sus fluxiones En el caso de que la ecuación tenga la forma simple

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\phi(x)$$

estamos en la presencia de un problema de antidiferenciación, mientras que en el caso general

$$g\left(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = 0$$

se tiene un problema de ecuación diferencial

La primera aparición histórica del Teorema Fundamental del Cálculo en la forma explícita

$$\frac{dA}{dx} = y$$

donde A denota el área bajo la curva $y = f(x)$, ocurre en octubre de 1666 cuando Newton presenta una lista de problemas ilustrativos Aquí él consideró el cálculo de áreas por medio de antiderivación, proporcionando las bases de un enfoque algorítmico para el cálculo de áreas

Aunque previamente se usaban técnicas infinitesimales, para el cálculo de áreas, Newton introduce la técnica de primero determinar la razón de cambio del área deseada (con respecto a x), y después calcular el área por medio de antidiferenciación En combinación con su enfoque fluxional para las tangentes y razones de cambio, se hace claro por primera vez la naturaleza precisa de la relación inversa entre los problemas de tangentes y de áreas, y el hecho que los dos tipos de cálculos son aspectos de una sola teoría matemática, la cual es caracterizada generalmente por procesos algorítmicos aplicables y diferentes

Para la formulación fluxional y derivación del Teorema Fundamental del Cálculo planteado por Newton, denotemos por y el área abc bajo la curva de $q = f(x)$ y consideremos esta área barrida por el segmento vertical bc, el cual se mueve hacia la derecha con velocidad unitaria $\dot{x} = 1$

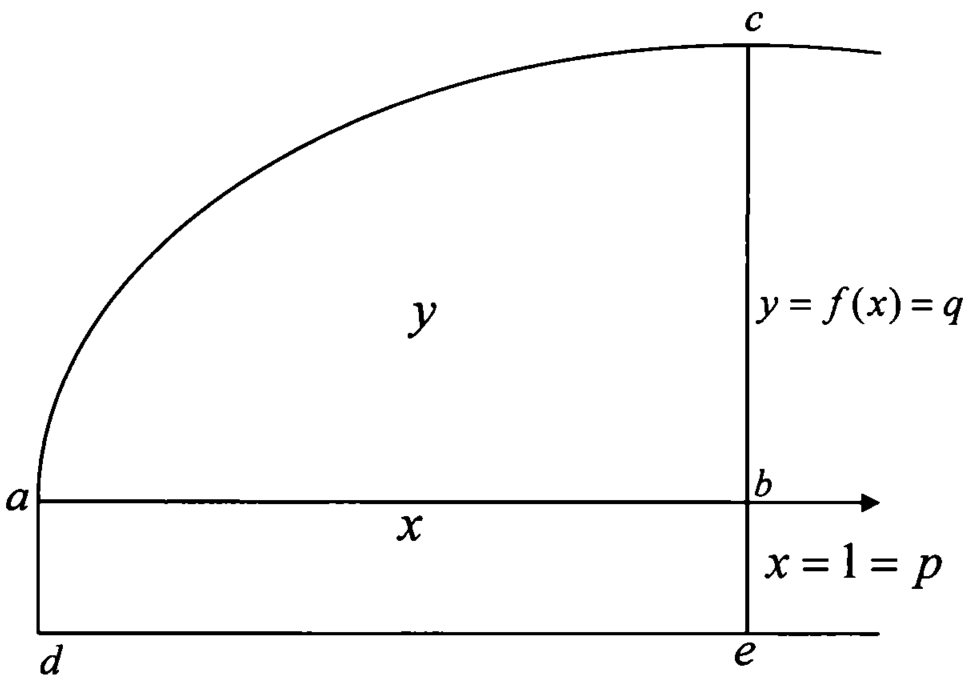


Figura 1 6

Newton asume como obvio que la razón de cambio con respecto al tiempo del área y es $q = f(x)$, con $\dot{x} = 1$, por lo tanto

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$$

El detalle crucial de Newton consiste en la observación de este hecho, más que en la presentación de una demostración rigurosa en términos modernos Sin duda alguna, Newton pensó en términos de crecimiento en el área desde y a $y+oq$, correspondiente a un crecimiento desde x a $x+o$ durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño , $y+oq$

Como una aplicación inmediata se tiene la explicación de la relación inversa entre el hecho que la pendiente de la curva con ordenada $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es x^n , y el hecho de que el área bajo la curva con ordenada x^n es $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

En efecto, si

$y=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, (el área)

entonces usando el algoritmo computacional de Newton, a partir de la ecuación

$$y-\frac{x^{n+1}}{n+1}=0$$

se obtiene que

$$\frac{\dot{y}}{y}y-\frac{(n+1)\dot{x}}{x}\frac{x^{n+1}}{n+1}=0$$

de donde

$$\dot{y} - \dot{x}\, x^n = 0$$

por lo tanto

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^n$$

y recíprocamente Tomando $\dot{x} = p = 1$ correspondiendo a una razón de tiempo unitaria de crecimiento de x y $\dot{y} = q$ como en la Figura 1 6, esto es

$$q = x^n$$

Newton utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para probar que si

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{cx^{n-1}}{a + bx^n}$$

entonces

$$y = \square \frac{c}{nab + nbz}$$

(Newton usó el símbolo $\square$ para indicar el área bajo la curva) En notación moderna, Newton probó que si

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx^{n-1}}{a+bx^{n}}$$

entonces

$$y(z)=\int\frac{c}{nab+nbz}dz$$

Para probar esto Newton consideró la sustitución $z=bx^{n}$, por lo tanto $\dot{z}=nbx^{n-1}\dot{x}$ De donde

$$\begin{aligned}\frac{\dot{y}}{\dot{z}}=\frac{\dot{y}/\dot{x}}{\dot{z}/\dot{x}}&=\frac{cx^{n-1}}{a+bx^{n}}-nbx^{n-1}\\&=\frac{cx^{n-1}}{a+bx^{n}}\,\frac{1}{nbx^{n-1}}\\&=\frac{c}{nb}\,\frac{1}{a+bx^{n}}\\&=\frac{c}{nb}\,\frac{1}{a+z}\end{aligned}$$

o sea que

$$\frac{\dot{y}}{\dot{z}}=\frac{c}{nb}\,\frac{1}{a+z}$$

Luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\begin{aligned} y(z) &= \square \frac{c}{nb}\,\frac{1}{a+z} \\ &= \square \frac{c}{nab+nbz} \end{aligned}$$

Ejemplo 1 1 Utilicemos el Teorema Fundamental del Cálculo para probar que sí

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = cx^{n-1}\sqrt{a+bx^{n}+cx^{2n}}$$

entonces

$$y(z) = \square \frac{c}{n}\sqrt{a+bz+cz^{2}}$$

En efecto, consideremos la sustitución $z = x^{n}$ Entonces $\dot{z} = nx^{n-1}\dot{x}$ De donde

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \frac{\dot{y}/\dot{x}}{\dot{z}/\dot{x}} &= \frac{cx^{n-1}\sqrt{a+bx^{n}+cx^{2n}}}{nx^{n-1}} \\ &= \frac{c}{n}\sqrt{a+bz+cz^{2}} \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$y(z) = \square \frac{c}{n}\sqrt{a+bz+cz^{2}}$$

En notación moderna se ha probado que si

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=cx^{n-1}\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}$$

entonces

$$y(z)=\int\frac{c}{n}\sqrt{a+bz+cz^2}\,dz$$

Ejemplo 1.2: Probemos que si

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\left(\frac{c}{x}\right)\sqrt{ax^n+bx^{2n}}$$

entonces

$$y(z)=\square\left(\frac{2c}{n}\right)\sqrt{a+bz^2}$$

En efecto, consideremos la sustitución $z^2=x^n$. Luego $2z\dot{z}=nx^{n-1}\dot{x}$. Por lo tanto

$$\frac{\dot{y}}{\dot{z}}=\frac{\dot{y}\big/\dot{x}}{\dot{z}\big/\dot{x}}=\frac{\left(\frac{c}{x}\right)\sqrt{ax^n+bx^{2n}}}{\frac{nx^{n-1}}{2z}}$$

$$= \left(\frac{2c}{n}\right)\frac{z\sqrt{ax^n + bx^{2n}}}{x^n}$$

$$= \left(\frac{2c}{n}\right)\frac{z\sqrt{az^2 + bz^4}}{z^2}$$

$$= \left(\frac{2c}{n}\right)\frac{z^2\sqrt{a + bz^2}}{z^2}$$

$$= \left(\frac{2c}{n}\right)\sqrt{a + bz^2}$$

Luego por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene que

$$y(z) = \square\left(\frac{2c}{n}\right)\sqrt{a + bz^2}$$

En notación moderna se ha probado que sí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \left(\frac{c}{x}\right)\sqrt{ax^n + bx^{2n}}$$

entonces

$$y(z) = \int\left(\frac{2c}{n}\right)\sqrt{a + bz^2}\,dz$$

Ejemplo 1 3 Probemos que sí

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{cx^{n-1}}{\sqrt{a + bx^n}}$$

entonces

$$y(x) = \frac{2c}{nb}\sqrt{a + bx^n}$$

En efecto, consideraremos la sustitución $z = x^n$ Luego $\dot{z} = nx^{n-1}\dot{x}$ De donde

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \frac{\dot{y}/\dot{x}}{\dot{z}/\dot{x}} &= \frac{cx^{n-1}}{\sqrt{a+bx^n}} - nx^{n-1} \\
&= \frac{cx^{n-1}}{\sqrt{a+bx^n}}\,\frac{1}{nx^{n-1}} \\
&= \frac{c}{n}\,\frac{1}{\sqrt{a+bx^n}} \\
&= \frac{c}{n}\,\frac{1}{\sqrt{a+bz}}
\end{aligned}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$y(z) = \square\frac{c}{n}\,\frac{1}{\sqrt{a+bz}}$$

Por otro lado, note que si

$$v = \frac{2c}{nb}\sqrt{a + bz}$$

entonces

$$nbv = 2c\sqrt{a+bz}$$
$$n^2b^2v^2 = 4c^2(a+bz)$$

de donde

$$2n^2b^2v\dot{v} = 4c^2b\dot{z}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\dot{v}}{\dot{z}} &= \frac{4c^2b}{2n^2b^2v}\\ &= \frac{2c^2}{n^2bv}\\ &= \frac{2c^2}{\frac{2n^2bc\sqrt{a+bz}}{nb}}\\ &= \frac{c}{n\sqrt{a+bz}}\\ &= \frac{c}{n}\,\frac{1}{\sqrt{a+bz}}\end{aligned}$$

O sea que

$$\frac{\dot{v}}{\dot{z}} = \frac{c}{n}\,\frac{1}{\sqrt{a+bz}}$$

Luego por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\square \frac{c}{n} \frac{1}{\sqrt{a+bz}} = v = \frac{2c}{nb}\sqrt{a+bz}$$

Así pues

$$y(z) = \square \frac{c}{n} \frac{1}{\sqrt{a+bz}} = \frac{2c}{nb}\sqrt{a+bz}$$

Como $z = x^n$, se tiene que

$$y(x) = \frac{2c}{nb}\sqrt{a+bx^n}$$

En notación moderna se ha probado que

$$\int \frac{cx^{n-1}}{\sqrt{a+bx^n}}\,dx = \frac{2c}{nb}\sqrt{a+bx^n}$$

Ejemplo 1 4 Considere la curva $y = y(x)$ con área

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) a x^{\frac{m+n}{n}}$$

Entonces

$$z - \left(\frac{n}{m+n}\right) a x^{\frac{m+n}{n}} = 0$$

y

$$\dot{z} - \left(\frac{n}{m+n}\right) a \left(\frac{m+n}{n}\right) x^{\frac{m+n}{n}-1} \dot{x} = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = a x^{\frac{m}{n}}$$

Luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo, Newton concluye que

$$\square\, a x^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{am}{m+n}\right) x^{\frac{m+n}{n}}$$

En notación moderna, Newton prueba que

$$\int a x^{\frac{m}{n}} dx = \left(\frac{an}{m+n}\right) x^{\frac{m+n}{n}}$$

Obsérvese que Newton habitualmente ignora la constante de integración tomando sus curvas tales que pasen por el origen

1.3 LEIBNIZ Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Leibniz percibía la integración como una suma y, por lo tanto, para él un Teorema Fundamental del Cálculo no era consecuencia de la definición de la integral, sino que era consecuencia de la relación inversa que existe entre las operaciones de sumar y de tomar diferencias. Los Bernoulli, sin embargo, reinterpretaron la integral de Leibniz como la inversa de la diferenciación, así que durante todo el siglo XVIII el Teorema Fundamental del Cálculo fue una consecuencia inmediata de la definición de la integral.

En cuanto al Teorema Fundamental del Cálculo, Leibniz comenta; "ahora probaré que el problema general de cuadraturas (áreas) puede ser reducido a encontrar una recta que tiene una ley de tangencia (declinista) dada, esto es para el cual los lados del triángulo característico tienen una relación mutua dada. Luego probaré como esta recta puede ser descrita por un movimiento que he inventado".

Leibniz busca determinar el área bajo una curva. Él prueba como construir una curva auxiliar para la cual la pendiente (la razón de los lados del triángulo característico) es proporcional a la altura vertical de la curva original (la altura vertical dividida por una constante, a) vea Figura 1.7.

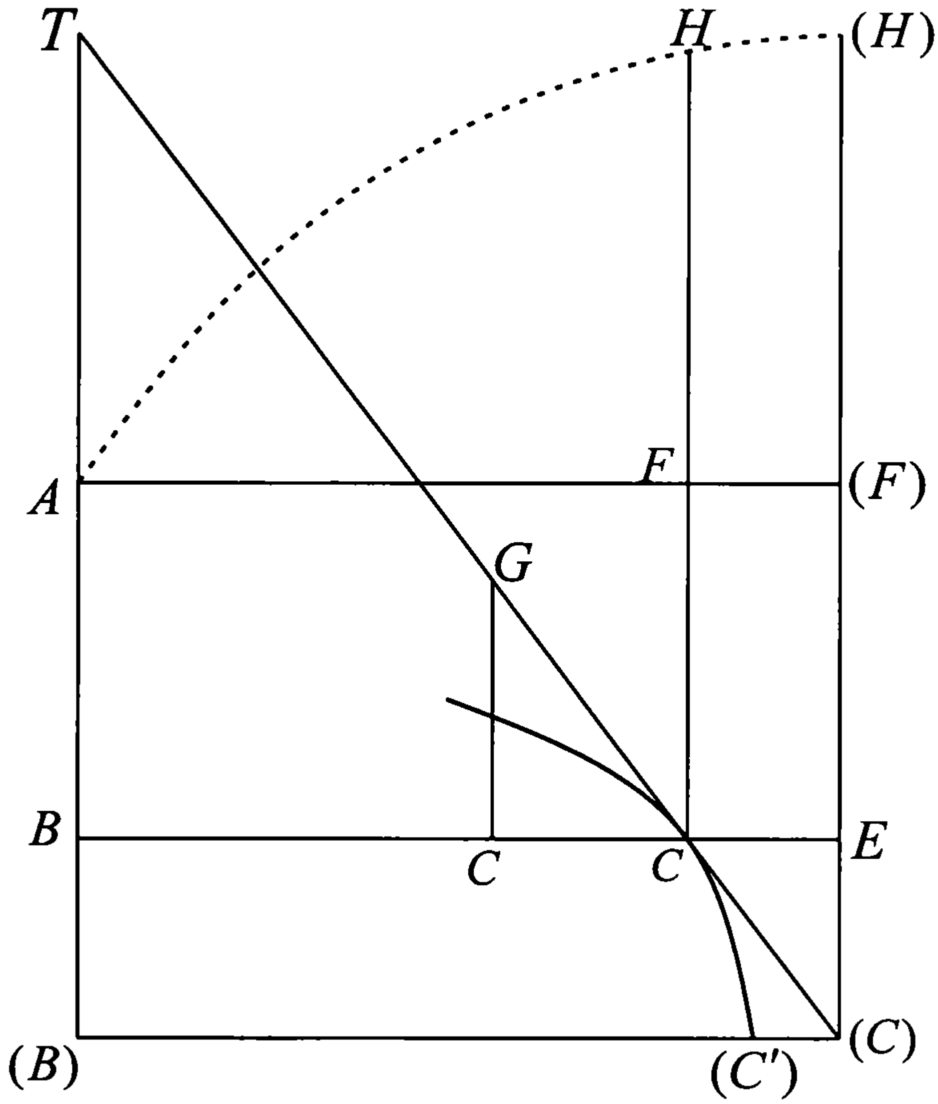


Figura 1 7

Esto da la oportunidad de emplear un argumento de sumas para probar que el área bajo la curva dada es proporcional a la ordenada de la curva auxiliar Si se conoce una fórmula explicita para la curva auxiliar, entonces ésta nos provee una fórmula para el área En notación moderna, si se puede encontrar una función F para la cual la curva original es descrita por $y = F'(x)$, entonces el área es expresada en términos de F, obteniendo asi el Teorema Fundamental del Cálculo

En cuanto a la ilustración presentada por Leibniz podemos indicar lo siguiente La recta A(F) vendría a ser el eje horizontal y la recta T(B) seria el eje vertical Esto difiere de nuestra representación moderna en el sentido de que tanto arriba como abajo del eje horizontal se recorre distancia positiva del eje horizontal Por lo tanto, AH(H) es la curva a la cual deseamos calcularle el área bajo ella y $C(C')$ es la curva cuya derivada en C es igual a FH, la ordenada de la curva AH(H) En lugar de superponer estas dos curvas positivas, Leibniz tomó la gráfica de la antiderivada y la reflejó a través del eje horizontal Los valores tomados por la curva $C(C')$ son crecientes debido a que su distancia desde el eje horizontal es creciente (como se supone que la función AH(H) es positiva) el área está aumentando, por lo tanto la pendiente de la curva $C(C')$ es positiva

La curva $C(C')$ es construida de tal forma que la razón de los lados del triángulo característico, $TB\ BC$ es igual a la razón de FH a la longitud constante a (presumiblemente incluida por asuntos de homogeneidad dimensional) Así,

$$TB\ BC = FH\ a$$

Leibniz ahora asume que la curva $AH(H)$ está especificada por una relación entre z (desplazamiento vertical hacia arriba), x (desplazamiento horizontal), por lo tanto $FH = z$, $AF = x$, mientras que la curva $C(C')$ está especificada por una relación entre y (desplazamiento vertical hacia abajo), x

