例で学ぶ作用環入門

関西大学理工学会誌
理 工 学 と 技 術
V o l . 24 (2 0 1 7)

解 説

例で学ぶ作用環入門

楠 田 雅 治*

Introduction to operator algebras by examples

Masaharu KUSUDA

1．はじめに

作用素環論は関数解析学（古い言い方では位相解析学）の中の一つの分野であり，ここでいう環とは多元環のことである．多元環とはベクトル空間であって，積が定義されていてその積が双線型であるものをいう．またここでいう作用素とは，ヒルベルト空間上の連続な線型写像のことである．（これらの正確な定義は後で述べる．）関数解析学では線型写像を線型作用素というのが一般的である．すなわち作用素環とは，ヒルベルト空間上の連続な線型作用素のつくる多元環である．（さらに作用素の収束の議論ができるような構造を定義する必要がある．）

作用素環にはフォン・ノイマン環と C^*- 環の２種類があり，この両者の違いは，位相構造の違い（大雑把にいえば環の元に対する収束のさせ方の方法の違い）である．なおフォン・ノイマンとは，20世紀前半から中頃に活躍したハンガリーの有名な数学者の名前であり，フォン・ノイマン環を導入してその基礎を築いた人である．この解説では，位相の定義は述べないが，位相の定義によりフォン・ノイマン環は C^*- 環であることを簡単に知ることができる．この解説では C^*- 環について述べる．フォン・ノイマン環は C^*- 環であるが，研究するときには，フォン・ノイマン環と C^*- 環はテクニックが大きく異なる．作用素環は，数学専攻であっても大学学部では学ぶ機会がないので，この解説では作用素環の基礎レベルを終えた人なら誰でも知っている有名ないくつかの例を通して，理工系学部で微積分と線型代数を学んだ学生諸君に，C^*- 環の定義に馴染んでもらうことを目的とする．

§２では，この解説を読むのに必要となる基本的な概念の定義をもれなく述べる．§３以降で，定義が述べられていない（位相に関する）専門用語が出てくるところがあるが，そこは無視してもらっても，あとの理解に支障はないので気にしないでほしい．基本的な定義のあと，フォン・ノイマン環と C^*- 環の雛型とも言えるもので，最も簡単な例である行列環と可換な C^*- 環である関数環について述べる．行列環は作用素環の例としては自明すぎて，数学的には面白くないけれども，重要な例を構成するときや基礎理論を構築するときに利用するので重要である．また基本的な定理を証明なしに述べるが，その意味は分かると思う．

§３では，最近の C^*- 環の中心テーマである分類理論で活躍する具体な例の Cuntz 環を，§４では，C^*- 環を非可換幾何学とみる最近の流行において，重要な役割を果たす非可換トーラスを述べる．§５では，数理物理，特に量子統計力学の数学的枠組みで重要な役割を果たす CAR 環を，最後の §６では，昔から群の研究に C^*- 環が使われ，群と C^*- 環の関係が深いが，それがわかるような例を述べる．

2．基本概念の定義

通常，関数解析学ではベクトル空間といえば，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ 上で考える．この解説を通してベクトル空間は常に $\mathbb{C}$ 上で考える．また実数全体の集合を常に $\mathbb{R}$ で表すものとする．

まず写像の定義を復習する．X, Y を集合とする．T が X から Y への**写像**であるとは，X の各元 x に対して，Y の元 y をただひとつ対応させる規則であることをいう．このとき $T: x \in X \to y \in Y$ と書き，y は

原稿受付　平成29年９月25日
*システム理工学部 数学科 教授

$y = T(x)$と表わされる．Yが数の集合であるときは，特にTのことを関数と呼ぶ．任意の$x_1 \neq x_2$に対して，$T(x_1) \neq T(x_2)$がいつも成り立つとき，Tは**単射**であるという．また$\{T(x) \mid x \in X\} = Y$が成り立つとき，$T$は**全射**であるという．

定義2.1． Xは集合とする．$d : (x, y) \in X \times X \to d(x, y) \in \mathbb{R}$は関数で，次の条件(1)-(3)を満たすとき，$d$を$X$上の**距離**（distance, metric）という．

(1) 任意の$x, y \in X$に対して，$d(x, y) \geqq 0$であり，$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(2) 任意の$x, y \in X$に対して，$d(x, y) = d(y, x)$.

(3)（三角不等式）任意の$x, y, z \in X$に対して，$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$.

距離が与えらえると，集合上で収束の議論ができる．距離が与えられた集合Xは**距離空間**（metric space）と呼ばれる．このように，収束とか連続などの議論ができる構造が与えられた集合が位相空間である．距離空間は位相空間である．

定義2.2. 集合X上に距離dが定義されているとする．Xの点列$\{x_n\}$は，$m, n \to \infty$とすると，$d(x_m, x_n) \to 0$となるとき，**コーシー列**（Cauchy sequence）または**基本列**という．距離空間Xの任意のコーシー列が収束するとき（すなわち，$a \in X$が存在して，$d(x_n, a) \to 0\ (n \to \infty)$となるとき），$X$は**完備**（complete）であるという．

ここで微積分の授業で学んだ次の定理を思い出そう．

定理2.3.（実数の完備性） $\mathbb{R}$を実数全体とする．そのとき，

数列$\{a_n\} \subset \mathbb{R}$が$\mathbb{R}$において収束$\Longleftrightarrow m, n \to \infty$とすると，$|a_m - a_n| \to 0$.

例2.4. $\mathbb{R}$を実数全体とする．$d(x, y) = |x - y|$と定義すると，dは$\mathbb{R}$上の距離になる．この距離によって$\mathbb{R}$は距離空間であり，**定理2.3**によって$\mathbb{R}$は完備である．

$\mathbb{C}$も絶対値で距離空間になり，**定理2.3**から完備であることがわかる．実際，$\mathbb{C}$の完備性は，複素数を実部と虚部の和で表し，$\mathbb{R}$の完備性を使えば簡単に証明できる．

距離空間は一般に完備とは限らないが，距離空間Xの各コーシー列の極限になるような点をXに付け加えることで，集合Xを大きくして完備にすることができる．これをXの**完備化**という．例えば，$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$を有理数全体の集合とする．$\mathbb{Q}$のコーシー列は，$\mathbb{Q}$の中では極限をもつとは限らないが，$\mathbb{R}$の中では収束する．しかしその極限は一般に有理数ではない．このとき$\mathbb{Q}$の各コーシー列の極限全体の集合を$\overline{\mathbb{Q}}$とかくと，これは$\mathbb{Q}$を含む集合で，$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$となっている．この$\overline{\mathbb{Q}}$が$\mathbb{Q}$の完備化である．

$\mathbb{C}$上の距離は絶対値で与えるの普通である．この例では自明すぎるので，あまり自明でない距離空間の例を次にあげる．

例2.5. $\mathbb{R} \supset [a, b]$上の複素数値連続関数$f(x)$全体の集合を$C[a, b]$で表す．$C[a, b]$上でスカラー倍と和を，$c \in \mathbb{C}$, $f(x), g(x) \in C[a, b]$に対して，

$$(cf)(x) = cf(x),\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

と定義すると，$cf \in C[a, b]$, $f + g \in C[a, b]$となり，$C[a, b]$は$\mathbb{C}$上の（無限次元）ベクトル空間になる．このとき

$$\|f\| = \sup_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| \ \left(= \max_{a \leqq x \leqq b} |f(x)| \right)$$

と定義すると（この$\|\cdot\|$は**一様収束ノルム**とよばれる），

(1) 任意の$f \in C[a, b]$に対して，$\|f\| \geqq 0$であり，もし$\|f\| = 0$ならば$f = 0$,

(2) 任意の$c \in \mathbb{C}, f \in C[a, b]$に対して，$\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$,

(3) 任意の$f, g \in C[a, b]$に対して，$\|f + g\| \leqq \|f\| + \|g\|$

が成り立つ．$C[a, b]$上の距離$d(\cdot, \cdot)$を$d(f, g) = \|f - g\|$で定義することができる．こうして$C[a, b]$は距離空間になる．実際，$d(f, g)$が距離になっているのは，$\mathbb{R}$上の絶対値の場合と同様にして，簡単に確かめることができる．さらに$C[a, b]$が完備であることを示すのは難しくない．

この例の一様収束ノルムを抽象化して次の概念が導入される．

定義2.6. Xを$\mathbb{C}$上のベクトル空間とする．X上の関数$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$が次の条件(1)－(3)を満たすとき，$\|\cdot\|$を$X$の**ノルム**（norm）という．

(1)（**正値性**）任意の$x \in X$に対して，$\|x\| \geqq 0$であり，さらに$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(2)（**同次性**）任意の$c \in \mathbb{C}, x \in X$に対して，$\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$.

