リスク解析と計算機シミュレーション

著者	兼清 泰明
雑誌名	理工学と技術 : 関西大学理工学会誌 = Engineering & technology
巻	20
ページ	17-22
発行年	2013-11-15
その他のタイトル	Risk Analysis and Computer Simulations
URL	http://hdl.handle.net/10112/8006

関西大学理工学会誌
理 工 学 と 技 術
Vol.20(2013)

解　説

リスク解析と計算機シミュレーション

兼 清 泰 明*

Risk Analysis and Computer Simulations

Hiroaki Tanaka-KANEKIYO

1. はじめに

近年、「リスク」という考え方の重要性が増してきている。リスクとは、「損害あるいは不利益をもたらす可能性、または、その大きさ」と定義され、特定の分野に限らず、あらゆる分野に横断的に存在する概念である。したがって、分野を限定することなく、広い観点からリスクを考えていくことが重要である。

リスクを考える上で最も重要なのは、損害の発生の有無・規模・時期が不確実であるという点であり、このため、リスクを定量的に取り扱う際には確率論が主要な役割を演ずることになる。リスクの定量化は、リスクに対する適切な対処法を議論する上で必要不可欠であり、リスクをもたらす事象の生起確率を推定することが基本となる。このような事象の生起確率を解析的に表現することは一般には困難であり、そのためリスク解析は計算機シミュレーションに強く依存せざるを得ない。

リスク解析のためのシミュレーション手法として、最も広く用いられているのはモンテカルロ法である。モンテカルロ法は、簡明な構造と広い汎用性から、様々な分野で活用されているが、推定誤差がゼロに収束する速さが遅いという欠点を有している。リスク解析においては、対象とするリスク事象の生起確率としては通常非常に小さな値が要求されるため、少ないサンプル数で微小な正規確率を精度よく推定するための改良法の開発が重要であり、今後その需要は益々高まっていくと考えられる。

本稿では、リスク解析の概要と、そのシミュレーションを用いた推定法、特に微小な生起確率を推定するための改良法について、概要を述べることとしたい。

原稿受付　平成25年9月2日
*環境都市工学部 都市システム工学科 教授

2. さまざまなリスク

2・1 経済におけるリスク

経済学においては、利殖に不確実さを伴わない金融商品が市場に存在するものと考え、これを基準に利得の有無や金融商品間の経済的均衡などを議論する。これに対して、株式などの金融商品は、利殖に不確実さが存在し、これを経済学ではリスク（risk）と呼んでいる。

リスクを伴う金融商品は、その所有者に経済的な損失を与える可能性を有する反面、大きな利殖を生んで利益をもたらす可能性も同時に有している。実際、投資活動において利益を得るためには、リスクを伴う金融商品への投資が不可欠である。このように、経済におけるリスクとは、必ずしも負の側面だけでなく正の側面も有しており、リスクという言葉の持つ負の感覚とは必ずしも一致しない点には注意しなければならない。

2・2 工学におけるリスク

経済におけるリスクが正の側面も有するのに対して、工学において用いられるリスクという概念は、負の側面だけを対象とする。例えば、地震の危険性がある土地に構造物を構築した場合、その構造物は地震リスクにさらされているという表現を用いる。地震リスク自体には正の側面はないが、我々は構築された構造物を使用することによる恩恵を受けているわけであるから、隠れた形で正の側面が存在する点は考慮に入れておく必要がある。

工学におけるリスクの多くは、工業製品の故障あるいは破壊に依るので、信頼性（reliability）と呼ばれる概念とリスクという概念は基本的には同じものであると言ってよい。信頼性を数量化したものが信頼度で、日本工業規格により、所定の時間までに製品が故障しない確率と定められている[1]。このように、工学においては故障・破壊事象の生起確率は信頼度を用いて表現することができるため、リスクという用語は不確実性そのものを指すのではなく、故障発生の不確実性と、故障が発生した場合に生じる損失の両面から数量化したものを指すことが多い。最もよく用いられるのが、故障発生に伴う損失額の期待値で、これをリスクと呼ぶことが多い。