Él asume, aunque no explícitamente, que esta segunda curva pasa a través del punto $x = 0,\ y = 0$ El triángulo diferencial está dado por $CE(C)$ donde $dx = CE = F(F)$ y $dy = E(C)$ Su razón es igual a la razón de los lados del triángulo característico,

$$TB\ \ BC = dy\ \ dx$$

por lo tanto,

$$dy\ \ dx = FH\ \ a$$

y

$$dy\ \ dx = z\ \ a$$

de donde

$$ady = zdx$$

El producto zdx es esencialmente el área $FH(H)(F)$, mientras el producto ady es el área del rectángulo cuya altura es EC y ancho la constante a Sumando estas áreas se obtiene que

$$ay = \int z dx$$

En otras palabras el área AHF es igual al área del rectángulo cuya altura es FC y ancho la constante a Leibniz había establecido que el área definida por $\int z dx$ es igual al cambio del valor de la antiderivada sobre el intervalo $A F$ Así pues, en el cálculo de Leibniz los problemas de cuadraturas se reducen a problemas inversos de cálculo de tangente Esto es, para determinar el área bajo la curva z, es suficiente encontrar una curva cuya tangente satisfaga la condición

$$\frac{dy}{dx} = z$$

Restando el área sobre el intervalo $[0,a]$ del área sobre el intervalo $[0,b]$, y tomando $a=1$, se obtiene que

$$\int_a^b z dx = y(b) - y(a)$$

Veamos un ejemplo de cómo se aplica el argumento de Leibniz sobre el Teorema Fundamental del Cálculo Supóngase que se desea calcular la cuadratura de la parábola $z = x^2$ De acuerdo con Leibniz debemos encontrar una curva con ley de tangencia igual a x^2

Esto esencialmente envuelve un ensayo basado en la experiencia, en este caso es $\frac{x^3}{3}$ y luego se verifica que esta posibilidad funciona Imaginemos como Leibniz pudo haber hecho esto La ley de tangencia para $\frac{x^3}{3}$ se obtendrá a partir de su triángulo característico infinitesimal como la razón de los respectivos incrementos en x, y , o sea $dy\ dx$ Como dx en el incremento (diferencia) entre dos valores sucesivos (de la forma) x , $x+dx$, con correspondientes valores

$$y=\frac{x^3}{3} \quad , \quad y+dy=\frac{(x+dx)^3}{3}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
dy\ \ dx &= \frac{dy}{dx} \\
&= \frac{(y+dy)-y}{dx} \\
&= \frac{(x+dx)^3-x^3}{3dx} \\
&= \frac{x^3+3x^2dx+3x(dx)^2+(dx)^3-x^3}{3dx} \\
&= \frac{\left(3x^2+3xdx+(dx)^2\right)dx}{3dx} \\
&= x^2+xdx+\frac{(dx)^2}{3} \\
&= x^2
\end{aligned}$$

Lo cual justifica la ley de tangencia Leibniz explica que la ultima igualdad se obtiene eliminando los términos infinitesimales restantes

Así pues, por el Teorema Fundamental del Cálculo, el área bajo la parábola $z = x^2$ y sobre el eje x desde el origen hasta un valor específico dado x, está dada por $y(x) = \frac{x^3}{3}$, o sea que

$$\int z dx = \int x^2 dx = y = \frac{x^3}{3}$$

El Teorema Fundamental del Cálculo reduce todo problema de cuadratura a encontrar curvas con una ley de tangencia dada, o sea, a un problema inverso de cálculo de tangente Sin embargo, mientras Fermat y otros han probado que determinar la tangente de una curva dada es siempre posible, el problema inverso de encontrar una curva con una ley de tangencia dada, es generalmente mucho más difícil No siempre es posible hacer esto algebraicamente, aun cuando la ley de tangencia esté dada algebraicamente

Finalmente podemos puntualizar que Leibniz atribuía una gran importancia a la notación, y su elección de símbolos para formular el cálculo demostró ser más afortunada que la de Newton Mediante su uso de dos letras separadas "d" y "$\int$", se subraya el papel de la diferenciación y de la integración como operadores, además, estos símbolos se incorporaban en fórmulas complicadas de una manera mucho mas facil que la de Newton En terminos generales el calculo de Leibniz era el mas analitico Newton estaba mas proximo a las figuras geometricas con los razonamientos que las acompañan en lenguaje usual

1.4 CAUCHY Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Aunque parezca extraño, durante el siglo XVIII el concepto de integral no jugaba el papel importante que le corresponde y era visto principalmente como el inverso de la diferenciacion, ocupando una segunda posicion en el reino de los conceptos matematicos Por ejemplo, Leonhard Euler (1707 1783) inicio el calculo integral en su texto de tres volumenes como sigue

> *"Cálculo integral es el método de determinar, a partir de una diferencial, dicha cantidad, y la operación que produce esto es generalmente llamada integración"*

Euler concibio la integral como dependiente de la diferenciacion Esto es, una funcion $f(x)$ es integrada encontrando una funcion antiderivada o primitiva $F(x)$ tal que $F(x) = f(x)$ La integral de $f(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$ fue dada entonces, de acuerdo al heurísticamente entendido teorema fundamental del cálculo, por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Al mismo tiempo, la idea de la integral como un tipo de suma, o área bajo una curva era familiar, pero solamente era considerada una aproximación de la integral cuando era imposible determinar la antiderivada necesitada para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo Ni los límites de sumas ni las áreas de figuras planas eran suficientemente bien entendidas, para proveer una base sólida para un tratamiento lógico de la integral En particular, la noción de área era todavía totalmente intuitiva y se consideraba como un concepto auto – evidente En efecto, la integral analítica en el sentido de antiderivada de Newton era adecuada en la práctica, siempre y cuando las unicas funciones a integrar fuesen continuas en el sentido de Euler, esto es, cada función era definida por una unica expresión analítica explicita

Sin embargo a inicios del siglo XIX, los trabajos de Joseph Fourier (1768 – 1830) trajeron a la luz la necesidad de darle sentido a la integración de funciones que no son continuas (por lo menos en el sentido de Euler) Tales funciones aparecen naturalmente en problemas de aplicaciones, y los coeficientes de sus series de Fourier eran expresados como integrales, que no encajaban en los reducidos patrones analíticos de la integración del siglo XVIII

Fue Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) el primero en encarar esta necesidad "demostrar la existencia de las integrales o funciones primitivas antes de presentar sus diversas propiedades", esto es, primero proveer una definición general y probar la existencia de la integral para una extensa clase de funciones, las cuales pudieran facilitar una base para la discusión de integrales particulares y sus propiedades En su obra ***Resume des lecons donnees a l' Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimal*** de 1823 Cauchy fórmula la definición de la integral, la cual aparece en la mayoria de los tratados elementales del Cálculo Integral moderno

Cauchy inicia con una función f que es continua (en el sentido moderno) en el intervalo $[x_0, X]$ Aunque la continuidad era fundamental para su definición, Cauchy sutilmente no asumió que f era la derivada de otra función Él subdivide el intervalo $[x_0, X]$ en n subintervalos por medio de los puntos $x_0, x_1, \quad , x_n = X$ A esta subdivisión o partición P de $[x_0, X]$, Cauchy le asocia la suma aproximada

$$
\begin{aligned}
S &= (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \qquad + (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

obtenida sumando las áreas de los rectángulos con bases en los subintervalos de la partición, los rectángulos con base en $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_{i-1})$ Él desea definir la integral $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ como el límite de la suma S cuando el máximo de las longitudes $x_i - x_{i-1}$ de los subintervalos tiende a cero Por supuesto la existencia de este límite debe ser establecido

Para probar la existencia de este limite Cauchy aplica el siguiente resultado aritmético elemental Si $\alpha_1, \alpha_2, \quad , \alpha_n$ son numeros reales positivos y $a_1, a_2, \quad , a_n$ son numeros arbitrarios entonces

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \qquad + \alpha_n a_n = \bar{a}\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \qquad + \alpha_n\right)$$

donde $\bar{a}$ es una "media" de los numeros $a_1, a_2, \quad , a_n$, $\bar{a}$ es un numero que se encuentra entre los numeros $\min\{a_1, a_2, \quad , a_n\}$ y $max\{a_1, a_2, \quad , a_n\}$ Tomando $\alpha_i = x_i - x_{i-1}$ y $a_i = f(x_{i-1})$ se obtiene que

$$S = f\left(x_0 + \theta\left(X - x_0\right)\right)\left(X - x_0\right)$$

para algun $\theta \in (0,1)$, ya que por el teorema del valor intermedio, cualquiera media de los numeros, $f(x_0), f(x_1), \quad , f(x_{n-1})$ es un valor de la función continua f en algun punto del intervalo $[x_0, X]$

Ahora Cauchy considera un refinamiento P' de la partición P, esto es, cada subintervalo de la partición P se encuentra dentro de algun subintervalo de P

Luego la suma S' de las áreas de los rectángulos correspondientes a esta partición puede ser escrita como

$$S' = S'_1 + S'_2 + \quad + S'_n$$

Donde S'_i es la suma de los términos de S' que corresponden a los subintervalos de P que se encuentran dentro del i- esimo subintervalo de P

Por lo tanto, aplicando el resultado anterior en el i-esimo subintervalo obtenemos que

$$S_i = f\left(x_{i-1} + \theta_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

para algun $\theta_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, \quad , n$ Esto implica que,

$$S' = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \theta_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

De lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} S' - S &= \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \theta_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_{i-1} + \theta_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right]\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\left(x_i - x_{i-1}\right) \end{aligned}$$

donde

$$\varepsilon_i = f\left(x_{i-1} + \theta_i\left(x_i - x_{i-1}\right)\right) - f\left(x_{i-1}\right)$$

Así pues

$$S' - S = \bar{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right) = \bar{\varepsilon}\left(X - x_0\right)$$

donde $\bar{\varepsilon}$ es una media de los numeros $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \quad, \varepsilon_n$

De la fórmula anterior, Cauchy concluye que uno no altera perceptiblemente el valor de S calculado por medio de divisiones (particiones) en las cuales los elementos (subintervalos) de la diferencia $X - x_0$ tienen un valor numérico muy pequeño, si uno pasa a un segundo modo en el cual cada uno de esos elementos es subdividido en muchos otros Es aquí donde Cauchy observa la necesidad de probar que una función continua f en $[x_0, X]$, es uniformemente continua en el intervalo $[x_0, X]$, esto es, dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon$$

para todo $x', x'' \in [x_0, X]$ con $|x' - x''| < \delta$ Conociendo este hecho, el numero ε_i definido anteriormente se puede tomar tan pequeño como uno quiera escogiendo la partición P con los subintervalos suficientemente pequeños

Sean ahora P_1 y P_2 dos particiones arbitrarias de $[x_0, X]$ y sea P' el refinamiento comun de P_1 y P_2 obtenido uniendo los puntos de división de P_1 y P_2 Si S_1, S_2 y S' son las correspondientes sumas aproximadas asociadas a estas particiones, entonces se tiene que

$$S' - S_1 = \bar{\varepsilon}(X - x_0) \qquad \text{y} \qquad S' - S_2 = \bar{\varepsilon}_2(X - x_0)$$

de donde

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \left(S - S_2\right) - \left(S - S_1\right) \\ &= \overline{\varepsilon_2}(X - x_0) - \overline{\varepsilon_1}(X - x_0) \\ &= \left(\overline{\varepsilon_2} - \overline{\varepsilon_1}\right)(X - x_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la diferencia entre S_1 y S_2 se puede hacer arbitrariamente pequeña escogiendo P_1 y P_2 con subintervalos suficientemente pequeños

Cauchy concluye lo siguiente Cuando los elementos (subintervalos) de la diferencia $X - x_0$ se toman suficientemente pequeños, el modo de división no tiene más que una influencia imperceptible en el valor de S, y, si uno hace que los valores numéricos de esos elementos decrezcan indefinidamente haciendo crecer su numero, el valor de S terminará siendo perceptiblemente constante o, en otras palabras, éste terminará obteniendo un cierto limite el cual dependerá solamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores extremos x_0, X atribuidos a la variable x Este límite es el que uno llama ***integral definida***

Para establecer su argumento final, la existencia real del límite, Cauchy hubiese necesitado una propiedad de completitud de los numeros reales (o sea la existencia del límite de una sucesión de Cauchy de numeros reales)

En la lección 22 de su obra, Cauchy argumenta que la ecuación para la suma aproximada

$$S = f\left(x_0 + \theta\left(X - x_0\right)\right)\left(X - x_0\right) \quad ,\theta \in [0,1]$$

es satisfecha también por la misma integral, esto es,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{X} f(x)dx &= f\left(x_0 + \theta\left(X - x_0\right)\right)\left(X - x_0\right) \\ &= f\left(\bar{x}\right)\left(X - x_0\right) \end{aligned}$$

para algun $\theta \in [0,1]$ ó $\bar{x} \in [x_0, X]$ Esto es conocido como la **"Propiedad del Valor Medio para Integrales"** En esta lección Cauchy también probó las siguientes propiedades

$$\int_{X}^{x_0} f(x)dx = -\int_{x_0}^{X} f(x)dx$$

y

$$\int_{x_0}^{X} x\,dx = \frac{X^2 - x_0^{\,2}}{2}$$

$$\int_{x_0}^{X} A^x dx = \frac{A^X - A^{x_0}}{\ln(A)}$$

$$\int_{x_0}^{X} e^x dx = e^X - e^{x_0}$$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{X}{x_0}\right)$$

$$\int_{x_0}^{X} af(x)dx = a\int_{x_0}^{X} f(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x+a)dx = \int_{x_0+a}^{X+a} f(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x-a} = \ln\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right)$$

En la lección 23 de su obra, Cauchy cuidadosamente observa que las propiedades

$$\int_{x_0}^{X} \left[af(x) + bg(x)\right]dx = a\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx + b\int_{x_0}^{X} g(x)dx$$

y

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\bar{x}} f(x)\,dx + b\int_{\bar{x}}^{X} f(x)dx$$

se deducen de la definición de integral como el límite de una suma En esta lección Cauchy prueba que si $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$, donde φ y ψ son dos nuevas funciones que permanecen continuas entre los limites $x=x_0$, $x=X$, y tales que la segunda conserva siempre el mismo signo entre estos límites, entonces

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx=\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\psi(x)=\varphi(\varepsilon)\int_{x_0}^{X}\psi(x)dx$$

donde ε es un valor entre x_0, X

Ejemplo 1 5 Si se toman de manera sucesiva

$$\psi(x)=1 \quad , \quad \psi(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad \psi(x)=\frac{1}{x-a}$$

de la fórmula anterior se deduce que

$$\int_{x_o}^{X} f(x)dx=\int_{x_0}^{X} f(x)\psi(x)dx=f(\varepsilon)\int_{x_0}^{X} dx=(X-x_0)f(\varepsilon)$$
$$\int_{x_o}^{X} f(x)dx=\int_{x_0}^{X} xf(x)\psi(x)dx=\varepsilon f(\varepsilon)\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x}=\varepsilon f(\varepsilon)\ln\left(\frac{X}{x_0}\right)$$
$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx=\int_{x_0}^{x}\left[(x-a)f(x)\right]\psi(x)dx=(\varepsilon-a)f(\varepsilon)\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x-a}=(\varepsilon-a)f(\varepsilon)\ln\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right)$$

donde ε es un valor entre x_0, X Note que la primera identidad coincide con la propiedad del valor medio para integrales

En la lección 26 de su obra, Cauchy presenta la formulación rigurosa del Teorema Fundamental del Cálculo, el cual aparece en casi todos los libros modernos de cálculo Después de haber dado una definición aritmética de la integral, Cauchy pudo ahora establecer la relación inversa entre la diferenciación y la integración, sin basarse en el concepto intuitivo de área Dada una función continua $f(x)$ en el intervalo $[x_0, X]$, Cauchy desea probar que la nueva función $\tilde{F}$ definida en $[x_0, X]$ por

$$\tilde{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

es una función primitiva o antiderivada de $f(x)$, esto es, $\tilde{F}\,(x) = f(x)$ en el intervalo $[x_0, X]$ El unico detalle que uno podria cambiar hoy en día sería escribir $f(t)dt$ en lugar de $f(x)dx$ en el integrando, para diferenciar la variable del límite superior de la integral de la variable de integración

Aplicando las propiedades de aditividad y del valor medio para integrales, Cauchy obtiene que

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x+\alpha)-\tilde{F}(x) &= \int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx \\ &= \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx \\ &= \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx \\ &= (x+\alpha-x)f(x+\theta\alpha) \\ &= \alpha f(x+\theta\alpha)\end{aligned}$$

para algun $\theta \in [0,1]$, o sea que

$$\tilde{F}(x+\alpha)-\tilde{F}(x) = \alpha f(x+\theta\alpha)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación anterior por α y tomando limite cuando $\alpha \to 0$, Cauchy concluye a partir de la definición de derivada y de la continuidad de f que

$$\tilde{F}(x) = f(x)$$

que era lo que quería probar Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right) = f(x)$$

si f es continua Esta es la primera versión del teorema fundamental del cálculo, la cual expresa la naturaleza inversa de la diferenciación y la integración

Para deducir la segunda forma familiar del Teorema Fundamental del Cálculo a partir de esta primera versión, Cauchy considera una función arbitraria $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [x_0, X]$ Sí

$$w(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$$

entonces

$$w'(x) = F'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Luego por el teorema del valor medio,

$$w(x) = w(x_0) + (x - x_0)w'(\bar{x}) = w(x_0)$$

para todo $x \in [x_0, X]$ Por lo tanto,

$$\tilde{F}(x) - F(x) = \tilde{F}(x_0) - F(x_0) = -F(x_0)$$

y

$$\tilde{F}(x)=F(x)-F(x_0)$$

es decir,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=F(x)-F(x_0)$$

para cualquiera antiderivada F de f

Para ver la relación inversa entre la diferenciación e integración sólo necesitamos reemplazar $f(x)$ por $F'(x)$ para obtener

$$\int_{x_0}^{x} F'(x)\ dx=F(x)-F(x_0)$$

Como podemos observar, Cauchy esencialmente completa la teoria general de integración para funciones continuas definidas en un intervalo cerrado Aunque como hemos visto, la definición de función a principios del siglo XIX era bastante general, parece que nadie tomó seriamente la importancia de considerar para el análisis (o aun la existencia) funciones que tengan más de un numero finito de discontinuidades en cada intervalo finito Se puede observar que la teoría de Integración de Cauchy para funciones continuas también es suficiente para las funciones seccionalmente continuas En efecto, si el intervalo $[x_0, X]$ es subdividido en subintervalos $[x_{i-1}\, x_i]$, $i=1,2, \quad ,n$ tal que f coincide en $(x_{i-1}\, x_i)$

con una función f_i que es continua en $[x_{i-1}\ x_i]$, entonces la integral de f está bien definida por