(3)（**三角不等式**）任意の$x, y \in X$に対して，$\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$.

また点$x \in X$に対して，$\|x\|$をxの**ノルム**という．

定義2.7. ノルムが定義されたベクトル空間を**ノルム空間**（normed space）という．一般にノルム空間は無限次元のベクトル空間である．

Xがノルム空間であるとき，Xに$d(x, y) = \|x - y\|$で距離が定義できる．この距離でXは距離空間になる．Xがこの距離で完備であるとき，Xは**バナッハ空間**（Banach space）であるという．**例2.5**の$C[a, b]$はバナッハ空間である．

定義2.8. Xを$\mathbb{C}$上のベクトル空間とする．$(\cdot, \cdot)$がXの

内積（inner product）であるとは，任意のx, yに対して 複素数値（x, y）が定まり，次の条件（1）-（3）が成り立つことである．

(1)（**正値性**）任意の $x \in X$ に対して，$(x,x) \geqq 0$ であり，さらに$(x,x)=0 \Longleftrightarrow x=0$.

(2)（**共役対称性**）任意の $x, y \in X$ に対して，$(x,y)=\overline{(y,x)}$.

(3)（**準双線型性**）任意の $x, y \in X$ に対して，(x,y)は，xについて線型（yについては共役線型）である．ベクトル空間に内積が定義されると，ノルムが定義できる．

定義2.9. ベクトル空間Xに内積$(\cdot,\cdot)$が定義されているとき，$\|x\|=(x,x)^{\frac{1}{2}}$ $(x \in X)$ でノルム $\|\cdot\|$ が定義できる．このノルムでX上に定義された距離に関して，Xが完備になるとき，Xは**ヒルベルト空間**（Hilbert space）であるという．ヒルベルト空間はバナッハ空間である．

定義2.10. X, Yをベクトル空間とする．XからYへの線型写像Tを**線型作用素**(linear operator)という．すなわち，Tは

$T(cx)=cT(x), T(x+y)=T(x)+T(y)\,(c \in \mathbb{C}, x, y \in X)$

を満たす写像である．関数解析学の通常の慣習にしたがって，xの像$T(x)$を混乱の生じない限り，今後は，Txと書くことにする．

Aを集合とする．A上の**演算**とは，集合の直積$A \times A$からAへの写像のことである．$f: A \times A \ni (x,y) \to z \in A$ が写像であるとき，$z=f(x, y)$を通常$x \circ y$または$x * y$とかxyで表す．ここではxyを用いることにする．xyをxとyの**積**という．この表記を用いると，もし演算が結合法則 $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$ をみたすとき，これは $(xy)z=x(yz)$ と書けて視覚的にもわかりやすい．複数の演算を同時に扱う場合，混乱が生じないかぎり，演算fが異なっていても，$f(x, y)$を表すのに同じxyを使うことに注意する．また一般に$xy \neq yx$であるが，任意の $x, y \in A$ に対して$xy=yx$が成り立つとき，Aは**可換**であるという．

定義2.11. ベクトル空間A上で積が定義されていて，$c \in \mathbb{C}, x, y, z \in A$ に対して，

$$(cx)y=x(cy)=c(xy),$$
$$(x+y)z=xy+yz,$$
$$x(y+z)=xy+xz$$

が成り立つとき，Aは$\mathbb{C}$上の**多元環**（algebra）であるという．作用素環では，結合法則$(xy)z=x(yz)$を満たすことを仮定する．Aは積に関して可換であるとき，Aは**可換環**（abelian algebra）という．上の3つの式が成り立つことが，§1の中で$(x, y) \to xy$が双線型といった意味である．Aのある元1が，任意の$x \in A$に対して，$1x=x1=x$ を満たすとき，1を（積に関する）**単位元**（identity）という．ここでは単位元の存在を仮定しないことにする．この解説では，考えている多元環の単位元を（もし存在するなら）1で常に表わすことにする．

ここでC^*-**環**の定義を与える．

定義2.12. Aを$\mathbb{C}$上の多元環とする．Aの共役線型写像$*: x \in A \to x^* \in A$は，次の条件(1)-(2)を満たすとき，**対合**（involution,*-operation）という．ここで共役線型とは，$(ax+by)^*=\overline{a}x^*+\overline{b}y^*$ $(a, b \in \mathbb{C}, x, y \in A)$ のことである．

(1)任意の$x \in A$に対して，$(x^*)^*=x$.

(2)任意の$x, y \in A$に対して，$(xy)^*=y^*x^*$.

Aが対合をもつとき，Aは*-**環**という．

定義2.13. Aを$\mathbb{C}$上の*-環とする．Aがバナッハ空間で，$\|xy\| \leqq \|x\| \cdot \|y\|, \|x^*\|=\|x\|$ $(x, y \in A)$ を満たすとき，Aを**バナッハ*-環**（Banach*-algebra）という．バナッハ*-環Aが単位元1をもつときは，$\|1\|=1$を仮定する．

さらにバナッハ*-環Aの対合が$\|x^*x\|=\|x\|^2$ $(x \in A)$をみたすとき，AをC^*-**環**(C^*-algebra)という．

$\|x^*x\|=\|x\|^2$はC^*-条件と呼ばれる．またC^*-条件を満たすノルムをC^*-ノルムという．

今後は常に，C^*-環の零ベクトルは0で，積に関する単位元は1で表すことを覚えていてほしい．

C^*-環Aのベクトル部分空間BがAの積と対合でC^*-環になるとき，BをAのC^*-部分環という．SをAの部分集合とする．Sを含むAのC^*-部分環の中で最小のものを，Sで**生成された**C^*-環という．これはSを含むAのすべてのC^*-環部分環の共通集合といっても同じである．

定義2.14. AをC^*-環とする．AのC^*-部分環Iに対して，$x \in A, y \in I$ならば$xy \in I, yx \in I$が成り立つとき，IをAの**イデアル**（ideal）という．

AをC^*-環とするとき，Aは少なくとも2つの自明なイデアル$\{0\}$とAをもつ．C^*-環Aが自明なイデアル以外のイデアルをもたないとき，Aは**単純**(simple)であるという．単純なC^*-環は重要である．実際，応用上現れる多くのC^*-環は単純環であることが多い．イメージ的には，C^*-環の積に関して非可換性が強ければ強いほど，C^*-環のイデアルの数は少なくなる．逆説的にいえば，C^*-環が可換環に近ければイデアルが多くなるというイメージである．