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,dx$$

Más aun, Cauchy consideró integrales de funciones que tienen discontinuidades infinitas, o sea, integrales impropias Por ejemplo, si $\lim_{x\to X} f(x) = \pm\infty$ pero f es continua en $[x_0, X-\varepsilon]$ para todo $\varepsilon>0$, Cauchy definió la integral de f en $[x_0, X]$ por

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx$$

si este límite existe

Ejemplo 1 6 Si tomamos $y = F(x) = \tan^{-1} x$, entonces

$$dy = \frac{dx}{1+x^2}$$

Como las dos funciones $\frac{1}{1+x^2}$ y $\tan^{-1} x$ son finitas y continuas entre los límites $x=-\infty$, $x=+\infty$, por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x F'(x)dx = F(x) - F(0) = \tan^{-1} x$$

De este ejemplo Cauchy deduce que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 1 7 Si tomamos $y = F(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$, entonces

$$dy = \frac{dx}{x}$$

luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene

$$\int_{-1}^x \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln x^2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln x^2$$

Para $x<0$

Para $x>0$, se toma un numero infinitamente pequeño ε, y para dos coeficientes positivos u, v se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{x}\frac{dx}{x} &= \int_{-1}^{-u\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{v\varepsilon}^{x}\frac{dx}{x}\\
&= \frac{1}{2}\ln(u\varepsilon)^2-\frac{1}{2}\ln(1)^2+\frac{1}{2}\ln x^2-\frac{1}{2}\ln(v\varepsilon)^2\\
&= \frac{1}{2}\ln x^2+\ln\left(\frac{u}{v}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln x^2+\int_{-\varepsilon}^{-u\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon v}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1 8 Usemos la definición de la integral definida segun Cauchy para calcular $\int_{x_0}^{X} x dx$ En efecto tomemos $f(x)=x$ y dividamos el intervalo $[x_0, X]$ en n intervalos de igual longitud Luego tomando $d_n = \frac{X-x_0}{n}$ se obtiene

$$
x_1 = x_0 + d_n,\quad x_2 = x_0 + 2d_n,\quad \quad ,x_n = x_0 + nd_n = X
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}d_n\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[x_0+(i-1)d_n\right]d_n\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_0 d_n + \sum_{i=1}^{n}(i-1)d^2{}_n\\
&= nx_0\left(\frac{X-x_0}{n}\right)+\frac{(n-1)n}{2}\frac{(X-x_0)^2}{n^2}\\
&= x_0(X-x_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)(X-x_0)^2
\end{aligned}
$$

De acuerdo a la definición de la integral definida segun Cauchy, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{X} x dx &= \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[x_0\left(X-x_0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(X-x_0\right)^2\right] \\
&= x_0\left(X-x_0\right)+\frac{1}{2}\left(X-x_0\right)^2 \\
&= x_0X-x_0{}^2+\frac{1}{2}X^2-x_0X+\frac{1}{2}x_0{}^2 \\
&= \frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}x_0
\end{aligned}
$$

Si usamos el Teorema Fundamental del Cálculo entonces, tomando $y = F\left(x\right) = \frac{1}{2}x^2$ obtenemos

$$dy = xdx$$

de donde

$$\int_{x_0}^{X} xdx = \int_{x_0}^{X} F\left(x\right)dx = F(x) - F(x_0) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}x_0{}^2$$

Lo cual coincide con el cálculo anterior

1.5 RIEMANN Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Despues de la presentacion de los trabajos de Cauchy quedaba la siguiente pregunta ¿Puede definirse $\int_a^b f(x)dx$ para cualquiera sucesion de ordenadas $y = f(x)$?

Una respuesta negativa a esta pregunta fue sugerida por Peter Gustav Lejeune – Dirichlet (1805 – 1859), un brillante matematico que estudio con Gauss en Alemania y con Fourier en Francia Dirichlet acepta la interpretacion literal de la definicion de Fourier de una funcion arbitraria f, y asegura entonces que la integral $\int_a^b f(x)dx$ no tiene un valor determinado Como demostracion de esto presenta el siguiente contraejemplo Sea $f(x)=c$ si x es un numero racional y $f(x)=d,\ d \neq c$, si x es irracional Asi pues, para cada x se tiene una ordenada bien determinada $f(x)$ f es una funcion arbitraria segun la definicion de Fourier, pero segun Dirichlet $\int_a^b f(x)dx$ no tiene sentido Probablemente Dirichlet estaba pensando en términos de la

definición de integral de Cauchy Si este es el caso, entonces se puede tomar una partición P de $[a,b]$ con todas las diferencias $x_i - x_{i-1}$ arbitrariamente pequeñas y tal que todos los x_i distintos de a y b son irracionales La suma de Cauchy S correspondiente a esta partición es aproximadamente igual a $d(b-a)$ Por otra parte, también se puede tomar otra partición P' de $[a,b]$ con todas las diferencias $x_i - x_{i-1}$ arbitrariamente pequeñas y tal que todos los x_i distintos de a y b sean racionales La suma de Cauchy S' correspondiente a esta partición es aproximadamente igual a $c(b-a)$ Así pues, las sumas S y S' no se van aproximando a un valor limite unico, y por lo tanto $\int_a^b f(x)dx$ no existe en el sentido de Cauchy

En vista de lo anterior, parecía necesario imponer algun tipo de restricción al concepto de función arbitraria para poder garantizar la integrabilidad Dirichlet afirma, sin embargo, que f no necesita ser continua ni tener como máximo un numero finito de puntos de discontinuidad , para que exista $\int_a^b f(x)dx$

Podría haber una cantidad infinita de puntos de discontinuidad en el intervalo $[a,b]$, lo unico que se necesita es que si c y d representan dos cantidades arbitrarias incluidas entre a y b, sea siempre posible encontrar otras cantidades r y s entre a y b, lo suficientemente próximas para que la función permanezca continua en el intervalo de r a s En notación moderna la condición de Dirichlet significa que el conjunto de discontinuidad de la función en el intervalo $[a,b]$ sea un conjunto nunca denso

El problema de la integrabilidad de funciones arbitrarias altamente discontinuas, que Dirichlet había dejado sin resolver, fue recogido por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) un brillante estudiante de Dirichlet Este problema elegido por Riemann suponia todo un reto, ya que significaba ir más allá de los resultados de Dirichlet, es decir, suponía considerar funciones arbitrarias más generales En consecuencia Riemann se vio forzado a considerar a su vez el problema de en qué condiciones se puede definir la integral de tales funciones

En su ***Habilitationschrift*** de 1854, una disertación de alto nivel requerida por la Universidad de Göttingen para poder enseñar en ella, Riemann enunció el siguiente problema simple ¿Qué se entiende por $\int_a^b f(x)dx$? Asumiendo que f sea acotado en $[a,b]$, Riemann presenta la siguiente respuesta

Primeramente Riemann tomó una sucesión de valores

$$a < x_1 < x_2 < \quad < x_{n-1} < b$$

dentro del intervalo $[a,b]$ Tal subdivisión es llamada ahora una partición Él denota la longitud de los subintervalos resultantes por

$$\delta_1 = x_1 - a\,, \qquad \delta_2 = x_2 - x_1\,, \qquad \delta_3 = x_3 - x_2, \quad\ ,\delta_n = b - x_{n-1}$$

Luego Riemann toma una sucesión de valores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \quad , \varepsilon_n$ entre 0 y 1, de donde, para cada ε_i, el numero $x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$ se encuentra entre

$$x_{i-1} + 0\delta_i = x_{i-1} \qquad \text{y} \qquad x_{i-1} + 1\delta_i = x_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) = x_i$$

En otras palabras, $x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$ se encuentra en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ Después de esto, Riemann introduce la suma

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \quad + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

la cual depende de la escogencia de los intervalos δ_i y de las cantidades ε_i

En este momento Riemann presenta su definición de integral

Si esta suma tiene la propiedad que, como quiera que hayan sido tomados δ_i y ε_i, esta tiende a un límite fijo A tan pronto como todos los δ_i se hagan infinitamente pequeños, entonces este valor fijo es llamado $\int_a^b f(x)dx$ Si la suma no tiene esta propiedad, entonces $\int_a^b f(x)dx$ no tiene sentido

Así pues, Riemann toma un punto arbitrario $\overline{x_i} = x_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i$ en el i–ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de su partición, para $i = 1, 2, \quad , n$ y define la integral como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

donde δ (llamada norma de la partición) denota la máxima de las longitudes δ_i de los subintervalos de la partición de $[a,b]$ Esto es una generalización directa de la definición dada por Cauchy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

Riemann simplemente reemplaza el punto inicial x_{i-1} en la definición de Cauchy por un punto arbitrario $\overline{x_i}$ de $[x_{i-1}, x_i]$, e insiste (si la integral existe) que la suma aproximada asociada con una partición se aproxima a un valor fijo (la integral) cuando la norma δ se aproxima a cero, independientemente de la escogencia de los puntos $\overline{x_i}$

Ahora Riemann dice, "Determinemos la extensión de la validez de este concepto, y pregunta ¿en qué casos una función es integrable y en qué casos no lo es? Comenzando con una función acotada f y una partición P de $[a,b]$, Riemann considera la oscilación total

$$D(P) = D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \quad + D_n\delta_n$$

de $f(x)$ con respecto a P, donde $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ y D_i denota la diferencia entre el valor más grande y el más pequeño de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

Riemann tomó como un hecho que la integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)(x_i - x_{i-1})$$

existe si y sólo si

$$\lim_{\delta\to 0} D(P) = \lim_{\delta\to 0}(D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \quad + D_n\delta_n) = 0$$

Después de esto, Riemann define $\Delta = \Delta(d)$ como el valor máximo de las oscilaciones totales $D(P)$ para toda partición P con norma $\delta < d$, es decir,

$$\Delta = \Delta(d) = \sup_{\delta<d} D(P), \text{ donde } \delta \text{ es la norma de } P$$

Por lo tanto, $\Delta(d)$ es obviamente una función decreciente de la variable d, y f es integrable en $[a,b]$ sí y sólo si

$$\lim_{d\to 0}\Delta(d)=0$$

Dado $\sigma>0$ y una partición P, Riemann denota por $s=S(\sigma,P)$ la suma de las longitudes δ_i de aquellos subintervalos de P, para los cuales $D_i>\sigma$ Él ahora establece la siguiente condición necesaria y suficiente para la existencia de la integral de una función acotada

Si $f(x)$ es acotada para $x\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ existe si y sólo si, dado $\sigma>0$, entonces $S(\sigma,P)$ se aproxima a cero cuando la norma de la partición P se aproxima a cero

Esto es, dado $\sigma>0$ y $\varepsilon>0$, existe un $d>0$ tal que para toda partición P con $\delta<d$, la suma s de las longitudes de aquellos subintervalos de P, en los cuales la oscilación de $f(x)$ es mayor que σ, es menor que ε

Para ver que la condición dada por Riemann es necesaria y suficiente para la integrabilidad de f, denotemos por **tipo A** los subintervalos para los cuales la oscilación de las funciones f es mayor que σ y a los otros subintervalos donde la oscilación es menor o igual que σ los llamaremos subintervalos **tipo B** Así pues, podemos escribir

$$s = S(\sigma, P) = \sum_{tipo\ A} \delta_i$$

Luego, la condición de integrabilidad de Riemann se expresa como $\int_a^b f(x)dx$ existe si y solo si, para todo $\sigma > 0$, la suma de las longitudes de los subintervalos del tipo A se puede hacer tan pequeña como se quiera haciendo que d se aproxime a cero

Condición necesaria Si $\int_a^b f(x)dx$ existe y si fijamos un valor $\sigma > 0$, entonces

$$\lim_{d \to 0} S(\sigma, P) = 0$$

Para probar esto Riemann comienza con una partición con norma d y nota que

$$\sum_{tipo\ A} \delta_i D_i \leq D(P)$$

ya que la suma en la izquierda incluye los términos del tipo A y omite los otros Pero como por definición en cada subintervalo del tipo A la oscilación de f excede a σ, se tiene que

$$D(P) \geq \sum_{tipo\ A} \delta_i D_i \geq \sum_{tipo\ A} \delta_i \sigma = \sigma \sum_{tipo\ A} \delta_i = \sigma\ S(\sigma, P)$$

Por otro lado, por la definición de $\Delta(d)$ se tiene que

$$D(P) = D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \quad + D_n\delta_n \leq \Delta(d)$$

De estas dos desigualdades Riemann obtiene que

$$\sigma\ S(\sigma,P) \leq D(P) \leq \Delta(d)$$

Dividiendo por σ, él concluye que

$$O \leq S(\sigma,P) \leq \frac{\Delta(d)}{\sigma}$$

Como por hipótesis f es integrable, se tiene que

$$\Delta(d) \to 0 \text{ cuando } d \to 0$$

Luego con σ en un numero fijo, se tiene que

$$\lim_{d \to 0} \frac{\Delta(d)}{\sigma} = 0$$

Por consiguiente

$$\lim_{d\to 0} S(\sigma, P) = 0$$

Como se quería probar

Condición suficiente Si para cada $\sigma > 0$, tenemos que

$$\lim_{d\to 0} S(\sigma, P) = 0$$

entonces $\int_a^b f(x)dx$ existe

En esta ocasión Riemann comienza con lo siguiente para cada $\sigma > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} D(P) &= \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \quad + \delta_n D_n \\ &= \sum_{tipo\ A} \delta_i D_i + \sum_{tipo B} \delta_i D_i \end{aligned}$$

y trata cada sumando separadamente

Para la primera suma, Riemann reafirma que $D_i \leq D$, donde D es la oscilación de f sobre el intervalo $[a,b]$

Por lo tanto

$$\sum_{tipo\ A} \delta_i D_i \le \sum_{tipo\ A} \delta_i D = D \sum_{tipo\ A} \delta_i = D\ S(\sigma, P)$$

Mientras que para la segunda suma, Riemann recalca que $D_i \le \sigma$, por lo tanto

$$\sum_{tipo\ B} \delta_i D_i \le \sum_{tipo\ B} \delta_i \sigma = \sigma \sum_{tipo\ B} \delta_i \le \sigma \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \sigma(b-a)$$

De estas dos desigualdades, Riemann concluye que

$$D(P) = \sum_{tipo\ A} \delta_i D_i + \sum_{tipo\ B} \delta_i D_i \le D\ S(\sigma, P) + \sigma(b-a)$$

para todo σ, Como por hipótesis

$$\lim_{d \to 0} S(\sigma, P) = 0$$

para todo $\sigma > 0$, Riemann concluye que

$$\lim_{d \to 0} D(P) = 0$$

Luego, por la definición de $\Delta(d)$ se tiene que

$$\lim_{d\to 0}\Delta(d)=0$$

lo cual es la manera de Riemann de decir que f es integrable en $[a,b]$

El teorema de Riemann sobre la integrabilidad de las funciones inmediatamente implica que $\int_a^b f(x)dx$ existe si f es uniformemente continua en $[a,b]$ En este caso, dado $\sigma>0$ existe un $d>0$ tal que las oscilaciones de $f(x)$ son menores que σ en cualquier subintervalo de longitud menor que d Por lo tanto $S(\sigma,P)=0$ si la norma de la partición es menor que d Sin embargo, Riemann se abstuvo de concluir que toda función continua es integrable La continuidad uniforme de una función continua en un intervalo cerrado no fue rigurosamente establecida hasta principios de 1870 cuando el teorema de Bolzano – Weierstrass (enunciado por Bolzano y probado por Weierstrass) fue demostrado

La idea fundamental en el argumento de Riemann, para que una función sea integrable, es que se tenga control sobre sus oscilaciones Una función que salta frecuentemente y ampliamente no puede ser integrable Desde un punto de vista geométrico, tales funciones parecen no tener una área definida bajo ellas

La condición de integrabilidad de Riemann es un argumento para probar cuando una función acotada es o no integrable Consideremos nuevamente la función de Dirichlet, con $c=1$ y $d=0$, restringida al intervalo $[0,1]$ Luego

$$f \quad [0,1] \to R$$
$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es racional} \\ 0, \text{ si es irracional} \end{cases}$$

La pregunta es si, segun la definición de Riemann, la integral $\int_0^1 f(x)dx$ existe

Tomemos $\sigma = \frac{1}{2}$ y consideremos una partición arbitraria

$$0 < x_1 < x_2 < \quad < x_{n-1} < 1$$

Como los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ contienen infinitos numeros, racionales e infinitos numeros irracionales, la oscilación de f en $[x_{i-1}, x_i]$ es

$$1-0=1>\frac{1}{2}=\sigma$$

Por lo tanto, todo sub intervalo de la partición es del tipo A, lo cual implica que

$$S(\sigma, P)=\sum_{tipo\ A} \delta_i = 1$$

Así pues, para $\sigma = \frac{1}{2}$ se tiene que

$$\lim_{d \to 0} S(\sigma, P) = 1$$

Luego, por la condición de integrabilidad de Cauchy, se tiene que $\int_0^1 f(x)dx$ no existe

Intuitivamente, la función de Dirichlet es tan discontinua que no puede ser integrable Este fenómeno da origen a la siguiente pregunta fundamental ¿Qué tan discontinua puede ser una función para que aun sea integrable segun la definición de Riemann? Aunque este misterio no fue resuelto hasta el siglo XX, Riemann describe una función que proveia una pieza tentadora de evidencia

Riemann señaló que una función puede ser discontinua, en un conjunto denso pero sin embargo ser integrable Él dice que como este tipo de funciones son ahora consideradas, sería bueno presentar un ejemplo Este ejemplo es descrito como sigue

Para cada numero real x, sea

$$(x) = x - i(x)$$

donde $\imath(x)$ es la parte entera de x , al menos que x sea un multiplo impar de $\frac{1}{2}$, en cuyo caso $(x) = 0$

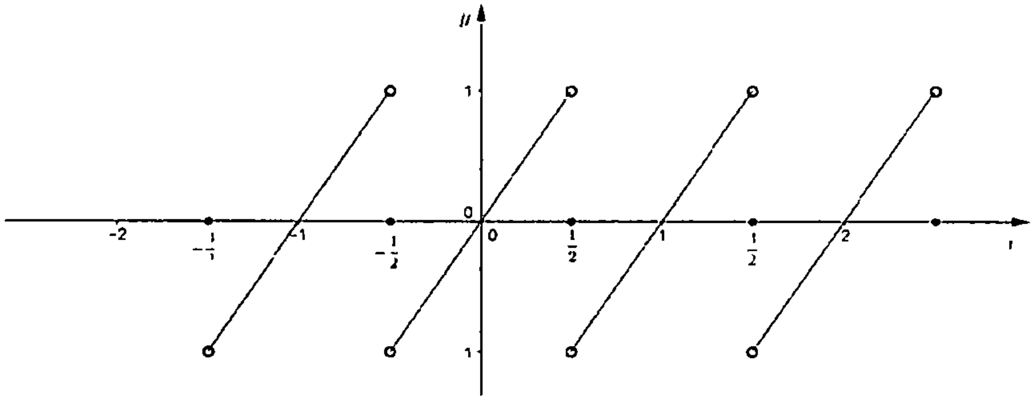


Figura 1 8

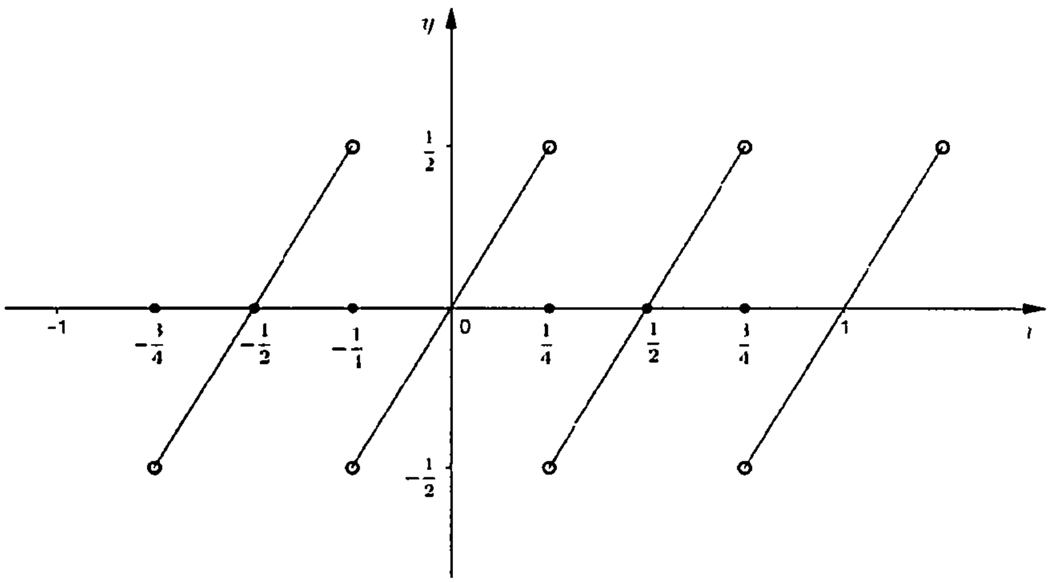


Figura 1.9

La función exótica de Riemann está definida por

$$f(x) = \frac{(x)}{1^2} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^2} + \qquad = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)}{k^2}$$

Si x no es un numero racional de la forma $\frac{m}{2n}$, donde m y n son numeros enteros primos relativos con m impar, entonces kx no es un multiplo impar de $\frac{1}{2}$ para cada entero positivo k Por lo tanto, se puede probar que f es continua en x Si x es de la forma $\frac{m}{2n}$ indicada anteriormente, entonces kx es un multiplo impar de $\frac{1}{2}$ cuando k es un multiplo impar de n, $k = n(2p+1)$ En este caso el término $\frac{(kx)}{k^2}$ tiene un salto negativo de $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2(2p+1)^2}$ en $x = \frac{m}{2n}$

Esto indica que f es discontinua en cada uno de estos puntos $x = \frac{m}{2n}$, teniendo ahí un salto de

$$f(x-) - f(x+) = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8n^2}$$

Por supuesto estos puntos de discontinuidad forman un subconjunto denso en cada intervalo

Por otro lado, dado un intervalo $[a,b]$ y un numero $\sigma > 0$, existen solamente un numero finito de esos puntos $x = \frac{m}{2n}$ en $[a,b]$ tales que $\frac{\pi^2}{8n^2} > \sigma$ Consecuentemente la suma $S(\sigma, P)$ de la longitud de los subintervalos conteniendo estos puntos se puede hacer arbitrariamente pequeña tomando la norma de la partición P suficientemente pequeña Por lo tanto, la función de Riemann f satisface su condición de integrabilidad, es decir, $\int_a^b f(x)dx$ existe a pesar de la densidad del conjunto de discontinuidad de f

La definición de integral de Riemann fue la más general que pudo ser basada directamente en la suma aproximada de Cauchy asociadas con la partición del intervalo de integración en subintervalos Sin embargo, durante las ultimas tres décadas del siglo XIX, esta definición fue reformulada de varias maneras que posteriormente iluminó el concepto de integración y pavimentó el camino para generalizaciones importantes adicionales a principios del siglo XX

A mediados de la década de los años 1870 varios autores, independientemente, introdujeron las llamadas sumas inferiores y sumas superiores de Riemann para la función acotada f en el intervalo $[a,b]$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{y} \qquad L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

donde P es una partición de $[a,b]$ en subintervalos, M_i es el valor máximo (supremo) y m_i es el valor mínimo (infimo) de $f(x)$ en el i-ésimo intervalo $[x_{i-1},x_i]$ Hoy en día estas sumas son llamadas **sumas de Darboux** en honor al matemático francés Gastón Darboux (1847 – 1917), el cual simplificó el desarrollo de la integral de Riemann, y es su enfoque el que aparece en la mayoría de los libros de texto cuando introducen la teoria de integración de Riemann

Veamos el siguiente ejemplo, donde se prueba que toda función monótona y acotada en el intervalo $[a,b]$ es integrable segun Riemann

Ejemplo 1 9 Sea f $[a,b]\rightarrow R$ una función monótona creciente (el caso donde f es decreciente se hace de forma similar) Consideremos una partición arbitraria P,

$$a < x_1 < x_2 < \quad < x_{n-1} < b$$

del intervalo $[a,b]$ con norma δ Entonces como f es creciente en el intervalo $[a,b]$, se tiene que

$$f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$$

Para todo $i = 1,2, \quad , n$

De lo anterior se tiene que

$$
\begin{aligned}
D(P) &= D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \cdots + D_n\delta_n \\
&\leq D_1\delta + D_2\delta + \cdots + D_n\delta \\
&= (D_1 + D_2 + \cdots + D_n)\delta \\
&= \left[\left(f(x_1) - f(x_0)\right) + \left(f(x_2) - f(x_1) + \cdots + (f(x_n) - f(x_{n-1})\right)\right]\delta \\
&= \left(f(x_n) - f(x_0)\right)\delta \\
&= \left(f(b) - f(a)\right)\delta \\
&= D\delta
\end{aligned}
$$

Por consiguiente,

$$0 \leq \Delta(d) \leq Dd$$

De donde

$$\lim_{d \to 0} \Delta(d) = 0$$

Así, por el criterio de integrabilidad de Riemann, se tiene que $\int_a^b f(x)dx$ existe

En la segunda versión del Teorema Fundamental del Cálculo, Cauchy establece que si F es una función diferenciable y su derivada F' es continua en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Informalmente, esto dice que bajo ciertas condiciones la integral de la derivada restaura la función original En la demostración, Cauchy usa las hipótesis

a) F tiene derivada

b) Esta derivada es continua

La pregunta es sí, en la teoría de integración de Riemann podemos generalizar (debilitando las hipótesis) este resultado

Como ilustración veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1 10 Sea $F\ [-2,2]\to R$ la función definida por

$$F(x)=\begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{, si } x=0 \end{cases}$$

Luego F es derivable en todo punto del intervalo $[-2,2]$ y

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 2x\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right)-\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{, si } x=0 \end{cases}$$

Note que f es una función acotada en el intervalo $[-2,2]$

Por otro lado, consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida en $[-2,2]$ Por $x_n = \dfrac{1}{2n}$

Luego

$$f(x_n) = 2\left(\frac{1}{2n}\right)\operatorname{sen}(2n\pi) - \pi\cos(2n\pi) = -\pi$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\pi \neq f(0)$$

se tiene que f no es continua en $[-2,2]$ Sin embargo f es integrable segun Riemann en $[-2,2]$ y

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx &= F(2) - F(-2)\\ &= 4sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 4+4\\ &= 8\end{aligned}$$

Así pues, la función F satisface la segunda versión del Teorema Fundamental del Cálculo en $[-2,2]$ sin ser F' una función continua en $[-2,2]$

Ejemplo 1 11 Sea F $[-1,1] \to R$ la función definida por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Luego F es derivable en todo punto del intervalo $[-1,1]$ y

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sin embargo, f no es integrable segun Riemann en $[-1,1]$ ya que ella no es acotada en $[-1,1]$ Por consiguiente, la función F no satisface el teorema fundamental del cálculo

La pregunta que nos debemos hacer es entonces, ¿Qué condiciones debemos imponerle a F' para garantizar la veracidad del Teorema Fundamental del Cálculo en la teoría de integración de Riemann? La respuesta a esta pregunta se profundizará en el Capítulo 2

1.6 LEBESGUE Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

El estatus del Teorema Fundamental del Cálculo en la teoría de integración de Cauchy era bastante satisfactoria Las fórmulas

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x) \qquad (1)$$

$$\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a) \qquad (2)$$

eran validas siempre y cuando las funciones a integrar fuesen continuas, y Cauchy solo definio la integral para funciones continuas

Con la definicion mas general de integral para funciones discontinuas dada por Riemann, el Teorema Fundamental del Calculo perdio su complejidad de alcance La formula (2) no tiene sentido para una funcion diferenciable cuya derivada no es integrable segun Riemann (Ver Ejemplo 1 11) y la demostracion clasica establece la formula (1) solo en los puntos de continuidad de la funcion f La restauracion del teorema fundamental del cálculo a un estatus satisfactorio fue uno de los primeros frutos de la nueva teoria de integracion que Henri Lebesgue (1875 – 1941) introdujo en su tesis doctoral en 1902

En el enfoque de Camille Jordan (1838 – 1922) de la integral de Riemann, la integral inferior y la integral superior de Riemann fueron definidas por

$$R\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx=\sup\sum_{i=1}^{n} m_i c(E_i) \qquad (3)$$

$$R\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \inf \sum_{i=1}^{n} M_i c(E_i) \qquad (4)$$

donde $\{E_1, E_2, \quad , E_n\}$ denota una partición de $[a,b]$ en conjuntos medibles segun Jordán con contenido de Jordán $c(E_i)$ y m_i, M_i denotan el infimo y el supremo, respectivamente, de $f(x)$ para $x \in E_i$ La idea básica de Lebesgue fue extender la clase de funciones que eran integrables, extendiendo la clase de los conjuntos que son medibles Si la medida $m(E)$ es definida para una clase de conjuntos que contiene propiamente los conjuntos medibles segun Jordán y $m(E) = c(E)$ si E es medible segun Jordán, entonces la integral puede ser generalizada reemplazando los conjuntos E_i en (3) y (4) por estos nuevos conjuntos medibles

Lebesgue generaliza el concepto de medida basándose en cubrimientos infinitos enumerables en lugar de cubrimientos finitos Dado un conjunto E de numeros reales, Lebesgue definió su medida exterior $m_e(E)$ como el ínfimo de las sumas

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i)$$

donde $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de intervalos disjuntos cuya unión contiene al conjunto E

Si $E \subset [a,b]$, la medida interior de E es definida por

$$m_i(E) = (b-a) - m_e([a,b]-E)$$

El conjunto acotado E es llamado medible (segun Lebesgue) con medida $m(E)$ si

$$m_e(E) = m_i(E) = m(E)$$

Segun esta definición, todo conjunto E medible segun Jordán es medible segun Lebesgue, y $m(E) = c(E)$

La integral inferior de Lebesgue $L\underline{\int_a^b} f(x)dx$ y la integral superior de Lebesgue $L\overline{\int_a^b} f(x)$ para una función acotada f están definidas de forma similar que en (3) y (4), excepto que ahora $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ en una partición de $[a,b]$ en conjuntos medibles y $c(E_i)$ es reemplazado por $m(E_i)$ Así, f es integrable segun Lebesgue en $[a,b]$ si la integral inferior y la integral superior son iguales Como

$$R\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq L\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq L\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq R\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

se tiene que si la función f es integrable segun Riemann, entonces f es integrable segun Lebesgue en $[a,b]$ y, en este caso, las dos integrales son iguales

Lebesgue probó que una función acotada f en un intervalo cerrado $[a,b]$ es integrable segun Riemann en $[a,b]$ sí y solo si el conjunto de sus discontinuidades en $[a,b]$ tiene medida cero, mientras toda función acotada y medible f (o sea que $f^{-1}(U)$ es un conjunto medible, para todo intervalo abierto U) es integrable segun Lebesgue Por ejemplo la función de Dirichlet definida en el intervalo $[0,1]$

$$f\ [0,1] \to R$$
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \text{ es racional} \\ 1, \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es integrable segun Riemann ya que su conjunto de discontinuidades es todo el intervalo $[0,1]$ y $m([0,1]) = 1 \neq 0$, pero como f es medible, ella es integrable segun Lebesque y

$$L\int_a^b f dx = 1$$

Además del hecho que la clase de funciones integrables ha sido agrandada considerablemente, el poder de la integral de Lebesgue se evidencia cuando se trabaja con sucesión de funciones En este sentido Lebesgue demostró el siguiente resultado

Teorema de la Convergencia Acotada Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medible tal que $|f_n(x)| \leq K$ para un K fijo y para todo $x \in [a,b]$ (es decir que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente acotada) en $[a,b]$) y

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

para todo $x \in [a,b]$ Entonces f es medible en $[a,b]$ y

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

donde las integrales son en el sentido de Lebesgue Este resultado es válido en el sentido de Riemann sólo si se supone que la convergencia de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniforme en $[a,b]$, hipótesis que es muy fuerte en muchas aplicaciones

El teorema de la convergencia acotada es la herramienta que se necesita para probar el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue

Teorrema 1 1 (Teorema Fundamental del Cálculo) Sea f una función dıferencıable en $[a,b]$ tal que f' es acotada en $[a,b]$ Entonces f' es ıntegrable segun Lebesgue en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \tag{5}$$

Demostración

Para cada $n \in N$ definamos la funcıón

$$g_n \quad [a,b] \to R$$
$$g_n(x) = \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}, \; h_n = \frac{1}{n}$$

Entonces $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesıón unıformemente acotada de funcıones medıbles convergente a f' en $[a,b]$ Luego por el teorema de la convergencıa acotada se tıene que

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)dx &= \lim_{n\to 0}\int_a^b g_n(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_a^b\left[f\left(x+h_n\right)-f(x)\right]dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\left[\int_a^b f(x+h_n)-\int_a^b f(x)dx\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\left[\int_{a+h_n}^{b+h_n} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\left[\int_{a+h_n}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{b+h_n} f(x)dx - \int_{a}^{a+h_n} f(x)dx - \int_{a+h_n}^{b} f(x)dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_{b}^{b+h_n} f(x)dx - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\int_{a}^{a+h_n} f(x)dx \\
&= f(b)-f(a)
\end{aligned}
$$

ya que f es continua en $[a,b]$

De igual manera se tiene el siguiente resultado

Teorema 1 2 Sea f una función acotada y medible en $[a,b]$ Definamos la función $F\ [a,b]\to R$ por

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Entonces existe un conjunto $E\subset[a,b]$ de medida cero tal que

$$F'(x)=f(x) \tag{6}$$

para todo $x\in[a,b]-E$ En este caso se dice que (6) se satisface casi en todas partes $(c\imath\, p)$

Demostración

Definamos las funciones $f^-, f^+ \ [a,b] \to R$ por $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ y $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ Note que f^-, f^+ son funciones no negativas tales que $f = f^+ - f^-$

Entonces

$$F(x) = \int_a^x f^+(t)dt - \int_a^x f^-(t)dt = F_1(x) - F_2(x)$$

donde

$$F_1(x) = \int_a^x f^+(t)dt \quad \text{y} \quad F_2(x) = \int_a^x f^-(t)dt$$

Note que F_1 y F_2 son funciones crecientes Por lo tanto, F_1 y F_2 son diferenciables $(c.t\,p)$ en $[a,b]$ Por el Teorema 1 1 se tiene que

$$\int_a^c F'(x)dx = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

de donde

$$\int_a^c [F'(x) - f(x)]dx = 0$$

para todo $c \in [a,b]$ Por consiguiente, $F'(x) = f(x)$ $(c.t.p)$ en $[a,b]$, es decir, $F'(x) = f(x)$ en $[a,b]$, excepto posiblemente en un conjunto de medida cero

Los Teoremas 1 1 y 1 2 dicen que la diferenciación y la integración de Lebesgue son operaciones inversas en una clase muy amplia de funciones Si f es una función acotada y medible en $[a,b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x) \qquad (c.t.p)$$

Si f es una función acotada y medible en $[a,b]$ con $f(a) = 0$ y su derivada f' existe y es acotada en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x)$$

Estas dos versiones del teorema fundamental del cálculo proveen una formulación rigurosa definitiva de la relación inversa entre la diferenciación y la integración, que Newton y Leibniz descubrieron conceptualmente y fue explotada en el siglo XVII

CAPÍTULO 2: EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO EN EL ANÁLISIS REAL.

Una de las principales ventajas de la teoria de integración de Cauchy (para funciones continuas) es que le permitió demostrar generalmente la existencia de integrales o funciones primitivas, cuyas propiedades, él pensó, podian ser estudiadas sólo después de la demostración de su existencia Para una función continua $f\ [a,b]\to R$, Cauchy consideró la función $F\ [a,b]\to R$ definida por

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Como

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=f(x+\theta h)$$

con $\theta\in[0,1]$, F no es sólo continua sino también diferenciable De aquí, Cauchy estableció los siguientes resultados

Teorema A F es una función primitiva para f en $[a,b]$, es decir, $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$

Teorema B Todas las primitivas de f deben ser de la forma $\int_a^b f(t)dt+c$, donde c es una constante, esto es, si G es una función con derivada continua G', entonces

$$\int_a^x G'(t)dt = G(x) - G(a)$$

para todo $x \in [a,b]$

El Teorema A es llamado la primera versión del Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema B es llamado la segunda versión del Teorema F **III - PARTE** **Evalue la siguiente integral**

1) $\int_0^\infty t \cosh 2t \cos 3t dt$

IV - PARTE. Resuelva el siguiente Sistema

2)
$$\begin{aligned} &2x + y - y = t \\ &x + y = t^2 \\ &x(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 1 \end{aligned}$$

Fundamental del cálculo Los dos teoremas colectivos se llaman el Teorema Fundamental del Cálculo

En este capítulo se presenta la demostración formal del Teorema Fundamental del Cálculo en la teoria de integración de Riemann, se consideran algunos ejemplos patológicos y se generalizan los Teoremas A y B debilitando la hipótesis de continuidad

2.1 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y LA CONTINUIDAD.