例2.15.（**行列環**）n個の成分が複素数であるようなベクトル全体のなすベクトル空間を$\mathbb{C}^n$で表わす．これは$\mathbb{C}$上のn次元のベクトル空間である．成分が複素数のn次正方行列は，$\mathbb{C}^n$上の線型変換を与える．そのようなn次正方行列全体を $M_n(\mathbb{C})$ で表す．線型代

数の授業で学んだように，通常の行列の和とスカラー倍（複素数倍）で，$M_n(\mathbb{C})$ はベクトル空間である．さらに行列の積が定義されていて，その積も n 次正方行列である．このとき $M_n(\mathbb{C}) \ni x, y, z, \mathbb{C} \ni a$ に対して，

$$(ax)y = x(ay) = a(xy),$$
$$(x + y)z = xy + yz,$$
$$x(y + z) = xy + xz$$

が成り立つ．こうして $M_n(\mathbb{C})$ は，行列の和，スカラー倍，積で多元環になっている．$\mathbb{C}^n$上の複素数値内積 $(\cdot,\cdot)$ を，任意の$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して，

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}$$

で定義する．このとき $\mathbb{C}^n$ のノルムが内積 $(\cdot,\cdot)$ によって $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ で定義される．$\|x\| = \sup\{\|x\xi\| \mid \xi \in \mathbb{C}^n, \|\xi\| \leqq 1\}$とおくと，$\|x\|$ は $M_n(\mathbb{C})$ 上でノルムの条件を満たす．これを x の**作用素ノルム**（operator norm）という．このノルムで $M_n(\mathbb{C})$ は完備であることが示せる．すなわち $M_n(\mathbb{C})$ はバナッハ空間である．線型代数で学んだ行列 x の随伴行列 x^*は，$(x\xi, \eta) = (\xi, x^*\eta)$を満たすことを思い出そう．このとき，写像 $* : x \in A \to x^* \in A$ は次の性質をもつことが容易にわかる．任意の $x, y \in A, a, b \in \mathbb{C}$ に対して，

$(ax + by)^* = \overline{a}x^* + \overline{b}y^*$(共役線型性)，$(x^*)^* = x$，$(xy)^* = y^*x^*$．

ここで重要なのは$\|x^*x\| = \|x\|^2$が成り立つことである．（証明は難しくないので興味のある方はトライしてほしい．）こうして $M_n(\mathbb{C})$ は C^*- 環になる．

例2.16. Hをヒルベルト空間とする．xをHからHへの連続な線型作用素とする．ここでxが連続であるとは，$\|\xi_n - \xi\| \to 0$ ならば，$\|x\xi_n - x\xi\| \to 0$がいつも成り立つことである．このとき，xの**作用素ノルム**を$\|x\| = \sup\{\|x\xi\| \mid \xi \in \mathbb{C}^n, \|\xi\| \leqq 1\}$で定義する．ここで，$\|x\| < \infty$となることと，$x$が連続であることが同値であることを注意しておく．$\|x\|$はノルムの条件を満たす．$B(H)$で$H$上の連続な線型作用素全体を表すと，作用素ノルムで$B(H)$はバナッハ空間になる．（証明は難しくない．）写像の合成で積が定義できて，$B(H)$ は多元環になる．$x \in B(H)$ の対合x^*は，

$$(x\xi, \eta) = (\xi, x^*\eta) \quad (x \in B(H),\ \xi, \eta \in H)$$

で定義される．このとき C^*- 条件$\|x^*x\| = \|x\|^2$を満たすことは，行列環の場合と同様である．こうして$B(H)$は C^*- 環になる．これは非可換である．もしHがn次元ならば，$B(H)$は$M_n(\mathbb{C})$である．

ここであとで出てくる作用素の定義を与えておく．$u \in B(H)$ は$u^*u = 1$をみたすとき，**等距離作用素**（isometry）という．これは$\|u\xi\| = \|\xi\|$ $(\xi \in H)$ と同値である．さらにuが $u^*u = uu^* = 1$をみたすならば，**ユニタリ作用素**（unitary）という．これは等距離作用素が全射であるということである．

参考のためにフォン・ノイマン環の定義を述べる．定義は代数的に定義する方法，位相的に定義する方法，バナッハ空間的に定義する方法がある．ここでは代数的な定義を述べる．$B(H)$でヒルベルト空間 H 上の連続な線型作用素全体を表す．$B(H)$の部分集合 M に対して，

$$M' = \{\, x \in B(H) \mid 任意の\ y \in M\ 対して\ xy = yx \,\}$$

とおく．Mが*- 環で$(M')'=M$をみたすとき，Mを**フォン・ノイマン環**(von Neumann algebra)という．フォン・ノイマン環 M が $B(H)$においてノルム位相で完備であることはすぐわかるので，Mは C^*- 環になっている．$B(H)$がフォン・ノイマン環であることが定義よりすぐわかる．（$B(H)'=\mathbb{C}\cdot 1$に注意せよ．）$B(H)$は C^*- 環としては単純でないが，フォン・ノイマン環としては単純である．これは，上の定義からはわからないが，位相の違いが実は原因になっている．

定義2.17. A，B は *- 環とする．A から B への写像 π が $c \in \mathbb{C}$，$x, y \in A$ に対して，

$$\pi(cx) = c\pi(x), \quad \pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y),$$
$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \quad \pi(x^*) = \pi(x)^*$$

を満たすとき，π は**準同型写像**（homomorphism）であるという．A，B が C^*- 環ならば，$\|\pi(x)\| \leqq \|x\|$ が成り立つことが知られている．これより C^*- 環の準同型写像πは連続である．

また準同型写像が全射かつ単射であるとき，**同型写像**（isomorphism）であるという．A から B への同型写像が存在するとき，A と B は**同型**（isomorphic）であるという．同型である C^*- 環は C^*- 環として実質的に同じものである．

準同型写像πは $\|\pi(x)\| \leqq \|x\|$ だから，C^*- 環の間の同型写像はノルムを保存することが容易にわかる（すなわち $\|\pi(x)\| = \|x\|$が成り立つ）．これは，代数的な条件だけから距離空間として同じであることを意味する．これは驚くべきことである．一方，フォン・ノイマン環では，代数的に同型ならば C^*- 環として同型であるが，フォン・ノイマン環として同型であるとは限らないことを注意しておく．フォン・ノイマン環は，定義よりヒルベルト空間上の作用素の多元環であるが，C^*- 環もそうなっていることが，次の有名な定理よりわかる．

定理2.18.（**ゲルファント・ナイマルクの定理**）A を C^*- 環とする．そのとき，あるヒルベルト空間 H と A から $B(H)$への単射な準同型写像πが存在する．すなわち A と$\pi(A)$は C^*- 環として同型である．

行列環は有限次元で単純であるが，一般に有限次元C^*-環は次の定理よりその構造がわかる．

定理2.19. C^*-環Aが有限次元ならば，Aは$M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$と同型である．すなわち$A$の元は，行列環$M_{n_i}(\mathbb{C})$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$と同型なAのイデアルの元の和で一意的に表される．

次に可換なC^*-環の例を述べる．

例2.20. $\mathbb{R}$上の複素数値連続関数fは，任意の$\varepsilon > 0$に対して$\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \geqq \varepsilon\}$が$\mathbb{R}$の高々有限個の有界閉区間の和集合になるとき，$f$は**無限遠点で消える**(vanishing at infinity）という．この条件は言い換えれば，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ということである．無限遠点で消える$\mathbb{R}$の上の連続関数全体を$C_0(\mathbb{R})$で表す．$C_0(\mathbb{R})$上にスカラー倍，和，積を，$\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in C_0(\mathbb{R})$に対して，