Como toda función continua en $[a,b]$ es integrales segun Riemann en $[a,b]$, las versiones respectivas del Teorema Fundamental del Cálculo en la teoria de integración de Riemann la podemos expresar como siguen

Teorema 2 1 Sea f $[a,b] \to R$ una función continua en $[a,b]$ y definamos la función F $[a,b] \to R$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Entonces F es una función primitiva para f en $[a,b]$, es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$

Teorema 2 2 Sea F $[a,b] \to R$ una función diferenciable en $[a,b]$ Si la función $f(x) = F'(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$$

para todo $x \in [a,b]$

El Teorema 2 2 exige que la derivada F' sea continua en $[a,b]$ Sin embargo, en el Ejemplo1 10 se puede observar que la derivada F' no es continua en $[a,b]$ y aun se cumple el resultado de este teorema, o sea que

$$\int_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a)$$

para todo $x \in [a,b]$ Además, en el Ejemplo 1 11 podemos ver que la derivada de una función en un intervalo cerrado $[a,b]$ no es necesariamente integrable (segun Riemann)

Así pues, la continuidad de la derivada F' de la función F no se puede tomar como un hecho, ni la hipótesis de continuidad de F' es una condición necesaria para que se cumpla el Teorema 2 2

La pregunta ahora es ¿Qué condiciones se les deben imponer a la derivada F' de la función F que garantice la veracidad del Teorema Fundamental del Cálculo?

Antes de contestar esta pregunta veamos que propiedades tiene la derivada f' de una función diferenciable en $[a,b]$ De los Ejemplos 1 10 y 1 11 sabemos que f' no es necesariamente continua ni acotada en $[a,b]$ Así que nos preguntamos qué tan mal puede ser el comportamiento de la derivada de una función En esta dirección, Darboux probó el siguiente resultado

Teorema 2 3 (Propiedad del Valor Intermedio para derivadas)

Sea $f\ [a,b] \to R$ una función diferenciable en el intervalo $[a,b]$ Si k es un numero entre $f'(a)$ y $f'(b)$, entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que $f'(c) = k$

Demostración

Supongamos que $f'(a) < k < f'(b)$ Definamos la función $g\ [a,b] \to R$ por

$$g(x) = kx - f(x)$$

Como f es diferenciable en $[a,b]$, g es diferenciable en $[a,b]$ y $g'(x) = k - f'(x)$ Por lo tanto existe un punto, $c \in [a,b]$ donde g alcanza su valor máximo Como $g'(a) = k - f'(a) > 0$ y $g'(b) = k - f'(b) < 0$, el valor máximo de g no puede ocurrir ni en a ni en b

De lo anterior se deduce que $c \in (a,b)$ Por consiguiente $g'(c) = 0$ Es decir, $k - f'(c) = 0$ y $f'(c) = k$

En el Ejemplo 1 11 se tiene que F' no es acotada en $[a,b]$ Será que si se supone que F' es acotada en $[a,b]$, entonces se satisface el Teorema Fundamental del Cálculo En este sentido se plantea la siguiente conjetura en la teoría de integración de Riemann

Conjetura Sea $F\ [a,b]\to R$ una función diferenciable en $[a,b]$ con derivada acotada F' en $[a,b]$ Entonces

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

En 1881 el matemático italiano Vito Volterra (1860 – 1940) resolvió negativamente esta conjetura en su articulo **"Sui principii del calcolo integrale"** Ahí Volterra presentó un ejemplo de una función F que tenía una derivada acotada en $[a,b]$ pero que cuya derivada era tan discontinua como para ser integrable (o sea que el conjunto de discontinuidades tenía medida de Lebesgue no nula) En otras palabras, aunque F era derivable en todo punto y su derivada F' era acotada, la integral $\int_a^b F'(x)dx$ no existía Así, como la integral no existe, la ecuación

$$\int_a^b F(x)dx = F(b) - F(a)$$

no puede ser verdadera De esta manera, Volterra destruyo cualquier esperanza de establecer un Teorema Fundamental del Cálculo simple en la teoría de integración de Riemann

A pesar del ejemplo presentado por Volterra, En 1875 Dorboux tuvo éxito en determinar la propiedad de la derivada F' para que el teorema fundamental del cálculo sea verdadero, resultado que enunciamos en el siguiente teorema y es una generalización del Teorema 2 2

TEOREMA 2 4 (Teorema Fundamental de Cálculo) Sea $F\ [a,b] \to R$ una función diferenciable en $[a,b]$ Si $f = F'$ es integrable (segun Riemann) en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración

Consideremos la partición $P = \{x_0\, x_1, \quad , x_n\}$ de $[a,b]$, donde

$$a = x_0 < x_1 < \quad < x_n = b$$

Luego

$$\begin{aligned}F(b)-F(a) &= F(x_n)-F(x_0)\\ &= \left(F(x_1)-F(x_0)\right)+\left(F(x_2)-F(x_1)\right)+ \quad +\left(F(x_n)-F(x_{n-1})\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i) \quad -F(x_{i-1})\right)\end{aligned}$$

Como F es diferenciable en $[x_{i-1},x_i]$, por el Teorema del Valor Medio de Lagrange, existe $c_i \in (x_{i-1},x_i)$ tal que

$$F(x_i)-F(x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Por consiguiente

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Note que

$$m_i = \min(f[x_{i-1},x_i]) \le f(c_i) \le \max\left(f,[[x_{i-1},x_i]]\right) = M_i$$

para todo $i=1,2, \quad ,n$ Por lo tanto

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = U(f,P)$$

de donde

$$L(f,P) \le F(b)-F(a) \le U(f,P)$$

para toda partición P Como

$$Sup\{L(f,P) \ P \text{ es una partición de } [a,b]\} = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$$

$$\inf\{U(f,P) \ P \text{ es una particion de } [a,b]\} = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$$

se tiene que

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \leq \quad F(b) - F(a) \leq \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$$

Por hipótesis $f = F'$ es integrable en $[a,b]$, o sea que

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x) \ dx = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$$

Por consiguiente

$$\int_{a}^{b} F'(x)dx = \int_{a}^{b} f(x) \ dx = F(b) - F(a)$$

Una ingenua generalización del Teorema 2 4 es la siguiente

Teorema 2 5 Sean $f, F \ [a,b] \to R$ funciones y E un subconjunto finito de $[a,b]$ Si

a) F es continua en $[a,b]$

b) $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b] - E$

c) f es integrable segun Riemann en $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración

La demostración de este teorema es similar a la del Teorema 2 4

En el Teorema 2 4 presentado por Darboux, se supone que la función $f = F'$ es integrable segun Riemann en $[a,b]$ Pero bajo qué condiciones la derivada F' de F es integrable segun Riemann (sin hacer uso de la teoria de la medida) En lo que sigue daremos respuesta a esta pregunta

Teorema 2 6 Sea ϕ $[a,b] \to R$ una función integrable en $[a,b]$ y supongamos que existen constantes m y M tales que

$$m \leq \phi(x) \leq M$$

para todo $x \in [a,b]$ Definamos la función φ $[a,b] \to R$ por

$$\varphi(x) = \int_a^x \phi(t)dt$$

Si φ es diferenciable en $[a,b]$, entonces

$$m \leq \varphi'(x) \leq M$$

para todo $x \in [a,b]$

Demostración

Definamos la función $k\ [a,b] \to R$ por

$$k(x) = \varphi(x) - m(x-a)$$

Entonces k es diferenciable en $[a,b]$ y

$$k'(x) = \varphi'(x) - m$$

para todo $x \in [a,b]$ Además

$$\begin{aligned} k(x) &= \int_a^x \phi(t)dt - m(x-a) \\ &= \int_a^x \phi(t)dt - \int_a^x mdt \\ &= \int_a^x (\phi(t) - m)\ dt \end{aligned}$$

Como $\phi(t) \geq m$ para todo $t \in [a,b]$, k es una función creciente en $[a,b]$ Por lo tanto, $k'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ Así pues

$$\varphi'(x) \geq m, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in [a,b]$$

Por otro lado, definamos la función $L\ [a,b] \to R$ por

$$L(x) = M(x-a) - \varphi(x)$$

Entonces L es diferenciable en $[a,b]$ y $L'(x) = M - \varphi'(x)$ para todo $x \in [a,b]$ Además

$$\begin{aligned} L(x) &= M(x-a) - \int_a^x \phi(t)dt \\ &= \int_a^x Mdt - \int_a^x \phi(t)dt \\ &= \int_a^x (M - \phi(t))\ dt \end{aligned}$$

Como $\phi(t) \leq M$ para todo $t \in [a,b]$, L es una función creciente en $[a,b]$ Por lo tanto, $L'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ Así pues,

$$\varphi'(x) \leq M, \text{ para todo } x \in [a,b]$$

De todo lo anterior se tiene que

$$m \leq \varphi'(x) \leq M, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in [a,b]$$

Teorema 2 7 Sea ϕ $[a,b] \to R$ una función integrable en $[a,b]$ y definamos la función φ $[a,b] \to R$ por

$$\varphi(x) = \int_a^x \phi(t)\ dt$$

Si φ es diferenciable en $[a,b]$, entonces φ' es integrable en $[a,b]$

Demostración

Sea $P = \{x_0, x_1, \quad , x_n\}$ una partición de $[a,b]$, donde

$$a = x_0 < x_1 < \quad < x_n = b$$

Como

$$m_i = \inf\left(\phi[x_{i-1}, x_i]\right) \leq \phi(t) \leq \sup\left(\phi[x_{i-1}, x_i]\right) = M_i$$

para todo $t \in [x_{i-1}, x_i]$, por el Teorema 2 6 se tiene que

$$m_i \leq \varphi'(x) \leq M_i$$

Por lo tanto

$$L(\phi,P) \leq L(\varphi',P) \leq U(\varphi',P) \leq U(\phi,P)$$

y

$$\underline{\int_a^b} \phi(x)dx \leq \underline{\int_a^b} \varphi'(x)dx \leq \overline{\int_a^b} \varphi'(x)dx \leq \overline{\int_a^b} \phi(x)dx$$

Como ϕ es integrable en $[a,b]$, se tiene que

$$\underline{\int_a^b} \phi(x)\,dx = \overline{\int_a^b} \phi(x)\,dx = \int_a^b \phi(x)\,dx$$

Por consiguiente,

$$\underline{\int_a^b} \varphi'(x)dx = \overline{\int_a^b} \varphi'(x)dx$$

y φ' es integrable en $[a,b]$

Teorema 2 8 Sea F $[a,b] \to R$ una función diferenciable en $[a,b]$ La derivada F' es integrable en $[a,b]$ si y sólo si existe una función integrable ϕ $[a,b] \to R$ tal que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \phi(t)dt$$

para todo $x \in [a,b]$

Demostración Supongamos que F' es integrable en $[a,b]$ Tomemos $\phi = F'$, entonces por el Teorema 2 4,

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a)$$

Por lo tanto,

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \text{, para todo } x \in [a,b]$$

Supongamos ahora que existe una función integrable ϕ $[a,b] \to R$ tal que

$$F(x) = F(a) + \int_a^x \phi(t)\,dt \text{, para todo } x \in [a,b]$$

Definamos la función φ $[a,b] \to R$ por

$$\varphi(x) = \int_a^x \phi(t)\,dt$$

Luego

$$\varphi(x) = F(x) - F(a), \text{ para todo } x \in [a,b]$$

Por lo tanto φ es derivable en $[a,b]$ y $\varphi' = F'$ Así, por el Teorema 2 7, $F' = \varphi'$ es integrable en $[a,b]$

Observación Por el Teorema Fundamental del Cálculo (Teorema 2 4), en el Teorema 2 8 se deduce que

$$\int_a^x F'(t)dt = \int_a^x \phi(t)dt, \text{ para todo } x \in [a,b]$$

Sin embargo esto no implica que $F' = \phi$, como lo muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 2 1 Consideremos las funciones F, ϕ $[-1,1] \to R$ definidas por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ si \quad -1 \le x < 0 \\ x^2 & , \ si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}, \qquad \phi(x) = \begin{cases} 0 & ,si \quad -1 \le x < 0 \\ 2 & ,si \quad x = 0 \\ 2x & ,si \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Entonces, F es derivable en el intervalo $[-1,1]$ y

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & , \ si \quad -1 \le x < 0 \\ 2x & , \ si \quad 0 \le x \le 0 \end{cases}$$

Además

$$\int_{-1}^x F'(t) = \int_{-1}^x \phi(t)dt \text{, para todo } x \in [-1,1]$$

Sin embargo $F' \neq \phi$ en el intervalo $[-1,1]$

2.2 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Y LA INTEGRAL INDEFINIDA.

En el Teorema A ó Teorema 2 1 (Primera versión del Teorema Fundamental del Cálculo) se prueba que toda función continua $f\ [a,b] \to R$ posee una primitiva en $[a,b]$ Para esto se define la función

$$F\ [a,b] \to R$$
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Luego utilizando el Teorema del Valor Medio de Lagrange, se prueba que F es diferenciable en $[a,b]$ y que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$

Aunque la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ se definió para la función continua f, esta se puede definir de forma general cuando f es integrable

Definición2 1 Sea $f\ [a,b] \to R$ una función integrable en $[a,b]$ La función

$$F\ [a,b] \to R$$
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

se llama la **integral indefinida** de f en $[a,b]$

Ejemplo 2 2 Consideremos la función continua $f\ [-2,2]\to R$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } -2\le x<0\\ x, & \text{si } \ 0\le x\le 2\end{cases}$$

y sea $F\ [-2,2]\to R$ la integral indefinida de f en $[-2,2]$ Luego

si $x<0$,

$$F(x)=\int_{-2}^{0} f(t)dt=\int_{-2}^{x} 0dt=0$$

si $x=0$,

$$F(o)=\int_{-2}^{0} f(t)dt=0$$

si $x>0$,

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-2}^{x} f(t)dt\\ &=\int_{-2}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt\\ &=\int_{0}^{x} tdt=\frac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

Así pues,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } -2\leq x<0 \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{si } \ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

Note que F es diferenciable en $[-2,2]$ y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[-2,2]$, o sea que F es una primitiva de f en $[-2,2]$

Ejemplo 2 3 Sea f $[-2,2]\to R$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } -2\leq x<0 \\ 3, & \text{si } \ 0\leq x\leq 2 \end{cases}$$

y sea F $[-2,2]\to R$ la integral indefinida de f en $[-2,2]$ Luego si $x<0$,

$$F(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt=\int_{-2}^{x} 0dt=0$$

si $x=0$,

$$F(0)=\int_{-2}^{x} f(t)dt=\int_{-2}^{x} 0dt=0$$

si $x>0$,

$$F(x)=\int_{-2}^{x} f(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-2}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt \\
&= 3\int_{0}^{x} dt \\
&= 3x
\end{aligned}
$$

Así pues,

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 3x, & \text{si } \ 0 \le x \le 2 \end{cases}
$$

Note que F es continua pero no diferenciable en $[-2,2]$, por lo tanto F no es una primitiva de f en $[-2,2]$ Más aun, por el Teorema 2 3, f no posee primitiva en $[-2,2]$, ya que ella no satisface la propiedad del valor intermedio en $[a,b]$

En el Ejemplo 1 10 se presentó una función que posee primitiva, pero no es integrable en el intervalo dado $[a,b]$ Sin embargo, en el Ejemplo 2 2 se presentó una función integrable que no posee primitiva en el intervalo $[a,b]$ Estos resultados fueron las bases que motivaron el replanteamiento del teorema fundamental del cálculo, dando origen al surgimiento de nuevas teorias, algunas de las cuales analizaremos en este capítulo

A continuación se estudiarán algunas de las propiedades fundamentales de la integral indefinida

Teorema 2 9 Sea f $[a,b] \to R$ una función continua en $[a,b]$ y F $[a,b] \to R$ la integral indefinida de f en $[a,b]$ Si $F(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $f(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$

Demostración

Sea $x_0 \in [a,b)$ y seas $h>0$ tal que $x_0 < x_0 + h \leq b$ Luego, por hipótesis se tiene que

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} F(t)dt = 0 \quad \text{y} \quad F\left(x_0 + h\right) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_0 + h) - F\left(x_0\right) \\ &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \end{aligned}$$

Por otro lado, por el teorema del valor medio para integrales, se tiene que existe un $\theta_h \in [0,1]$ tal que

$$0 = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0 + \theta_h)h$$

de donde

$$f(x_0+\theta_h h)=0$$

Como h se puede tomar arbitrariamente pequeño y f es continua en $[a,b]$, se tiene que $f(x_0)=0$, para todo $x_0 \in [a,b]$

Teorema 2 10 Sea f $[a,b] \to R$ una función continua y no negativa en el intervalo $[a,b]$ y F $[a,b] \to R$ la integral indefinida de f en $[a,b]$ Si $F(b)=0$, entonces $f(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$

Demostración

Como f es continua y no negativa en $[a,b]$, se tiene que para todo $x \in [a,b]$

$$0 \leq F(x)=\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt = F(b)=0$$

Por lo tanto, $F(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$ Luego, por el Teorema 2 9, se tiene que $f(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$

Teorema 2 11 Sea f $[a,b] \to R$ una función integrable en $[a,b]$ y F $[a,b] \to R$ la integral indefinida de f en $[a,b]$ Entonces existe un $k>0$ tal que

$$|F(x)-F(y)|\leq k|x-y|$$

para todo $x,y\in[a,b]$,es decir F es Lipschitziana en $[a,b]$

Demostración

Como f es integrable en $[a,b]$, ella es acotada en $[a,b]$, por lo tanto, existe un $k>0$ tal que

$$|f(x)|\leq K,\quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x\in[a,b]$$

Sean $x,y\in[a,b]$ Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x\geq y$ Luego,

$$\begin{aligned} F(x)-F(y) &= \int_a^x f(t)dt-\int_a^y f(t)dt \\ &= \int_y^x f(t)dt \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |F(x)-F(y)| &= \left|\int_y^x f(t)dt\right| \\ &\leq \int_y^x |f(t)|\,dt \end{aligned}$$

$$\leq K\int_y^x dt$$
$$= k(x-y)$$
$$= k|x-y|$$

Así pues, F es Lipschitziana en $[a,b]$

Teorema 2 12 Sea f $[a,b]\to R$ una función integrable en $[a,b]$ y F $[a,b]\to R$ la integral indefinida de f en $[a,b]$ Entonces F es diferenciable en todo punto $c\in[a,b]$ en el que f es continua, y $F'(c)=f(c)$