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$,

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,

$(fg)(x) = f(x)g(x)$

で定義すると，$C_0(\mathbb{R})$は$\mathbb{C}$上の多元環になる．対合は$f^*(x) = \overline{f(x)}$で定義できる．さらにノルムを$\|f\|_\infty = \sup\{\, |f(x)| \mid x \in \mathbb{R} \,\}$で定義すると，バナッハ空間になる．$C^*$-条件は明らかに満たすから，$C_0(\mathbb{R})$は（単位元をもたない）可換な$C^*$-環になる．

この例では$\mathbb{R}$上の複素数値連続関数を考えたが，洞察力を働かすと，関数が定義されている空間は$\mathbb{R}$でなくてもよいことが容易に想像できる．実際，位相空間Ω上の複素数値で有界連続関数を考えて，上の例と同様の設定を考えると可換なC^*-環$C_0(\Omega)$が得られる．特に位相空間Ωとしては，局所コンパクト・ハウスドルフ空間とよばれるものを考えると都合がよい．関数が定義されている空間Ωがコンパクトとよばれるものであれば，可換なC^*-環$C_0(\Omega)$は単位元をもつ．この場合は，$C_0(\Omega)$はΩ上の連続関数全体であることを注意しておく．いくつかの定義は述べなかったが，まとめると

例2.21. もしΩをコンパクト・ハウスドルフ空間ならば，$C_0(\Omega)$はΩの上の連続関数全体になる．このとき$C_0(\Omega)$の代わりに$C(\Omega)$で表す．C^*-環$C(\Omega)$は任意の定数関数を含むことに注意する．特に定数関数$f(\omega) = 1$は積に関する単位元になる．例えば，**例2.5**のバナッハ空間$C[a, b]$において，関数の積と対合を**例2.20**において定義したものと同様に定義すると，$C[a, b]$はC^*-環になる．ここで実は，有界閉区間$[a, b]$はコンパクト・ハウスドルフ空間になっている．

実はこの逆も成り立つ．すなわち次の定理が成り立つ．

定理2.22.（ゲルファントの定理）Aを可換なC^*-環とする．そのときAは適当な空間Ωをうまく選ぶと，C^*-環Aは$C_0(\Omega)$と同型である．

ここでいう適当な空間Ωとは，正確には局所コンパクト・ハウスドルフ空間とよばれる位相空間である．$C_0(\Omega)$の元である関数は，空間のはるか遠方で0に限りなく近づくような連続な複素数値関数である．もしAが単位元をもつなら，Ωはコンパクト・ハウスドルフといわれる空間である．

3．Cuntz 環（クンツ環）

定義3.1. 無限次元ヒルベルト空間において，

$$\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1 \quad (*)$$

を満たすn個の等距離作用素$\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$によって生成される$C^*$-環を**Cuntz 環**(Cuntz algebra)といい，O_nで表す．ここでnは∞でもよい．$(*)$における和は，$\|(\sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* - 1)\xi\| = 0$ $(\xi \in H)$で定義している．

$n = \infty$の場合，交換関係$(*)$は不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i s_i^* \leqq 1$$

を用いることが多いが，本質的な違いはない．この定義では，O_nはn個の等距離作用素に依存しているが，実は次の定理より依存しないことがわかる．

定理3.2. $(*)$の関係式を満たすn個の等距離作用素$\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$によって生成される$C^*$-環を$A$とし，同様の関係式を満たす$n$個の等距離作用素$\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$によって生成される$C^*$-環を$B$とする．そのとき$A$から$B$の上への同型写像$\pi$で，$\pi(s_i) = t_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$を満たすものが存在する．

この定理から容易に次の系を得る．証明は易しい．

系3.3. Cuntz 環O_nは単純である．

C^*-環の自己準同型写像全体を具体的に知ることは一般には難しいが，O_nについては次のようにわかる．実際，O_nの自己準同型写像πとO_nのユニタリuが次のように対応している．

定理3.4. Cuntz 環O_nの自己準同型写像πとO_nのユニタリuは，次の式で1対1に対応する：

$$\pi(s_j) = u s_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n;$$

$$u = \sum_{j=1}^{n} \pi(s_j) s_j^*.$$

C^*-環のあるクラス（正確には，純粋無限で単位元をもち，可分・単純・核型であるようなC^*-環のクラス）の分類が，1990年代にKK理論を使って完成したが，そのとき重要な役割を果たしたのがCuntz環であった．

4．非可換トーラス

θを実数のパラメータとするとき，ヒルベルト空間H上の2つの線型作用素u，vが次の基本関係式

$$u^*u = uu^* = 1,\ v^*v = vv^* = 1,\ uv = e^{2\pi i\theta}vu$$

を満たすと仮定する．ここで1は恒等写像（恒等作用素）を表す．上の関係の最初の2つの式はu，vがユニタリ作用素であることを示している．

定義4.1. u，vで生成されるC^*-環を回転$2\pi\theta$をもつ**非可換トーラス**（non-commutative two torus）といい，A_θで表す．特にθが無理数のときは，A_θは**無理数回転環**（irrational rotation algebra）と呼ばれる．

この定義におけるu，vで生成されるC^*-環の意味であるが，数学的に正確に述べると（定義は少しレベルが高いので省略するが）u，vで生成される普遍性と呼ばれる性質をもつC^*-環のことである．ここで「普遍性をもつ」の意味は，上の基本関係式をもつu，vで生成されるC^*-環のうちで，最大のC^*-環ということである．すなわち，A_θから同じ基本関係式をもつ2つのユニタリで生成されるC^*-環への全射準同型写像が存在するということである．しかしθが無理数ならば，次の定理が成り立つ．

定理4.2. θが無理数であることと，A_θが単純であることは同値である．

この定理より，θが無理数であるとき，基本関係式をもつ2つのユニタリで生成されるC^*-環はすべて同型であることがわかる．こうしてA_θとしては具体的な（問題に応じて分かりやすい）ヒルベルト空間上の2つのユニタリで基本関係式を満たすものを選べばよい．そんな基本関係式を満たす2つのユニタリの組はたくさんある．

θは有理数の場合より無理数の場合が応用上重要である．今後は常にθは無理数と仮定する．

ここで具体的に基本関係式を満たす2つのユニタリu，vを構成してみよう．

ヒルベルト空間として $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\xi_n|^2 < \infty\}$

を考える．ここで$(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$は複素数の数列であり，通常の数列の和とスカラー倍で$\ell^2(\mathbb{Z})$はベクトル空間になる．内積を$((\xi_n)|(\eta_n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\xi_n\overline{\eta_n}$で定義すると，$\ell^2(\mathbb{Z})$はヒルベルト空間になる．ここで推移作用素$u$と掛け算作用素$v$は，任意の$(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$に対して

$$v(\xi_n) = (\xi_{n-1}),\quad u(\xi_n) = (e^{2\pi i\theta}\xi_n)$$

で定義される．すぐわかるように，これらはユニタリ作用素であって，

$$uv = e^{2\pi i\theta}vu$$

を満たすことは簡単な計算で分かる．

AをC^*-環とする．このとき線型写像$\varphi: A \to \mathbb{C}$が任意の$x \in A$に対して$\varphi(x^*x) \geqq 0$を満たすとき，$\varphi$を**正の線型汎関数**（positive linear functional）であるという．正の線型汎関数は連続であることが知られている．（証明は難しくない．）さらに任意の$x, y \in A$に対して$\varphi(xy) = \varphi(yx)$をみたすとき，$\varphi$を（有限）**トレイス**（trace）であるという．もし正の線型汎関数のノルムが1であるとき，φは**状態**（state）であるという．作用素環論では，トレイスは非常に重要で必ずしも存在するわけではないが，もし存在すればトレイスは非常に強力な道具である．トレイスは，作用素環では常に積分ような役割を果たすので，その重要性が推測されるであろう．よって作用素環論ではトレイスの存在が重要な問題になる．$n \times n$の行列環の場合は，トレイス状態τはただひとつ存在する．すなわちτは行列の対角成分の和をnで割ったものであることが証明できる．実際，大学1年レベルの線型代数で簡単に証明できる．またCuntz環にはトレイス状態が存在しないことが知られている．