Demostración

Supongamos que f es continua en $c\in[a,b]$ Sea $\varepsilon>0$, como f es continua en c, existe un $\delta>0$ tal que

$$|f(c+h)-f(c)|\leq\varepsilon$$

siempre que $c+h\in[a,b]y|h|<\delta$

Tomemos un $h\neq 0$ tal que $|h|<\delta$, entonces

$$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} dx = 1$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h}-f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\left(\int_a^{c+h} f(x)dx-\int_a^c f(x)dx\right)-\frac{f(c)}{h}\int_c^{c+h} dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)dx-\frac{f(c)}{h}\int_c^{c+h} dx\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_c^{c+h} (f(x)-f(c))dx\right| \\
&\le \frac{1}{|h|}\int_c^{c+h} |f(x)-f(c)|\,dx \\
&\le \frac{1}{|h|}\left|\int_c^{c+h} \varepsilon dx\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{|h|}|h| \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

Esto implica que F es diferenciable en c y $F(c)=f(c)$

Una forma sofisticada de aplicar la integral indefinida y el teorema fundamental del cálculo es la creación de las funciones trascendentales, como por ejemplo la funciones logaritmo que aparece en muchos libros de cálculo

Definición 2 2 La función logaritmo natural denotada por $\ln$, es definida por

$$
\begin{aligned}
\ln \; & (0,\infty)\to R \\
\ln x &= \int_1^x \frac{dt}{t}
\end{aligned}
$$

La expresión $\ln x$ es llamada el logaritmo natural de x

Como la función $f\ (0,\infty) \rightarrow R$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $(0,\infty)$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, la función ln está bien definida y es diferenciable en $(0,\infty)$, además, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{dt}{t}\right) = \frac{1}{x}$$

Si $0 < x < 1$, entonces

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t}$$

Por lo tanto, la función logaritmo natural es positivo para $x > 1$ y negativo para $0 < x < 1$ Además $\ln 1 = 0$

Teorema 2 13 (Leyes de los logaritmos Naturales) Sean $x, y \in (0,\infty)$, entonces

i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

ii) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

iii) $\ln x^r = r \ln x$, para todo numero racional r

Demostración

i) Fijemos un $y \in (0,\infty)$ y definamos la función

$$G: (0,\infty) \to R$$
$$G(x) = \ln(xy)$$

Por la definición de la función logaritmo y por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d}{dx}(G(x)) = \frac{d}{dx}(\ln(xy)) = \frac{1}{xy}\frac{d}{dx}(xy) = \frac{1}{xy}\, y = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto, las funciones $G(x)$ y $\ln x$ son antiderivadas de la función $\frac{1}{x}$ en $(0,\infty)$. Luego por el Teorema Fundamental del Cálculo, existe una constante c tal que

$$\ln xy = \ln x + c$$

Tomando $x = 1,$ se obtiene que

$$\ln y = \ln 1 + c$$

Pero como $\ln 1 = 0,$ se tiene que

$$\ln y = c$$

Por consiguiente,

$$\ln xy = \ln x + \ln y \text{, para todo } x, y \in (0,\infty)$$

ii) Sea $x \in (0,\infty)$, entonces por la parte (i),

$$0 = \ln 1 = \ln\left(x\frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{x}$$

de donde

$$\ln\frac{1}{x} = -\ln x$$

Por consiguiente,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

iii) Sean $x \in (0,\infty)$ y r un numero racional Por la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\ln x^r\right) &= \frac{1}{x^r}\frac{d}{dx}\left(x^r\right) \\ &= \frac{1}{x^r}rx^{r-1} \\ &= \frac{r}{x}\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{dx}(r \ln x) = r\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{r}{x}$$

Como $\ln x^r$ y $r \ln x$ son primitivas de la función $\frac{r}{x}$ en $(0,\infty)$, por el Teorema Fundamental del Cálculo, existe una constante c tal que

$$\ln x^r = r \ln x + c$$

Tomando $x = 1$, obtenemos

$$0 = \ln 1 = r \ln 1 + c = c$$

Así pues,

$$\ln x^r = r \ln x$$

Como la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es positiva en $(0,\infty)$ y

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t} \text{ , si } 0 < x < 1$$

se tiene que la función logaritmo natural es inyectiva de $(0,\infty)$ en R Por lo tanto, para cada numero real x existe un unico $y \in (0,\infty)$ tal que $\ln y = x$ En base a esto podemos presentar la siguiente definición

Definición 2 3 La **función exponencial natural**, denotada por $\exp$ es definida por

$$\exp \quad R \to (0,\infty)$$
$$\exp(x) = y, \quad \text{si y solo si,} \quad \ln y = x$$

De la definición de función inversa se tiene que

$$\ln(\exp x) = x\,, \ \exp(\ln y) = y$$

Denotemos por e el numero real tal que $\ln e = 1$ Así

$$\exp(1) = e$$

Note que si r es un numero racional, entonces por el Teorema 2 8,

$$\ln\left(e^r\right) = r\ln(e) = r$$

Por lo tanto,

$$\exp(r) = e^r$$

Definición 2 4 Para cada numero real x definimos

$$e^x = y, \quad \text{si y sólo si,} \quad \ln y = x$$

Como $\exp$ es la inversa de la función logaritmo natural, se tiene que

$$e^x = \exp x, \text{ para todo } x$$

Así,

$$\ln e^x = x, \text{ para todo numero real } x$$

$$e^{\ln x} = x, \text{ para todo numero real } x > 0$$

Teorema 2 14 Sean x, y numeros reales y r un numero racional, entonces

i) $e^x e^y = e^{x+y}$

ii) $\dfrac{e^x}{e^x} = e^{x-y}$

iii) $\left(e^x\right)^r = e^{rx}$

Demostración

i) Por el Teorema 2 8 se tiene que

$$\ln\left(e^x e^y\right) = \ln e^x + \ln e^y = x + y$$

Luego por la Definición 2 4,

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

ii) Por (ii) del Teorema 2 8, se tiene que

$$\ln\left(e^{\ }\right)^r = r \ln e^x = rx$$

Luego por la Definición 2 4

$$e^{rx} = \left(e^x\right)^r$$

Teorema 2 15 $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$

Demostración

Como

$$\ln e^x = x$$

Diferenciando en ambos lados, usando la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\ln e^x\right) = \frac{d}{dx}(x)$$
$$\frac{1}{e^x}\frac{1}{dx}(e^x) = 1$$

de donde

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right)=e^{x}$$

Del Teorema 2 10 y de la regla de la cadena, se deduce que si $u=g(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(e^{u}\right)=e^{u}\frac{du}{dx}$$

Otra aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo es en el cálculo de la integral y derivada de las funciones trigonométricas y sus inversas, tema que será abordado en el tercer capítulo

2.3 GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

Como se dijo en la Sección 1 6, Lebesgue probó que una función acotada en un intervalo cerrado $[a,b]$ es integrable segun Riemann en $[a,b]$ si y sólo si, el conjunto de sus discontinuidades en $[a,b]$ tiene medida cero También probó el Teorema Fundamental del Cálculo en su teoria de integración (Teorema 1 1)

En el Teorema 2 8 se presentó una caracterización para la integrabilidad de la derivada F de una función F derivable en $[a,b]$, sin usar el concepto de medida, lo cual fortalece el sentido e importancia del Teorema Fundamental del Cálculo presentado por Darboux (Teorema 2 4)

En esta sección presentaremos una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo, que solamente usa el concepto de conjunto de medida cero

Definición 2 5 Un conjunto de numeros reales E tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ de intervalos abiertos tales que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \varepsilon$$

donde $|I_n|$ es la longitud del intervalo I_n

Definición 2 6 Se dice que una propiedad P se satisface casi en todas partes (denotado por c t p) en un conjunto E si el conjunto de puntos de E donde P no se satisface tiene medida cero

Ejemplo 2 4 Si $f\ [0,1] \to R$ es la función de Dirac definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \quad \text{es} \quad \text{irracional} \\ 1, & \text{si} \quad x \quad \text{es} \quad \text{racional} \end{cases}$$

Entonces $f(x)=0$ c t p en $[0,1]$, ya que el conjunto de numeros racionales tiene medida cero Esto también se escribe como $f=0$ c t p en $[0,1]$

Teorema 2 16 Sea f $[a,b]\rightarrow R$ una función Lipchitziana en $[a,b]$, o sea que existe un $K>0$ tal que

$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|, \text{ para todo } x,y\in[a,b]$$

Si $f'(x)=0$ c t p en $[a,b]$, entonces f es constante en $[a,b]$

Demostración

Sean ε,γ numeros reales positivos Denotemos,

$$D=\{x\in[a,b] \ \ f'(x)=0\}$$

Entonces, por hipótesis, el conjunto $[a,b]-D$ tiene medida cero Por lo tanto, para $\gamma>0$ existe una sucesión $\{I_n\}^{\infty}_{n=1}$ de intervalos abiertos, tal que

$$[a,b]-D\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\leq\frac{\gamma}{k}$$

Ahora, dado un subintervalo cerrado $I=[c,d]$ de $[a,b]$, diremos que I es del **tipo 1** si

$$|f(d)-f(c)|\leq \varepsilon(d-c)$$

Y del **tipo 2** si existe un $J\in\{I_n \; n\in N\}$ tal que $I\subseteq J$

Definamos el conjunto

$S=\{x\in[a,b]$ existe una partición $P_x=\{x_0,x_1, \; ,x_n\}$ de $[a,x]$ tal que para cada j, $[x_{j-1},x_j]$ es un intervalo del tipo 1 o del tipo 2$\}$

Note primeramente que $S\neq\varnothing$ En efecto, si $a\in D$, entonces $f'(a)=0$, y por lo tanto existe un $x>a$ tal que

$$|f(x)-f(a)|\leq \varepsilon(x-a)$$

Consideremos la partición $P_x=\{a,x\}$ del intervalo $[a,x]$ Como $[a,x]$ en un subintervalo del tipo 1, se tiene que $x\in S$ y por lo tanto $S\neq\phi$ Por el otro lado, si $a\notin D$ entonces existe un $J\in\{I_n \; n\in N\}$ tal que $a\in J$

Como J es un intervalo abierto, existe un $x > a$ tal que $[a,x] \subseteq J$ Consideremos la partición $P_x = \{a,x\}$ del intervalo $[a,x]$ Como $[a,x]$ es un subintervalo del tipo 2, se tiene que $x \in S$ y por lo tanto $S \neq \phi$

Probemos ahora que

$$x \in S \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \gamma + \varepsilon(b-a)$$

En efecto, sea $x \in S$ y consideremos una partición $P_x = \{x_0, x_1, \quad, x_n\}$ de $[a,x]$ tal que cada subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$ es del tipo 1 ó del tipo 2 Luego

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \left(f(x_1) - f(x_0)\right) + \left(f(x_2) - f(x_1)\right) + \qquad + \left(f(x_n) - f(x_{n-1})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sum_{tipo1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{tipo2} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{tipo\,1} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) + \sum_{tipo\,2} k(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq +\varepsilon(b-a) + k \sum_{tipo\,2} (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Como estos intervalos del tipo 2 son disjuntos dos a dos, se tiene que

$$\sum_{tipo\ 2}(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{\infty}|I_i| \leq \frac{\gamma}{k}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(a)| &\leq +\varepsilon(b-a)+k\left(\frac{\gamma}{k}\right)\\ &\leq \gamma+\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

Sea $c=\sup(S)$, entonces por lo probado anteriormente y por la definición de S se tiene que $a<c\leq b$. Además como f es continua en $[a,b]$, se tiene que

$$|f(c)-f(a)| \leq \gamma+\varepsilon(b-a)$$

Supongamos que $c<b$. Si $c\in D$, entonces $f'(c)=0$. Por lo tanto, existe un $r>0$ tal que $[c-r,c+r]\subset(a,b)$ y

$$|f(x)-f(c)| \leq \varepsilon|x-c|, \text{ para todo } x\in[c-r,c+r]$$

Como $c-r$ no es una cota superior de S, existe un $x\in S$ tal que $c-r<x\leq c$. Luego existe una partición $P_x=\{x_o,x_1,\ldots,x_n\}$ de $[a,x]$ tal que cada subintervalo $[x_{j-1},x_j]$ es del tipo 1 o del tipo 2. Note que $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n,c+r\}$ es una

partición de $[a,c+r]$, donde cada subintervalo es del tipo 1 o del tipo 2 Esto implica que $c+r \in S$, lo que es una contradicción Si $c \notin D$, entonces existe un $J \in \{I_n \; n \in N\}$ tal que $c \in J$ y $[c-r,c+r] \subset J$ para algun $r>0$, además existe un $x \in S$ tal que $c-r<x \leq c$ Luego existe una partición $P_x = \{x_0, x_1, \;\; ,x_n\}$ de $[a,x]$ tal que cada subintervalo $[x_{j-1},x_j]$ es del tipo 1 o del tipo 2 Note que $P = \{x_0, x_1, \;\; ,x_n, c+r\}$ es una partición de $[a,c+r]$ donde cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ es del tipo 1 o del tipo 2 Esto implica que $c+r \in S$, lo que es una contradicción Por consiguiente $c=b$ y

$$|f(b)-f(a)| \leq \gamma + \varepsilon(b-a)$$

Como ε y γ son numeros reales positivos arbitrarios, se tiene que $f(b)-f(a)=0$ Por lo tanto $f(b)=f(a)$

Sea $x \in (a,b]$ Entonces f es Lipschitziana en $[a,x]$ y $f'(t)=0$ c t p en $[a,x]$ Por lo probado anteriormente se tiene que $f(x)=f(a)$, para todo $x \in [a,b]$, es decir que f es constante en $[a,b]$

Teorema 2 17 Sea $f \; [a,b] \to R$ una función acotada y continua c t p en $[a,b]$ Entonces f es integrable segun Riemann en $[a,b]$

Demostración

Definamos la función $F\ [a,b] \to R$ por

$$F(x)=\begin{cases}\int_a^{\bar{x}} f(t)dt-\int_{\underline{a}}^{x} f(t)dt, & \text{si } x\neq a\\ 0, & \text{si } x=a\end{cases}$$

Como f es acotada en $[a,b]$ existe un $M>0$ tal que $|f(x)|\leq M,$ para todo $x\in[a,b]$

Sea $a<x\leq y\leq b$, entonces

$$\begin{aligned}|F(y)-F(x)| &= \left|\left(\int_a^{\bar{y}} f(t)dt-\int_{\underline{a}}^{y} f(t)dt\right)-\left(\int_a^{\bar{x}} f(t)dt-\int_{\underline{a}}^{x} F(t)dt\right)\right|\\ &= \left|\left(\int_a^{\bar{y}} f(t)dt-\int_a^{\bar{x}} f(t)dt\right)-\left(\int_{\underline{a}}^{y} f(t)dt-\int_{\underline{a}}^{x} f(t)dt\right)\right|\\ &= \left|\int_x^{\bar{y}} f(t)dt-\int_{\underline{x}}^{y} f(t)dt\right|\\ &\leq \left|\int_x^{\bar{y}} f(t)dt\right|+\left|\int_{\underline{x}}^{y} f(t)dt\right|\\ &\leq M(y-x)+M(y-x)\\ &= 2M|y-x|\end{aligned}$$

Ademas, si $a<x$, entonces

$$|F(x)-F(a)|=|F(x)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_a^{\bar{x}} f(t)dt + \int_{\underline{a}}^{x} f(t)dt \right| \\
&\leq \int_a^{\bar{x}} |f(t)|\, dt + \int_{\underline{a}}^{x} |f(t)|\, dt \\
&\leq M\left(x-a\right) + M\left(x-a\right) \\
&\leq 2M\,|x-a|
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, F es Lipschitziana en $[a,b]$

Por otro lado, como por el Teorema 2 12,

$$F'\left(x\right) = f(x) - f(x) = 0$$

para todo $x \in [a,b]$ donde f es continua, se tiene que $F'(x) = 0$ c t p en $[a,b]$

Por lo tanto, por el Teorema 2 16 F es constante en $[a,b]$, es decir,

$$F(x) = F(a) = 0, \text{ para todo } x \in [a,b]$$

Así pues

$$\int_a^{\bar{x}} f(t)dt = \int_{\underline{a}}^{x} f(t)dt, \text{ para todo } x \in [a,b]$$

lo que implica que f es integrable en $[a,b]$

Estamos preparados ahora para presentar la siguiente generalización del Teorema Fundamental del Cálculo (Teorema 2 4)

Teorema 2 18 Sea $f\ [a,b]\to R$ una función integrable segun Riemann en $[a,b]$ y sea $g\ [a,b]\to R$ una función Lipschitziana en $[a,b]$ tal que $g'(x)=f(x)$ c t p en $[a,b]$ Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$$

Demostración

Sea $F\ [a,b]\to R$ la integral indefinida de f en $[a,b]$ Entonces por el Teorema 2 11, F es Lipschitziana en $[a,b]$ Además, como f es integrable segun Riemann en $[a,b]$, f es continua c t p en $[a,b]$ Por lo tanto, por el Teorema 2 12, $F'(x)=f(x)$ c t p en $[a,b]$ Luego

$$(F-g)'(x)=F'(x)-g'(x)=f(x)-f(x)=0$$

c t p en $[a,b]$ Más aun, como F y g son Lipschitzianas en $[a,b]$, $F-g$ es Lipschitziana en $[a,b]$ Por consiguiente, por el Teorema 2 16 $F-g$ es constante en $[a,b]$, es decir, existe un numero real k tal que

$$F(x) - g(x) = k, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in [a,b]$$

Pero como

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Se tiene que $k = -g(a)$ Por lo tanto,

$$F(x) = g(x) - g(a), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in [a,b]$$

Finalmente, como

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Se tiene que

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$$

Observación Note que, en efecto, el Teorema 2 18 es una generalización del Teorema 2 4 de Darboux, ya que toda función que tiene derivada acotada en un intervalo $[a,b]$, es Lipschitziana en $[a,b]$ (esto es una consecuencia directa del teorema del valor medio de Lagrange)

Ejemplo 2 5 Sea $S=\left\{\frac{1}{n}\ n\in N\right\}$ y consideremos la funcion $f\ [0,1]\rightarrow R$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}-x, & si\ x\in S\\ x^2+1, & si\ x\in[0,1]-S\end{cases}$$

Note que f es acotada en $[a,b]$ y discontinua solamente en $SU\{0\}$, el cual es un conjunto de medida cero, o sea que f es continua c t p en $[0,1]$ Por lo tanto, f es integrable segun Riemann en $[0,1]$

Consideremos la función $g\ [0,1]\rightarrow R$ definida por

$$g(x)=\frac{x^3}{3}+x$$

Como $g'(x)=x^2+1$ es acotada en $[0,1]$, g es Lipschitziana en $[0,1]$ Además

$$g'(x)=f(x),\ \text{c t p en } [0,1]$$

Luego, por el Teorema 2 18,

$$\int_0^1 f(x)dx=g(1)-g(0)=\frac{1}{3}+1-0=\frac{4}{3}$$

Por otro lado, como f no satisface la propiedad del valor intermedio, por el Teorema 2 3, f no posee primitiva en $[0,1]$, sin embargo, aun se puede aplicar el Teorema 2 2

Una consecuencia inmediata del Teorema 2 18 es el siguiente resultado, el cual tambien es una extensión del Teorema Fundamental del Cálculo (Teorema 2 4)

Teorema 2 19 Sean $f\ [a,b]\to R$ una función integrable segun Riemann en $[a,b]$ y $g\ [a,b]\to R$ una función continua en $[a,b]$ tal que $g'(x)=f(x)$ excepto en un subconjunto enumerable de $[a,b]$ Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$$

Demostración

Como f es integrable en $[a,b]$, existe un $M>0$ tal que

$$|f(x)|\leq M, \text{ para todo } x\in[a,b]$$

Por hipótesis, existe un subconjunto enumerable S de $[a,b]$ tal que

$$g'(x)=f(x), \text{ para todo } x\in[a,b]-S$$

Luego

$$-M \leq g'(x) \leq M, \text{ para todo } x \in [a,b]-S$$

Consideremos la función $h\ [a,b] \to R$ definida por

$$h(x) = Mx - g(x)$$

Note que h es continua en $[a,b]$ y

$$h'(x) = M - g'(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in [a,b]-S$$

Por lo tanto, h es creciente en $[a,b]$ Así,

$$\begin{aligned} a \leq c < d \leq b &\Rightarrow h(c) \leq h(d) \\ &\Rightarrow Mc - g(c) \leq Md - g(d) \\ &\Rightarrow g(d) - g(c) \leq M(d-c) \end{aligned}$$

Consideremos ahora la función $\varphi\ [a,b] \to R$ definida por

$$\varphi(x) = g(x) + Mx$$

Note que φ es continua en $[a,b]$ y

$$\varphi'(x) = g'(x) + M \geq 0, \text{ para todo } x \in [a,b]-S$$

Por lo tanto, φ es creciente en $[a,b]$ Así,

$$
\begin{aligned}
a \le c < d \le b &\Rightarrow \varphi(c) \le \varphi(d) \\
&\Rightarrow g(c) + Mc \le g(d) + Md \\
&\Rightarrow -M(d-c) \le g(d) - g(c)
\end{aligned}
$$

De todo lo anterior se tiene que

$$|g(d) - g(c)| \le M(d-c)$$

Por consiguiente g es Lipschitziana en $[a,b]$

Finalmente, como S es un conjunto de medida cero, por el Teorema 2.18, se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

2.4 EL ÁRBOL GENEALÓGICO DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

En lo que sigue enunciaremos los teoremas del cálculo diferencial e integral que se necesitan para entender y justificar el Teorema Fundamental del Cálculo, y forman el árbol genealógico de este concepto

El Principio del Extremo Superior (P E S) Sea A un subconjunto no vacio y acotado superiormente de numeros reales R Entonces existe el supremo de A

TEOREMA A 1 (Cauchy) Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de numeros reales es convergente (con limite el numero real x) si y sólo si es de Cauchy

TEOREMA A 2 (Bolzano – Weiestrass) Toda sucesion acotada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de numeros reales posee una subsucesión convergente

TEOREMA A 3 (Caracterización de las funciones continuas) Sean $f\ [a,b]\to R$ una función y $x_0\in[a,b]$ f es continua en x_0 si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[a,b]$ que converge a x_0, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$

TEOREMA A 4 (Propiedad del valor intermedio) Sea $f\ [a,b]\to R$ una función continua en $[a,b]$ Si k está entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=k$

TEOREMA A 5 (Extremos Absolutos) Sea $f\ [a,b]\to R$ una función continua en $[a,b]$ Entonces existen $u,v\in[a,b]$ tales que

$$f(u)\le f(x)\le f(v),\quad \text{para todo } x\in[a,b]$$

TEOREMA A 6 (Continuidad uniforme) Sea $f\ [a,b]\to R$ una función continua en $[a,b]$ Entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$

TEOREMA A 7 (Extremos relativos) Sean $f\ [a,b]\to R$ una función y $x_0\in(a,b)$ Si f es diferenciable en x_0 y $f'(x_0)>0$, entonces existe un $\delta>0$ tal que

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$
$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

Si f es diferenciable en x_0 y posee un máximo (o mínimo) relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$

TEOREMA A 8 (Rolle) Sea f $[a,b] \to R$ una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) tal que $f(a) = f(b)$ Entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

TEOREMA A 9 (Valor medio de Lagrange) Sea f $[a,b] \to R$ una funcion continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) Entonces existe un $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

TEOREMA A 10 (Aditividad) Sea f $[a,b] \to R$ una función integrable segun Riemann en $[a,b]$ Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

para todo $c \in [a,b]$

TEOREMA A 11 (Monotonía) Sean $f\ g\ [a,b]\to R$ funciones integrables segun Riemann en $[a,b]$ Si $f(x)\leq g(x)$ para todo $x\in[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

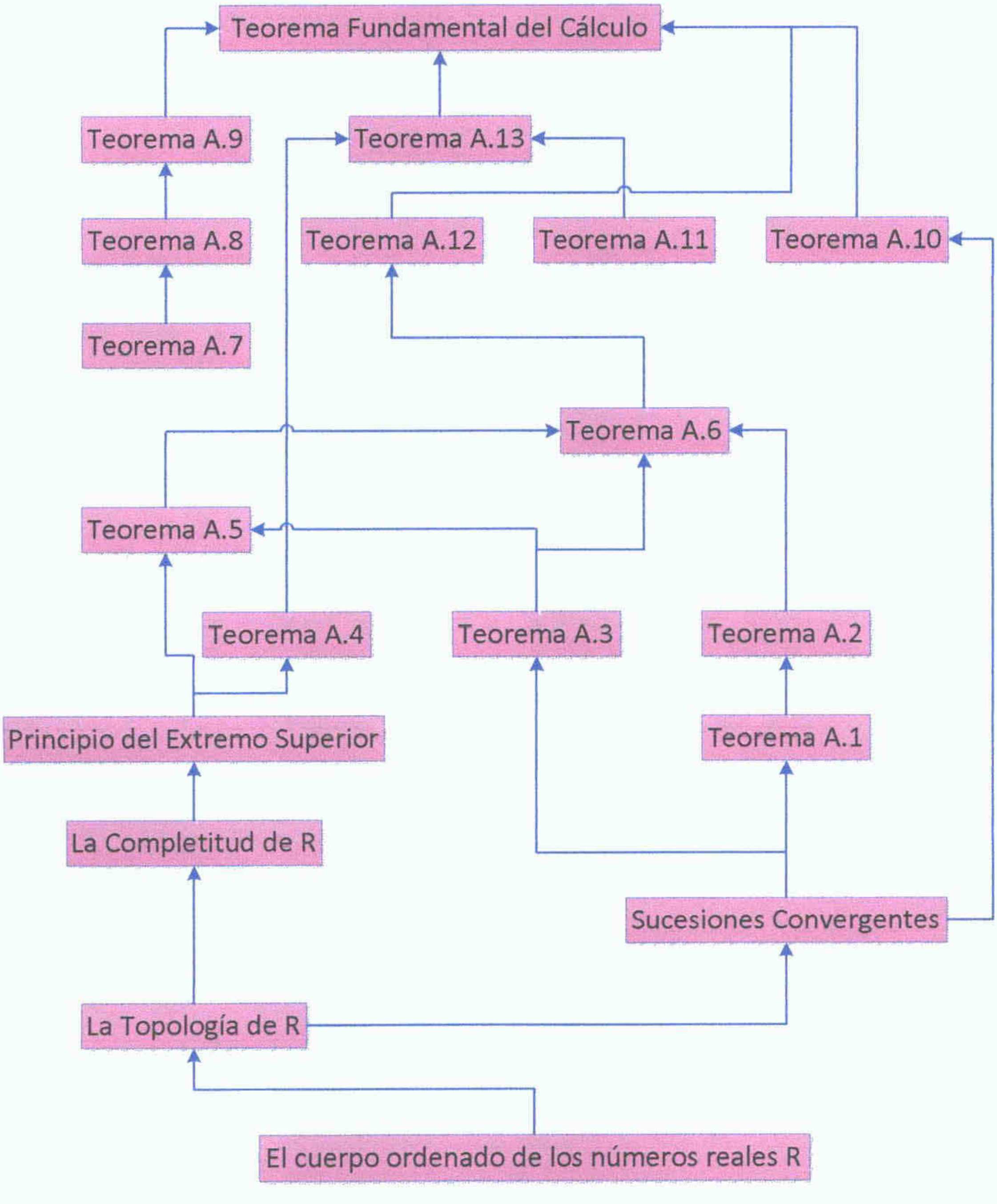
TEOREMA A 12 (Criterio de Integrabilidad de Riemann) Sea $f\ [a,b]\to R$ una función acotada en $[a,b]$ f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon>0$ existe una partición $P_\varepsilon=\{x_0,x_1,\ \ ,x_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$0\leq U(f_1,P_\varepsilon)-L(f\ ,P_\varepsilon)<\varepsilon$$

TEOREMA A 13 (Valor medio para integrales) Sea $f\ [a,b]\to R$ una función continua en $[a,b]$ Entonces existe un $c\in(a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

A continuación se presenta el árbol genealógico del Teorema Fundamental del Cálculo



Teorema Fundamental del Cálculo
Teorema A.9
Teorema A.13
Teorema A.8
Teorema A.12
Teorema A.11
Teorema A.10
Teorema A.7
Teorema A.6
Teorema A.5
Teorema A.4
Teorema A.3
Teorema A.2
Principio del Extremo Superior
Teorema A.1
La Completitud de R
Sucesiones Convergentes
La Topología de R
El cuerpo ordenado de los números reales R

CAPÍTULO 3: PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, BASADAS EN EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

3.1 ELEMENTOS DE LA PROPUESTA.

3.1.1 INTRODUCCIÓN.

Los cursos de cálculo diferencial e integral son de gran importancia, no sólo en la matemática sino también en fisica, quimica, biologia, economia, ingenieria y en todas las ciencias que estudian problemas de optimización Es por eso que se ha escogido el Teorema Fundamental del Cálculo, puente que une las teorias de diferenciación e integración, como herramienta principal para diseñar un modelo didáctico sobre la enseñanza de la derivada de las funciones trigonométricas inversas y las funciones trigonométricas A diferencia de los cursos tradicionales de cálculo en los cuales se utilizan algunos limites trigonométricos para deducir la derivada de las funciones trigonométricas y sus inversas, en esta propuesta se utilizan los resultados basicos de la diferenciación y de la integral definida para deducir las derivadas de las funciones trigonométricas inversas y a partir de estas calcular la derivada de las funciones trigonométricas usando la relación que existia entre estas funciones y sus inversas

3.1.2 OBJETIVOS DE LA PROPUESTA.

- Diseñar una guia de enseñanza de la derivada de las funciones trigonométricas inversas y las funciones trigonométricas basada en el Teorema Fundamental del Cálculo, para los estudiantes de los cursos de cálculo diferencial e integral de las diferentes universidades del pais

3.1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA.

A los matemáticos, desde el inicio de las civilizaciones, les han interesado problemas del cálculo de tangentes de gráficas de figuras geometricas y el cálculo de áreas

El primer problema dio origen a lo que hoy se conoce como el cálculo diferencial y el segundo, dio origen al cálculo integral

En un principio se pensó que estos dos tipos de problemas eran totalmente diferentes Sin embargo, con la evolución de la matemática algunos matemáticos observaron que existía alguna relacion entre estas dos teorias Fueron los trabajos de Newton y Leibniz referentes al cálculo diferencial e integral que pudieron por primera vez entablar un puente realmente solido entre estas dos teorias, el cual permitia resolver un problema de área usando tangentes y viceversa

El Teorema Fundamental del Cálculo es, en esencia, un enunciado de la equivalencia de las dos maneras de entender el concepto de integracion, como un proceso inverso de diferenciación y como un limite de sumas de productos Los teoremas precisos referentes a estos enfoques surgen de la asumpción que la integración es definida como un proceso de limite Por lo tanto, ellos clarifican la relación precisa entre la integracion y la diferenciación En base a lo anterior podemos afirmar que la importancia del Teorema Fundamental del Cálculo radica en que él es un puente que conecta las teorias de integración y diferenciación, proporcionando un algoritmo para cálculos de área bajo una curva utilizando los conceptos de diferenciación Pero no se debe interpretar el Teorema Fundamental del Cálculo como el proceso inverso de la diferenciación, ya que en este sentido, la integración pierde su sentido de independencia y se limita su campo de acción

Desde el punto de vista pedagógico, la importancia fundamental de esta propuesta es que utiliza de forma elegante las transformaciones que han sufrido el Teorema Fundamental del Cálculo desde su origen en el siglo XIII a través de su formalización en el siglo XIX hasta su presentación en los libros de texto de cálculo y análisis real en los siglos XX y XXI, y de este modo obtener algunas conclusiones de este desarrollo histórico acerca de cómo debe enseñarse este Teorema Fundamental del Cálculo

Los hechos indicados anteriormente conducen a la elaboración de modelos de enseñanza de la derivada de las funciones trigonométricas inversas y las funciones trigonométricas, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, lo cual permite a los estudiantes articular y conectar de manera natural los resultados del cálculo diferencial y el cálculo integral De ésta manera los estudiantes tendrán la oportunidad de darle sentido y ver la utilidad que posee la teoria estudiada en los cursos de cálculo

3.1.4 DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA.

La propuesta que se presenta pretende evidenciar la conexión que existe entre las teorias del cálculo diferencial e integral, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, sin que ninguna de ella pierda su sentido de independencia En la estructura de esta propuesta se destaca la deducción de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas y las funciones trigonométricas, apoyándonos en las propiedades geométricas de estas funciones y los resultados fundamentales de la teoria de diferenciacion e integración

3.2 MODELO DE LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, BASADAS EN EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

3.2.1 JUSTIFICACIÓN

Este modelo está diseñado para ser utilizado en los cursos de cálculo diferencial e integral que ofrecen las diferentes universidades del pais, con el fin de elevar las competencias planteadas en los currículos de dichas asignaturas

Lo innovador de este diseño es que, a diferencia de los cursos tradicionales, se utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la derivada de las funciones trigonométricas inversas y posteriormente se deduce la derivada de las funciones trigonométricas, dándole la oportunidad a los estudiantes de comprender la importancia trascendental del Teorema Fundamental del Cálculo como puente de conexión entre dos teorias matemáticas aparentemente independientes

3.2.2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA DE LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, BASADAS EN EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

En los cursos tradicionales de cálculo, el módulo relacionado a derivada de funciones trigonométricas se desarrolla basándose en el resultado de los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

Posteriormente se deduce las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, sin usar ningun resultado del cálculo integral y con poca ayuda de la visualización de las propiedades geométricas de estas ideas

Rompiendo los esquemas tradicionales, el diseño que se presenta considera como herramienta principal el Teorema Fundamental del Cálculo y la geometria del circulo, para determinar el área bajo una curva Posteriormente, utilizando las propiedades de la integral definida y la diferenciación, se deducen las derivadas de las funciones

$$\operatorname{sen}^{-1} x, \quad \cos^{-1} x, \quad \tan^{-1} x, \quad \cot^{-1} x, \quad \sec^{-1} x \quad \text{y} \quad \csc^{-1} x$$

Finalmente haciendo uso de la definición de las funciones trigonométricas inversas y de la derivada de la inversa de una función, se deducen las derivadas de las funciones

$$\operatorname{sen} x, \qquad \cos x, \qquad \tan x, \qquad \cot x, \qquad \sec x, \qquad \csc x$$

Es oportuno puntualizar que en la deducción de la derivada de las funciones trigonométricas inversas y las funciones trigonometricas no se hace uso de los limites trigonométricos mencionados anteriormente Más aun, estos limites se pueden demostrar como una consecuencia de los resultados obtenidos en este diseño

3.2.3 OBJETIVOS PARTICULARES DEL MODELO.

1 Fijar los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral para lograr un aprendizaje significativo en la matemática

2 Desarrollar el pensamiento logico matemático a través de actividades de aprendizaje

3 Despertar en los estudiantes el interés por la matemática, al establecer relaciones entre los diferentes conceptos que se le presentan en los cursos de cálculo diferencial e integral

4 Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo en la solucion de problemas de cuadraturas (integrales) y cálculo de tangentes (derivadas)

5 Utilizar las propiedades de las funciones trigonométricas y sus inversas en el cálculo de derivadas

6 Diseñar actividades didácticas que fomenten el desarrollo de habilidades cognitivas, visuales y espaciales

3.2.4 PRESENTACIÓN DEL MODELO.

Título Derivada De Las Funciones Trigonométricas Inversas Y Las Funciones Trigonométricas

➢ **DERIVADA DE LA FUNCIÓN** $y = \operatorname{sen}^{-1} x$

En la página 101 se enuncio el Teorema Fundamental del Cálculo, el cual dice

Teorema Fundamental del Cálculo Si f es una función continua en el intervalo $[0,a]$, entonces la función

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq a$$

es diferenciable en $[0,a]$ y $F(x) = f(x)$, para todo $x \in [0,a]$

La siguiente figura ACB representa un cuarto de la circunferencia del circulo unitario

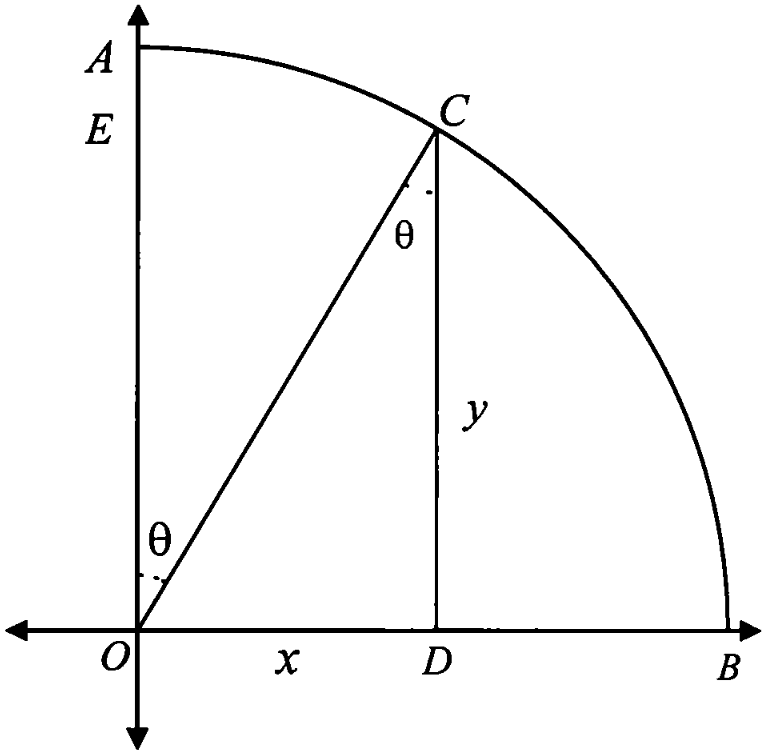


Figura 3 1

Note que el área de la región OACD está dada por

$$\text{área}(OACD) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt \tag{1}$$