定理4.3. θが無理数であることと，A_θがただひとつのトレイス状態τをもつことは同値である．

ここでA_θの同型について次の問題を考える．「θ，θ'を無理数とする．そのときA_θと$A_{\theta'}$はいつ同型になるか？」これに対する解答は完全に分かっていて次の定理が成り立つ．

定理4.4. $0 < \theta < 1, 0 < \theta' < 1$を無理数とする．$A_\theta$と$A_{\theta'}$が同型であるための必要十分条件は$\theta = \theta'$または$\theta + \theta' = 1$が成り立つことである．

あらゆる数学の理論には，同値関係という2項関係がいろいろある．もちろん2つの数学的対称物が同型であるというのも同値関係である．作用素環論でも何種類かの同値関係を考えるが，そのうち最も重要なものに森田同値という同値関係がある．A_θと$A_{\theta'}$が，いつ森田同値になるかという問題を考えることは自然である．これについても次の定理が成り立つことが知られている．

定理4.5. θ, θ'を無理数とする．A_θと$A_{\theta'}$が森田同値であるための必要十分条件は$\theta' = \dfrac{a\theta + b}{c\theta + d}$を満たす成分が整数の正則行列$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$が存在することである．

A_θは定義から，見かけ上は簡単なモデルであるが，トーラスの非可換化したものとみることができて，非可換微分幾何の基礎概念である微分構造，接続，曲率などを理解したり，1980年代から脚光を浴びている現

代幾何学におけるゲージ理論を非可換化した非可換ゲージ理論でも，A_θは重要なモデルになっている．また物理学における量子ホール効果などの説明に直接利用されたり，近年流行の超弦理論にも現れたりして，数理物理の多くの場面に現れる重要な例である．A_θの重要な結果に限っても，本にまとめると少なくとも数百ページくらいにはなるであろう．なおθが有理数の場合のA_θの専門書はすでに存在する．

A_θをなぜ非可換トーラスと呼ぶのかを考えるために，$\theta=0$の場合を考えてみよう．$\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$とする．$\mathbb{T}^2$を2次元トーラス，これは図形としては，イメージ的に穴が一つの浮き袋あるいはドーナッツであることに注意しておく．このとき$\mathbb{T}^2$上の連続関数のつくるC^*-環$C(\mathbb{T}^2)$を考える．$u,v\in C(\mathbb{T}^2)$を$u(z,w)=z,\ v(z,w)=w\ \ ((z,w)\in\mathbb{T}^2)$で定義する．$u,v$は$C(\mathbb{T}^2)$において，ユニタリであることが簡単に示せる．$u,v$の固有値の集合はともに$\mathbb{T}$であることも簡単にわかる．さらに$uv=vu$がなりたつ．（これも簡単．）このとき$u,v$で生成される$A_\theta$は$C^*$-環$C(\mathbb{T}^2)$になる．（これを示すのは簡単ではない．）すなわち$\theta=0$の場合の$A_\theta$は，可換な$C^*$-環$C(\mathbb{T}^2)$である．$\theta\neq0$の場合は，$A_\theta$は非可換で仮想的な位相空間上の関数環とみなして非可換トーラスと呼んでいる．

参考のためにθが有理数である場合を述べると，このときのA_θは等質C^*-環とよばれるもので，その定義は，すべての既約表現の次元が等しいC^*-環である．等質C^*-環は，非常に扱いやすく分かりやすいC^*-環である．

5．CAR環（フェルミオン環）

ノルムが1で互いに直交する可算個の基底$\{f_n\}$をもつ無限次元ヒルベルト空間をHで表す．

線型写像$a: H\ni f\to a(f)\in B(H)$　が

$$a(f)a(g)+a(g)a(f)=0,$$
$$a(f)^*a(g)+a(g)^*a(f)=(f,g)\cdot 1$$

を満たすとする．ここで(f,g)は内積で，1は恒等写像である．この関係式を**正準反交換関係**（canonical anti-commutation relation）と呼んでいる．$B(H)$において$\{a(f)\mid f\in H\}$で生成されるC^*-環を$\mathfrak{A}(H)$で表わす．これを**CAR環**または**フェルミオン環**（Fermion algebra）という．CAR環は名のとおり，物理学の量子論に登場するフェルミ粒子の生成消滅演算子から生成されるC^*-環である．

正規直交基底$\{f_n\}$に対して，

$$v_0=1,\quad v_n=\prod_{i=1}^{n-1}(1-2a(f_i)^*a(f_i))$$
$$e_{11}^{(n)}=a(f_n)a(f_n)^*,\quad e_{12}^{(n)}=a(f_n)v_n,$$
$$e_{21}^{(n)}=a(f_n)^*v_n,\quad e_{22}^{(n)}=a(f_n)^*a(f_n)$$

とおく．各nに対して，$\{e_{ij}^{(n)}\}_{1\leq i,j\leq 2}$は$2\times2$の行列環$M_2^{(n)}$を生成する．正確にはそれら生成元は行列単位である．ここで交換関係を使って計算すると，$\bigcup_{n=1}^{\infty}M_2^{(n)}$が$\mathfrak{A}(H)$を生成することを示せる．一方$m\neq n$ならば，$M_2^{(m)}$の元と$M_2^{(n)}$の元は互いに可換であるから，$\mathfrak{A}(H)$は$\{M_2^{(n)}\}_n$の無限テンソル積と同型になることがわかる．（証明は難しい．）

参考のために$\mathfrak{A}(H)$の異なる表し方を述べる．$M_{2^n}(\mathbb{C})$を2^n次正方行列の行列環とする．いま単射準同型写像

$$\pi_n: x\in M_{2^n}(\mathbb{C})\to x\oplus x=\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}\in M_{2^{n+1}}(\mathbb{C})$$

を考え，$\pi_n(M_{2^n}(\mathbb{C}))$と$M_{2^n}(\mathbb{C})$とを同一視して$M_{2^n}(\mathbb{C})\subset M_{2^{n+1}}(\mathbb{C})$と考える．こうして次の増大列

$$M_2(\mathbb{C})\subset M_{2^2}(\mathbb{C})\subset\cdots\subset M_{2^n}(\mathbb{C})\subset M_{2^{n+1}}(\mathbb{C})\subset\cdots$$

を得る．さらに$\bigcup_{n=1}^{\infty}M_{2^n}(\mathbb{C})$上には，$M_{2^n}(\mathbb{C})$から誘導されるノルムが定義される．このノルムで$\bigcup_{n=1}^{\infty}M_{2^n}(\mathbb{C})$を完備化すると，$\mathfrak{A}(H)$が得られる．これは$\{(M_{2^n}(\mathbb{C}),\pi_n)\}_n$の帰納極限と呼ばれるものになっている．上で述べたことから，これは，可算無限個の2次の行列環$M_2(\mathbb{C})$の無限テンソル積と同型になっている．この例のように，行列環の帰納極限またはこれの異なる表現である（同じサイズとは限らない）無限個の行列環の無限テンソル積は，**UHF環**（uniformly hyperfinite algebra）とよばれていて，C^*-環の重要なクラスを構成している．数理物理で現れるC^*-環は，このクラスが多いことが知られている．

CAR環の重要性を述べるために，少し歴史の話をしよう．フォン・ノイマン環には，I型，II型，III型の3つの型があることがフォン・ノイマンによって示された．任意のフォン・ノイマン環が，このどれかの型になるとは限らないが，単純なフォン・ノイマン環（これは通常，因子環とよばれている）ならば，この3つのどれかの型になることが知られている．一般には，任意のフォン・ノイマン環は，I型，II型，III型のフォン・ノイマン環の直和になることが知られている．さらにもっと細かく分けることも可能であるが，必要ないのでこれ以上は述べない．さて，I型フォン・

ノイマン環は，作用素環としては自明なもので，例えばI型の因子環は，$B(H)$であることがわかっており，大して面白くない．II型のフォン・ノイマン環は，I型でなく$+\infty$も値として許すトレイスをもつものと定義される．III型フォン・ノイマン環は，I型フォン・ノイマン環とII型フォン・ノイマン環以外のものである．トレイスの値が常に有限であるII型フォン・ノイマン環は，フォン・ノイマンがユートピアと考えていたものである．それに比べ，III型フォン・ノイマン環は当初から病的なフォン・ノイマン環と思われていた．実際，非常に扱いにくく，III型フォン・ノイマン環が存在するかどうかも問題であった．そこでフォン・ノイマンは，実際にIII型フォン・ノイマン環の例を一つ構成して見せた．続いて1956年に，L. Pukánszkyが2個めの例を，1963年にJ. T. Schwartzが3個めの例を見つけた．そして1967年に衝撃的な事件が起こった．この年以前は，互いに同型でないIII型フォン・ノイマン環は3個しかなかったが，Princeton大学の物理学の大学院生であったR. Powersが，互いに同型でない非可算無限個のIII型因子環を構成して見せた．このとき使ったのがCAR環であった．この辺の様子を簡単に定義なしに述べると，CAR環の理論で重要なものに，準自由状態とよばれる状態がある．CAR環 $\mathfrak{A}(H)$ からヒルベルト空間 H 上の作用素環 $B(H)$ の中への同型写像πを準自由状態から構成する方法がある．このとき特殊な準自由状態を使って$\pi(\mathfrak{A}(H))$で生成されるフォン・ノイマン環$(\pi(\mathfrak{A}(H)))''$が，III型因子環になる．実数λで媒介変数表示された都合のよい準自由状態を使って，互いに同型でない非可算個のIII型因子環$\pi_\lambda(\mathfrak{A}(H_\lambda)))''$が得られる．（ただし，これらの証明は難しい．）このことからCAR環の理論の重要性が推測できると思う．CAR環は，これ以前は数理物理の専門家の間では，場の量子論のモデルとして現れてよく知られていたが，この事件以降，CAR環の重要性と有用性がクローズアップされた．

6．群 C^*- 環

群が与えられると，群 C^*- 環と呼ばれる C^*- 環が構成できる．まず群の定義を述べる．

定義6.1. Gを積（演算）$\circ$が定義された集合とする．Gが次の条件(1)-(3)をみたすとき，Gは積$\circ$に関して**群**（group）であるという．

(1)（**結合法則**）任意の $x, y, z \in G$ に対して，$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ．

(2)（**単位元の存在**）ある$e \in G$が存在して，任意の $x \in G$ に対して $e \circ x = x \circ e = x$ が成り立つ．eを**単位元**（identity）という．

(3)（**逆元の存在**）各 $x \in G$ に対して，ある $y \in G$ が存在して $x \circ y = y \circ x = e$ が成り立つ．このときyをx^{-1}で表わし，xの**逆元**（inverse element）という．

Gの部分集合HがGの積で群になるとき，HをGの部分群という．SをGの部分集合とする．Sを含むGの部分群の中で最小のものをSで**生成された群**という．これはSを含むGのすべての部分群の共通集合といっても同じである．

群の最も簡単な例の一つは，整数全体$\mathbb{Z}$に通常の足し算$+$で演算を定義したものである．この場合，単位元は0であり，$n \in \mathbb{Z}$ の逆元は$-n$である．これらは簡単なので確認してほしい．この例は簡単すぎて（自明すぎて），群の意味がわかりづらいかもしれない．もう少し自明でない重要な例をあげる．

行列の成分がすべて実数であるような2次の正方行列で，その行列式が1であるようなもの全体を$SL(2,\mathbb{R})$で表し，演算を通常の行列の積で定義すると，$SL(2,\mathbb{R})$は群になる．単位元は単位行列で，逆行列が逆元になる．$SL(2,\mathbb{R})$が群になっていることは容易に確認できるので，トライしてほしい．実は，この$SL(2,\mathbb{R})$は，リー群と呼ばれるものの例の一つであり，$SL(2,\mathbb{R})$の部分群である$SL(2,\mathbb{Z})$（すべての成分が整数である行列全体）とともに，数学の至るところに現れる最も重要な群である．

群からC^*- 環が構成されるが，その構成は群のユニタリ表現とC^*- 環の表現が，1対1に自然な形で対応するという意味において自然なものである．より一般に，（左不変な）ハール測度が存在するような（群の積と逆元をとる演算がともに連続な）群なら，C^*- 環が構成できるが，ここでは特殊な群に限定して述べる．

Gを可算個の元からなる群と仮定する（すなわち可算離散群．）それゆえ $G = \{ t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots \}$ と表すことができる．p=1, 2に対して，集合 $\ell^p(G)$ を

$$\ell^p(G) = \{ f \mid 関数\ f : G \to \mathbb{C}\ は\ \sum_{i=1}^{\infty} |f(t_i)|^p < \infty\ を満たす\}$$

と定義する．このとき $\ell^p(G)$ はベクトル空間になる．さらに $\|f\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |f(t_i)|^p)^{\frac{1}{p}}$ でノルムが定義できて，$\ell^p(G)$ はバナッハ空間になる．これは自明ではないが，証明は省略する．また $p = 2$ の場合，

$(f|g) = \sum_{i=1}^{\infty} f(t_i)\overline{g(t_i)}$で内積 $(\cdot|\cdot)$ が定義できて，実は $\ell^2(G)$はノルム $\|f\|_2 = (f|f)^{\frac{1}{2}}$でヒルベルト空間である．$G$ から $\ell^2(G)$ 上の連続な線型作用素全体 $B(\ell^2(G))$ への写像λを

$$(\lambda_s f)(t) = f(s^{-1}t), \quad (s, t \in G,\ f \in \ell^2(G))$$

で定義する．このとき $\lambda_{st}=\lambda_s\lambda_t, \|\lambda_s f\|_2=\|f\|_2$ が成り立つ．すなわち各 λ_s はユニタリ作用素であって，λ は G から $B(\ell^2(G))$ への（群として）準同型写像で，**ユニタリ表現**（unitary representation）と呼ばれるものである．これは G の**左正則表現**（left regular representation）と呼ばれる非常に重要なものである．$B(\ell^2(G))$ において，$\{\lambda_s \mid s\in G\}$ で生成される C^*-環を $C_r^*(G)$ で表わし，G の（**縮約**）**群** C^*-**環**（reduced group C^*-algebra）という．

縮約でない群 C^*-環も構成できる．参考のために定義を簡潔に述べると，$\ell^1(G)$ は畳み込みで積が定義できて，$f^*(s)=\overline{f(s^{-1})}$ で f の対合を定義すると，バナッハ*-環になっている．$\ell^1(G)$ で生成される普遍的（すなわち最大の）C^*-環を $C^*(G)$ で表し，G の**群** C^*-**環**（full group C^*-algebra）という．$C_r^*(G)$ は $C^*(G)$ の剰余環であることが定義よりわかる．一般に $C^*(G)$ と $C_r^*(G)$ は同型ではないが，G が従順とよばれる群であるときには，同型になることが知られている．実は，$C^*(G)$ を C^*-環として数学的に理解することと G を群として数学的に理解することは同じであるが，ここではこれ以上深入りはしない．