Observe que el área de la región OACD es tambien la suma del área del sector circular $\widehat{OAC}$ y el área del triángulo ΔOCD

Luego como

$$area\left(\widehat{OAC}\right)=\frac{\theta}{2}, \qquad \theta \text{ en radianes}$$

y $\operatorname{sen}\theta = x$, se tiene que

$$\text{área}\left(\widehat{OAC}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x \tag{2}$$

Además

$$\text{area}\left(\triangle OCD\right)=\frac{1}{2}xy=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} \tag{3}$$

Por lo tanto, de (1), (2) y (3) se tiene que

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1} x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\\
\sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right)+\frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2}+x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(1-x^2\right)-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) &= \sqrt{1-x^2} - \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{2\left(1-x^2\right)-1+2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

Así pues

$$
\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
$$

Por la Regla de la Cadena

$$
\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} u\right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}
$$

➢ DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \cos^{-1} x$

Note que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos(\operatorname{sen}^{-1} x) + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right)$$
$$= \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right)$$
$$= x$$

Por lo tanto

$$\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x$$

Derivando miembro a miembro se obtiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1}\right)$$
$$= -\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right)$$
$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Así pues

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por la Regla de la Cadena

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} u\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

La derivada de la función $y = cos^{-1}x$ se puede deducir similarmente, sin usar la derivada del seno inverso Considere el cuarto de la circunferencia unitaria

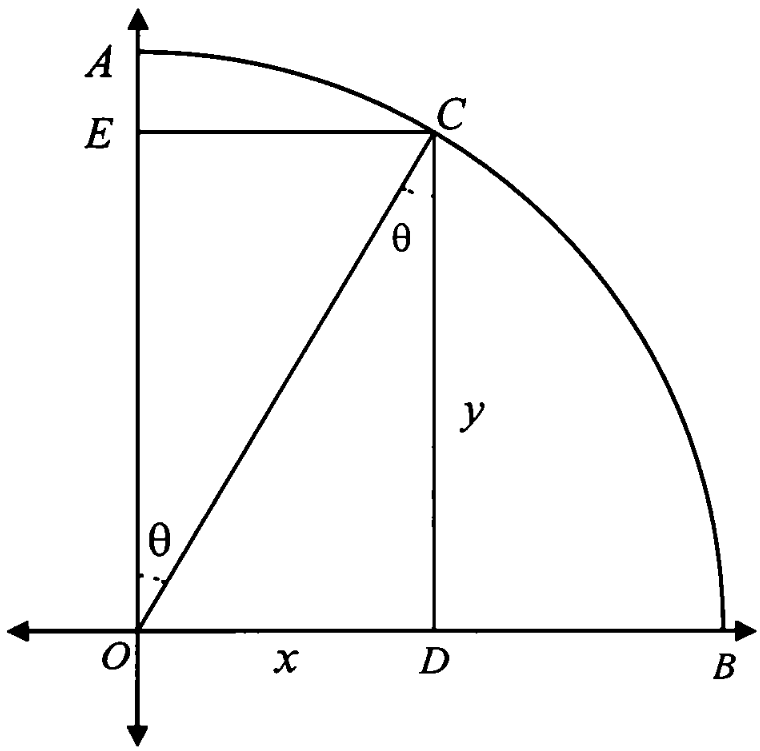


Figura 3 2

Note que el área de la región $OECB$ está dada por

$$\text{área}(OECB) = \int_0^y \sqrt{1-t^2}\,dt \tag{1}$$

El área de la región $OECB$ es tambien la suma del área del sector circular $\widehat{OCB}$ y el área del triángulo ΔOEC Luego como

$$\text{área}\left(\widehat{OCB}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}, \qquad \text{en radianes}$$

y $\cos\theta = y$, se tiene que

$$\text{area}\left(\widehat{OCB}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1} y \tag{2}$$

Además,

$$\text{área}\left(\Delta OEC\right)=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} \tag{3}$$

Por consiguiente, de (1), (2) y (3) se tiene que

$$\int_0^y \sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1} y+\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\left(\int_0^y \sqrt{1-t^2}\,dt\right)&=\frac{d}{dy}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1} y+\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}\right)\\ \sqrt{1-y^2}&=-\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\cos^{-1} y\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(y\sqrt{1-y^2}\right)\\ &=-\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\cos^{-1} y\right)+\frac{1}{2}\left[\sqrt{1-y^2}+y\left(\frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\cos^{-1} y\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{2\left(1-y^2\right)-2y^2}{2\sqrt{1-y^2}}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\cos^{-1} y\right) + \frac{1-2y^2}{2\sqrt{1-y^2}}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\cos^{-1} y\right) = \frac{1-2y^2}{2\sqrt{1-y^2}} - \sqrt{1-y^2}$$
$$= \frac{1-2y^2-2\left(1-y^2\right)}{2\sqrt{1-y^2}}$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$$

Así pues

$$\frac{d}{dy}\left(\cos^{-1} y\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Cambıando la varıable y p

Çor la varıable x, se obtıene que

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

➢ DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \tan^{-1} x$

Note que

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan x, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Luego

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 y = \sec^2 y$$

Como $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, se tiene que $\sec y > 0$ Por consiguiente

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2}$$

de donde

$$\cos\left(\tan^{-1} x\right) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

es decir

$$\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

Derivando miembro a miembro y usando la regla de la cadena se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) &= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\left(\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}\left(\frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\ \frac{x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Así pues

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} u\right) = \frac{1}{1+u^2}\ \frac{du}{dx}$$

- ## DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \cot^{-1} x$

Se sabe que

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

Luego

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=\tan\left(\tan^{-1}x\right)=x$$

Por lo tanto

$$\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$$

Derivando miembro a miembro se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)&=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)\\&=-\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)\\&=-\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Así pues

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=-\frac{1}{1+x^2}$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}u\right)=\frac{-1}{1+u^2}\,\frac{du}{dx}$$

➢ DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \sec^{-1} x$

Note que

$$
\begin{aligned}
y = \cos^{-1}\frac{1}{x} &\Rightarrow \cos y = \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\cos y} = x \\
&\Rightarrow \sec y = x \\
&\Rightarrow y = \sec^{-1} x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$$

Derivando miembro a miembro se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) &= \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{|x|}\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \\
&= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

Así pues,

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Por la regla de la Cadena

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} u\right) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}\ \frac{du}{dx}$$

➢ DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \csc^{-1} x$

Se sabe que

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$$

Luego

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x\right) = \sec\left(\sec^{-1} x\right) = x$$

Por lo tanto

$$\csc^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$$

Derivando miembro a miembro se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x\right)\\ &= -\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right)\\ &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

Así pues

$$\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} u\right) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

A partir de las derivadas de las funciones trigonometricas inversas obtenidas anteriormente y usando las propiedades de la función inversa se deducirán las fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas

➢ DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \operatorname{sen} x$

$$y = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen}^{-1} y$$

Luego

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\operatorname{sen}^{-1} y\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Por el teorema de la derivada de la función inversa se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$$

Pero como $\operatorname{sen} x = y$, de la figura

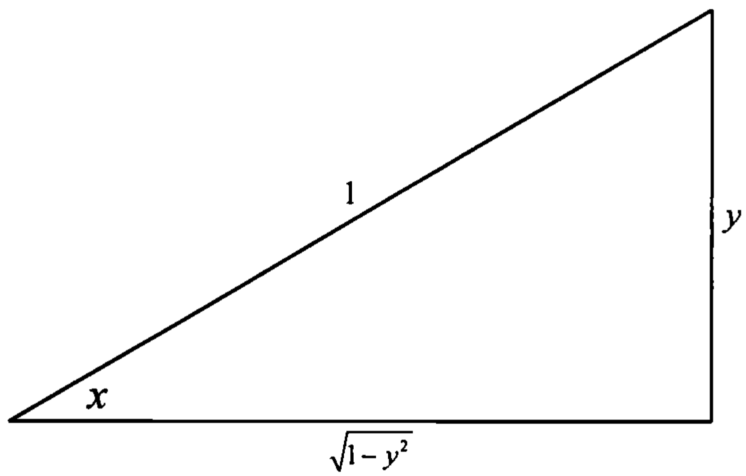


Figura 3 3

Se obtiene que

$$\cos x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1} = \sqrt{1-y^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} x\right) = \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} = \cos x$$

O sea que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \ \frac{du}{dx}$$

➢ DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \cos x$

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \cos^{-1} y$$

Por lo tanto

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\cos^{-1} y\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-y^2}$$

Como $y = \cos x$, de la figura

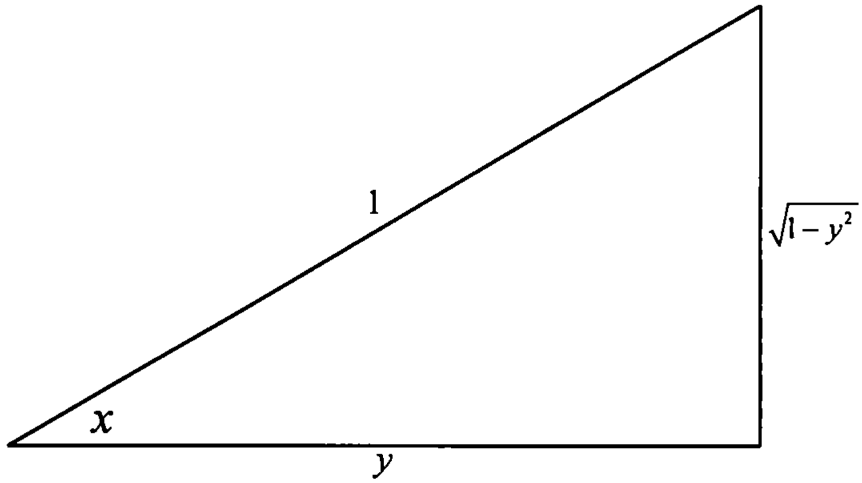


Figura 3 4

se obtiene que

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1} = \sqrt{1-y^2}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-y^2} = -\operatorname{sen} x$$

o sea que

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \ \frac{du}{dx}$$

Utilizando las derivadas de las funciones seno y coseno y las propiedades algebraicas de la derivada se calculan las derivadas de las otras funciones trigonométricas

➢ DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \tan x$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{senx}{\cos x}\right)\\ &= \frac{\cos x \cos x - senx(-senx)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= \sec^2 x\end{aligned}$$

o sea que

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \ \frac{du}{dx}$$

➢ DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \cot x$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cot x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)\\ &= -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}\\ &= -\frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\\ &= -\csc^2 x\end{aligned}$$

o sea que

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\,\frac{du}{dx}$$

➢ DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = \sec x$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sec x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos x}\\ &= \tan x \sec x\end{aligned}$$

o sea que

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \; \frac{du}{dx}$$

➢ **DERIVADA DE LA FUNCIÓN** $y = \csc x$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\csc x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)\\ &= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\\ &= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\;\frac{1}{\operatorname{sen} x}\\ &= -\cot x \;\; \csc x\end{aligned}$$

o sea que

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = -\csc x \cot x$$

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \; \frac{du}{dx}$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La importancia del Teorema Fundamental del Cálculo radica, en que es el puente que une dos grandes teorias de la matemática el cálculo diferencial que está basado en el estudio de los problemas de tangentes y el cálculo integral que está basado en el estudio de los problemas de cuadraturas o cálculo de áreas Por esta razón se le debe dar la posición que merece en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática

El Teorema Fundamental del Cálculo debe ser analizado considerando su evolución histórica, sus alcances y limitaciones, tanto en la teoria de integración de Cauchy como en la teoria de integración de Riemann También debe establecerse la diferencia entre ser integrable y poseer primitiva, conceptos que para la mayoria de los estudiantes que han tomado los cursos de cálculo diferencial e integral son iguales

Como aplicación, se debe utilizar todo el potencial que posee el teorema fundamental del cálculo, tanto para resolver situaciones que involucren los conceptos de tangentes y áreas, como para introducir conceptos nuevos, como lo son logaritmos, funciones exponenciales y las derivadas de las funciones trigonométricas inversas y las funciones trigonométricas

Recomendamos a los instructores de los cursos de cálculo diferencial e integral que apliquen todo el potencial que tiene el Teorema Fundamental del Cálculo tanto como herramienta para resolver problemas como puente para introducir conceptos matemáticos nuevos Tambien que se estudie con detalle los alcances y limitaciones del Teorema Fundamental del Calculo, con el fin de encontrar generalizaciones que amplien el campo de accion de este resultado fundamental de la matemática

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 APELIAN, C y SURACE, S (2009) **Real and Complex Analysis** Chapman & Hall/ CRC Pure and Applied Mathematics USA

2 BARTLE, D R y SHERBERT, R G (2000) **Introductions to Real Analysis** Third Edition John Wiley & Sons, Inc USA

3 BOAS, R P (1981) **A Primer of Real Functions** Third Edition Monographs # 13, The Mathematical Association of America USA

4 BOTAZZINI, U (2008) **The Higher Calculus a History of Real and Complex Analysis from Euler to Weisstrass** Springer Verlag USA

5 BOTSKO, M W (1991) **A fundamental Theorem of calculus that applies to all Riemann integrable functions** Mathematics Magazine 64, 347 - 348

6 BOTSKO, M W (1998) **An elementary proof that a bounded a c continuous functions is Riemann integrable** Amer Math Monthly 95, 249 – 252

7 BOYER, C B (1959) **The History of the Calculus and its Conceptual Development** Dover USA

8 BRAND, L (1955) **The fundamental theorem of the calculus** Amer Math Monthly 62 440 – 441

9 BRESSOUD, D (1994) **A Radıcal Approach to Real Analysıs** The Mathematıcal Assocıatıon of Amerıca USA

10 BRESSOUD, D M (2008) **A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integratıon** Cambrıdge Unıversıty Press USA

11 BRESSOUD, D M (2011) **Hıstorıcal reflectıons on teachıng the fundamental theorem of ıntegral calculus** Amer Math Monthly 118 99 -115

12 BURK, F E (2007) **A Garden of Integrals** The Mathematıcal Assocıatıon of Amerıca USA

13 CARLSON, M P PERSSON J Y NO SMITH, (2003) **Developıng and connecting, calculus students' notions of rate – of- change and accumulation The fundamental theorem of calculus** In Proceedıng of the Meetıng of the Internatıonal Group for the Psychology of Mathematıcs Educatıon - North Amerıca vol 2, Unıversıty of Hawaıı Honolulu, HI, 165 – 172 USA

14 CATES, D M (2012) **A Guide to Cauchy's Calculus A Translation and Analysis of Calculus Infinitesimal** Academic Press USA

15 CAUCHY, A L (1994) **Curso de Análisis** Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM México

16 CHATTERJI, S D (1998) **A frequent oversight concerning the integrability of derivatives** Amer Math Monthly 95 758 – 761

17 CUNNINGHAM F JR (1965) **The Two fundamental Theorems of calculus** Amer Math Monthly 72 406 – 407

18 DUNHAM, W (2005) **The Calculus Gallery** Princeton University Press USA

19 EDWARDS, C H Jr (1979) **The Historical Development of the Calculus** Springer – Verlag USA

20 FISCHER, E (1983) **Intermediate Real Analysis** Springer – Verlag USA

21 FOLLAND, G B (1999) **Real Analysis, Modern techniques and their Applications** Second edition John Wiley and Sons USA

22 GONZÁLEZ – VELASCO, E A (2007) James Gregory's calculus in Geometriae pars universalis, **Amer Math Monthly** 114 565 – 576

23 GONZÁLEZ – VELASCO, E A (2011) **Journey Through Mathematics Creative Episode in Its History** Springer – Verlag USA

24 GRATTAN – GUINNESS, I (1980) **Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630 – 1910 Una Introducción Histórica** Alianza Universidad España

25 HAIRER, G WANNER, E (2008) **Analysis by Its History** Springer – Verlag USA

26 HAREL, G (1998) **Two dual assertions The first on learning and the second on teaching (or vice versa)** Amer Math Monthly 105 497 – 507

27 HAWKINS, T (1979) **Lebesgue's Theory of Integration** Chelsea Publishing Company, USA

28 KATZ, V J (2009) **A History of Mathematics An Introduction** Third edition Addison – Wesley USA

29 KRANTZ, S (2010) **An Episodic History of mathematic's Mathematical Culture Through Problem Solving** Mathematical Association of America USA

30 LAUBENBACHER, D & PENGELLEY, R (1999) **Mathematical Expeditions Chronicles by the explores** Springer – Verlag USA

31 LYNCH, M A (1992) **Continuos, nowhere differentiable function** Amer Math Monthly 99 8 – 9

32 LYNCH, M A (2013) **Continuo function That is differentiable only at the rationals** Mathematics Magazine 86 132 - 135

33 MORGAN, F (2005) **Real Analysis and Aplications** American Mathematical Society, Providence USA

34 NICODEMI, O GALILEO AND ORESME (2010) **Who is modern? Who is medieval?** Math Mag 83 24 – 32

35 PROPP, J (2013) **Real analysis in reverse** Amer Math Monthly 120 392 – 408

36 REED, M (1998) **Fundamental Ideas Of Analysis** John Wiley USA

37 ROSS, K (2013) **Elementary Analysis The Theory of Calculus** Second Edition, Springer - Verlag, USA

38 RUDIN, W (2012) **Principles of Mathematical Analysis** Mc Graw – Hill, USA

39 SAHOO, M R (2013) **Example of a monotonic, every where differentable function on R whose derivative is not continuous** Amer Math Monthly 120 566 – 568

40 SCHINAZI, R B (2012) **From Calculus to Analysis** Birkhäuser, USA

41 SPIVAK, M (2008) **Calculus** Fourth edition Publish or Perish, USA

42 STEWART, J (2012) **Single Variable Calculus** Seventh edition Brooks/Cole USA

43 STROMBERG, K R (1981) **An Introduction To Classical Real Analysis** Wadsworth International Group, USA

44 TEISMANN H (2013) **Toward a more Complete list of complexness axioms** Amer Math Monthly 120 99 – 114

45 THOMPSON, P W (1994) **Images of rate and operatıonal understandıng of the Fundamental Theorem of Calculus** Educatıon Studıes ın Mathematıcs 26 229 -274

46 THOMSON, B S (2010) **The Calculus Integral** Charlenston, USA