また縮約群 C^*-環に話を戻す．ここで特別な群を考える．G として2つの元で生成される自由群 $\mathbb{F}_2$ をとる．通常の自由群の定義は，例えば［9］を参考にしてほしいが，ここでは，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ において，2つの行列

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$$

を含む最小の部分群が $\mathbb{F}_2$ であることを注意しておこう．（正確には同型というべきであるが，群としては同じものである．）大雑把にいうと，$\mathbb{F}_2$ は A, B, A^{-1}, B^{-1} を自由に使ってできる単項式全体で，行列の積で演算を考えたものと思えばよい．

ヒルベルト空間上の連続な線型作用素 p は $p=p^2=p^*$ を満たすとき，**射影作用素**または**射影子**（projection）と呼ばれる．フォン・ノイマン環は射影作用素で生成されることが知られているが，C^*-環では通常そのようなことは成り立たない．例えば $C[a,b]$ は0と1以外は射影子を含まない．その理由の一つは $C[a,b]$ が可換環であって $[a,b]$ が連結であることである．ここで0と1は，それぞれ恒等的に0と1を値にとる定数関数である．

そこで単純 C^*-環で0と1以外の射影子を含まないものが存在するかという問題が生じる．この問題は1967年にフランスの有名な数学者のJ. Dixmier によって提起された有名な問題であったが，その後 R. Kadison が $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ がそんな例になっているのではないかと示唆した．そして R. Powers によって1975年にまず次の定理が示された．

定理6.2. $\mathbb{F}_2$ を2つの生成元をもつ自由群とする．そのとき $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ は単純である．さらに $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ はただひとつのトレイス状態 τ をもつ．

このあと多くの専門家が $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ に自明でない射影子が存在しなことを示そうと試みたが，1983年に Pimsner と Voiculescu が K 理論を使って次の定理を示して解決した．

定理6.3. $\mathbb{F}_2$ を2つの生成元をもつ自由群とする．そのとき $C_r^*(\mathbb{F}_2)$ には0と1以外に射影子は存在しない．

縮約ではない $C^*(\mathbb{F}_2)$ も0と1以外に射影子は存在しないことが，J. Cohen によって1979年に示された．ただし $C^*(\mathbb{F}_2)$ は単純環ではない．

7．最　後　に

ここで述べた以外にも多くの重要な例がある．例えば，亜群（groupoid）が与えられると，C^*-環が構成される．しかし位相群の場合と違ってハール測度のような測度がないので，構成方法は複雑である．よって重要であるにもかかわらず，ここで述べることができなかった．特に最近は，エタールとよばれる亜群の C^*-環がエルゴード理論との関係で脚光を浴びている．多様体（特に葉層構造をもつ多様体）とかファイバーバンドルからも C^*-環が構成され，そして C^*-環の K 理論を応用して幾何の問題が解決されている．1990年代から，有向グラフ（関数のグラフではない．頂点と辺からなる向きのついた図形のこと）からグラフ C^*-環と呼ばれる C^*-環が構成され，盛んに研究されている．歴史的には，グラフ C^*-環の雛形は Cuntz 環 O_n で，実際，ひとつの頂点を始点と終点とする n 本のループからなるグラフのグラフ C^*-環である．2000年以降は，有向グラフよりさらに一般化した位相グラフ，高次元グラフや quiver に対する C^*-環の研究も発展してきている．特別なグラフのクラスに対しては，対応するグラフ C^*-環が完全不変量になっていることもわかっている．具体的に構成される C^*-環の例で，2000年以降に注目されている重要なものに，Jiang-Su 環と Cuntz-Pimsner 環がある．前者は，自明でない射影子を含まない単純 C^*-環であって分類理論で重要な役割を果たし，後者は Cuntz 環を特殊な場合に含む，面白い性質をもつ環であるが，これらを紹介するには多くの準備が必要なので，この解説で述べることができなかったのが残念である．

作用素環は，物理学の量子論の数学的枠組みを意識して誕生した歴史がある．誕生当初から物理のみならず，群のユニタリ表現やエルゴード理論とは深く関係していて，現在も互いに影響を与え合っている．最近

の離散群の研究では，C^*-環の応用が顕著である．1970年頃から始まり1980年代に流行した，量子統計力学における平衡状態，相転移等を C^*-環を使った定式化による理論の研究も，近年また盛んになってきている．量子統計力学の平衡状態と代数的整数論が C^*-環を媒介に結びつき，非可換幾何学の枠組みにおいて現在盛んに研究されている．また同じ物理で最近流行の超弦理論にも，C^*-環が応用されている．従来とは異なった方面として，2，3年前からコンピュータ・サイエンスのある分野では，散乱的 C^*-環とよばれる C^*-環のあるクラスを使って，基礎理論を定式化して研究することが始っている．散乱的 C^*-環は筆者が研究しているテーマのひとつなので，個人的にもこの方面の発展を期待している．

ここ30年の特徴としては，作用素環の内在する部分のみならず，他の分野と結びついた研究が盛んに行われるようになったことがあげられる．作用素環は「非可換」と「(非可算) 無限」を特徴とするが，これらにノルム位相より緩いいくつかの「位相」が絡み合って，「位相」が「非可換」と「(非可算) 無限」をコントロールあるいは調教して理論が構築されていくところに特徴があり，「位相」が本質的といえる．この解説ではそんな「位相」を表に出さなかったので，この辺の雰囲気が全く消滅しているのが残念であるが，それは専門書を見ていただくしかない．この解説を読んで，作用素環に興味をもつ人が一人でも増えれば筆者の喜びである．

参考文献

この解説記事を読んで作用素環に興味をもって，入門書を勉強してみようと思う人向けに以下参考書をあげる．まず日本語の入門書であるが，次の本は，入門レベルで必要となる関数解析学の基本事項が最初にまとめられていて便利である．

[1] 生西明夫，中神祥臣：『作用素環入門 I，II』，岩波書店，2007，xvi+269，xviii+262 pp.

第1巻はフォン・ノイマン環の基本的な内容が述べられている．第2巻は C^*-環の基礎と重要な C^*-環のクラス，重要な例が入門レベルとしては詳しく述べられている．この解説で述べた例のより詳しい内容も書かれている．この本の記述はしっかりしているが，比較的簡潔に書かれているので，作用素環の議論の慣れが必要かもしれない．また C^*-環論では常識である K 理論の簡単な紹介があって参考になる．

[2] 梅垣壽春，大矢雅則，日合文雄：『作用素代数入門』，共立出版，1985，iii+227pp.

これはフォン・ノイマン環の本で，その主要部は本後半の1967年に富田稔氏が発表した，いわゆる，富田理論とよばれている革命的理論と，その応用として，フランス人数学者 A. Connes による III 型フォン・ノイマン環の分類の紹介である．富田理論は発表された当初は誰も理解できなくて，専門家の間では間違った理論ではないかという声もあったが，その後，より分かり易い証明が得られて，理論自体も整理されて勉強しやすくなった．この本も整理されてわかりやすくなったものが書かれている．この本を読めば，1970年代のフォン・ノイマン環の重要な結果の一部を知ることができる．本の前半は必要とされる関数解析学の一般論がまとめられているが，レベルは数学科3年で学ぶ内容より高い．また関数解析学以外の予備知識も数学科3年で学ぶ内容以上のものが必要である．全般に記述は正確であるが，後半部分は特に簡潔に書かれていて難しいかもしれない．

いままで出版された本のなかで最も易しい入門書は洋書であるが，次の本である．

[3] G. J. Murphy: *C^*-algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990, viii + 286 pp.

この本の記述は概念の導入，命題の証明がともに丁寧に書かれていて読みやすい．作用素環の入門レベルのさわりを勉強するのには一番薦められる本である．そのかわり，書かれている内容自体は少なく，基本事項で書かれていないことも多い．ただし C^*-環論で必須のテンソル積の理論や K 理論の基本的な内容が書かれており，説明も丁寧なので，それらを初めて勉強する場合，この本で勉強するとよい．

次は中級レベルの入門書である．

[4] G. K. Pedersen: *C^*-algebras and their Automorphism Groups*, Academic press, 1979, ix + 415 pp.

著者はデンマーク人で，作用素環論では指導的な立場にあり，ヨーロッパの作用素環の世界ではボス的存在であったが，残念なことに10年くらい前に胃がんで短期間のうちに亡くなった．筆者もよく知っていて，紳士で親切な人であった．本の前半は作用素環の基礎理論が詳しく述べられている．後半は位相力学系の非可換版である C^*-力学系と接合積の理論で，1970年代に得られた結果が十分詳しく解説されている．C^*-力学系と接合積の基礎についてはこの本がベストである．テンソル積の理論と K 理論は含まれていないが，それ以外の基本事項は十分網羅的に解説されている．

[5] M. Takesaki: *Theory of Operator Algebras* I, Springer, 1979, vii + 416 pp.

著者の竹崎正道氏は，富田理論を普及させた一番の功労者であり，フランス人でフィールズ賞受賞者の A.

Connesとともに，冨田理論の応用の時代であった1970年代のIII型フォン・ノイマン環発展の立役者である．この本は［4］と比べると古典的なレベルの基本事項が中心であるが，入門書レベルでは，この本に書かれているテンソル積の理論の解説が一番詳しい．また直積分の理論も詳しく解説されていて便利である．なお1980年以降に専門家を目指した学生の多くが，入門レベルの内容を［4］またはこの［5］で勉強した．その意味で［4］またはこの［5］は入門書の定番である．この本［5］に書かれていないフォン・ノイマン環の重要な理論は，この本の続きである次の本［6］，［7］で解説されている．ただしフォン・ノイマン環の専門レベルのことを知りたい人向きである．ページ数は，［6］と［7］の2巻合わせて1000ページ以上なので，専門家を目指す人以外不向きであるが，どの巻も記述が厳密かつ重厚なので，パラパラ眺めるだけでも雰囲気を知ることができるであろう．

［6］M. Takesaki: *Theory of Operator Algebras* II, Springer, 2003, xxii + 518 pp.

この巻では冨田理論の説明が詳しく丁寧にされ，1980年までに得られた重要な結果が網羅されている．

［7］M. Takesaki: *Theory of Operator Algebras* III, Springer, 2003, xii + 548 pp.

この巻では非可換エルゴード理論，冨田理論のさらなる応用とConnesによる超有限型の単純フォン・ノイマン環の分類理論が解説されている．Connesによる分類理論の証明は難解であったが，作用素環の分野ではConnesに次ぐ天才といわれているデンマーク人のU. Haagerupによって1980年代に簡略化された証明が詳しく紹介されている．C^*-環のテンソル積の理論における中心テーマの一つである核型C^*-環の十分な内容も解説されている．また最後の章では，フィールズ賞受賞者V. Jonesによる部分因子環の指数理論も，彼の原論文よりも丁寧に解説されている．［6］，［7］を読み切れば，フォン・ノイマン環についての知識は専門家レベルである．

以上で入門書の初級レベルと中級レベルの紹介を終わる．これら以外にも良い入門書がいくつもあるが，紹介した本も含めてこれを読めば作用素環の基礎全般について間に合うといった本はないので割愛する．

実は作用素環の入門レベルの本を読むためには，関数解析学の一般理論以外にも，数学科3年次までに学ぶ数学よりかなり多くの予備知識がいる．最後にこれらについて簡単に述べる．まず代数学では群論，環論，非可換環上の加群の入門レベルを習熟している必要がある．さしあたり，これらの知識については，入門書をなんでもよいから読んで勉強しておればOKである．ただし帰納系の帰納極限，環や加群のテンソル積，普遍性の概念をマスターしておく必要がある．完全系列に関すること以外のホモロジー代数は初級レベルでは知らなくても何とか間に合う．作用素環は一般に非可算無限次元であり，非可算に関する議論が必要となる（たとえば非可算個の和を考えるとか非可算の点の収束とか）．そのためZornの補題，超限帰納法を多用するので，これらが使えるようになっていることが必要である．これらについては，どんな本でもよいが，例えば筆者が学生のときに読んだ次の［8］，［9］をあげておこう．これらを適当に拾い読みすればよい．

［8］山崎圭次郎：『環と加群』，岩波書店，2002，viii + 644 pp.

［9］彌永昌吉，小平邦彦：『現代数学概説 I』，岩波書店，1977，x + 602pp.

またC^*-環ではノルム以外のもっと弱い位相を使うことが多く，このとき第1可算公理を満たさないため，点列では議論できず，点の収束，近似もネットとかフィルターを使って議論する．さらに作用素環では既約表現の集合や原始イデアルの集合，素イデアルの集合などに位相を定義して位相空間にするが，これらの位相空間はハウスドルフのみならずT_0，T_1の分離公理すら，ほとんどの場合，満たさない．さらに連結性についても，その対極である完全非連結やもっと強い非連結性をもつ位相空間になってことが多い．このため距離空間よりむしろ抽象的な位相空間の扱いに習熟している必要がある．これらについては次の［10］をあげておく．この本は入門書レベルとしては，いろいろなことが書かれていて便利である．

［10］森田紀一：『位相空間論』，岩波書店，1977，vii + 273 pp.

昔から作用素環と群，特に位相群のユニタリ表現の研究は深く関係している．また位相群を作用素環の研究によく使う．このため入門レベルでも位相群の基礎的な知識が必要である．特に双対定理，ハール測度，群上のフーリエ解析などが不可欠である．これらについては，とりあえず次の［11］を読めば間に合う．これは筆者が学生のときに，位相群の勉強のために最初に読んだ本である．

［11］壬生雅道：『位相群論概説』，岩波書店 1976，xii + 408 pp.

作用素環は代数的，位相的ではあるが，解析の分野に属するので，抽象解析の素養が必要である．これについては［4］の著者の書いた次の［12］が参考になる．

［12］G. K. Pedersen: *Analysis Now*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 118, 1988, xiv + 277 pp.

実際，作用素環を意識した内容になっており，ストーン・ワイエルシュトラスの定理，ストーン・チェックのコンパクト化，スペクトル解析等を含め，作用素環で使う関数解析学，位相空間，ラドン測度などがコンパクトにまとめられているので，必要に応じて拾い読みするとよい．

[13] 竹之内脩：『函数解析』，朝倉書店，1976，iv + 235 pp.

関数解析学の一般基礎理論は学部 3 年で学ぶ内容では，作用素環の入門レベルでも不足である．関数解析学の入門書で作用素環の本を読むのに適した本として [13] をあげる．著者は筆者の恩師であり，作用素環の専門家でもある．この本も筆者が学生のときに，最初に読んだ関数解析学の入門書である．非有界作用素以外の知識はこの本で大体間に合う．ただし冨田理論では非有界線型作用素を多用するので，[2]，[4]，[6] の冨田理論の部分を読むなら，関数解析学のもう少しレベルの高い本を読む必要がある．