2・3 信用リスク

不確実性が主要な役割を演ずる分野の1つに、保険がある。保険の数学理論においては、保険会社の資産が保険請求に対して支払い能力を失うまでに低下することをデフォルト（default，債務不履行）と呼び、デフォルトの起こる確率そのものをリスクと捉える。このように定量化されたリスクは、保険会社の保険料率を決定するために活用されることの他に、再保険契約を締結する際の判断材料として用いられている。

このような保険のリスク理論を拡張したものに、信用リスク（credit risk）と呼ばれる概念がある[2]。信用リスクとは、企業あるいは国家がデフォルトに陥る確率のことであり、企業の発行する株式や社債、国家が発行する債券などの信用性を大きく左右するため、投資家にとっては非常に重要な情報である。金融商品に対する格付けは、主にその商品の発行体の信用リスクに基づいて決められている。

3．リスク解析の一般的な定式化

先に述べたように、リスク事象の生起する確率を計算することが、リスク解析において最も重要な役割を演ずる。リスクをもたらす事象は多岐に渡るため、ここではやや抽象的にそのための定式化を与えることとする。我々に損失をもたらす可能性があり、考察の対象となる事象を対象事象と呼び、対象事象の状態が、損失をもたらすと考えられる領域に達したとき、リスク事象が生起したと呼ぶこととする。

$X(t)$ $(t \geq 0)$ を、対象事象の時刻 t での状態を表す量とする。本稿では、これを実数値確率過程であるものとする。確率過程とは、時間と共に不規則に変動していく現象を記述する数学モデルで、$X(t)$ は各時刻 t を固定するごとに実数値を取る確率変数、すなわち、その値は試行ごとに異なり、出現の頻度が従う確率分布が与えられている変数である。なお、本稿では簡単のため1変量の場合で説明するが、一般には多変量のベクトル過程となる。

状態過程 $X(t)$ が、ある集合 D に一度でも入ったときにリスク事象が生起するものとすると、時刻 T までにリスク事象の生起する確率 $\psi(T)$ は、

$$\psi(T) = P\left(0 \leq^{\exists} t \leq T \text{ s.t. } X(t) \in D\right) \tag{1}$$

で与えられる。ここで P は確率測度（事象を表す集合に対して、確率を対応させる写像のこと）であり、$P(A)$ は事象 A の起こる確率を表す。

3・1 信用リスクの場合

信用リスクを考える場合、対象事象は企業の資産の時間変動であり、リスク事象の生起はその資産がデフォルトに陥ることとなる。$X(t)$ を時刻 t での対象企業の資産とするとき、到達集合 D は $D = \{X; X \leq x_d\}$ となる。ここで、x_d は資産がデフォルトに陥ったと判断できる資産レベルである。

3・2 構造システムの破壊リスクの場合

構造システムの破壊リスクを考える場合、対象事象は構造システムの損傷あるいは劣化の状態の時間変動であり、リスク事象の生起はその状態が破壊に至ることとなる。$X(t)$ を時刻 t での構造システムの損傷の状態とすると、到達集合 D は $D = \{X; |X| \geq x_c\}$ となる。ここで、x_c はシステムの状態が破壊と判断できる閾値レベルである。破壊発生時の損失コストを C_F とすると、$R = C_F\psi(T)$ が時刻 T までの期待損失コストを与え、工学ではこの R をリスクと呼ぶことが多い。

4．計算機シミュレーションスキーム

式(1)で与えられるリスク確率 $\psi(T)$ を解析的な形で与えることは一般には難しい。このため、計算機シミュレーションを活用した数値解法を用いる必要がある。そのための準備として、式(1)を書き直しておく。まず、状態過程 $X(t)$ の、考えている時間区間 $[0,T]$ での全挙動を $\boldsymbol{X} = \{X(t); 0 \leq t \leq T\}$ と表記しておく。$\boldsymbol{X}$ は関数空間の要素であり、サンプルを1つ抽出するごとに、関数空間の要素が1つずつ抽出されることになる。次に、

$$f[\boldsymbol{X}] = \begin{cases} 1 & (0 \leq^{\exists} t \leq T \text{ s.t. } X(t) \in D) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{2}$$

と定めておく。これはリスク事象の指標汎関数と呼ばれるものである。これらを用いると、式(1)は、

$$\psi(T) = \mathrm{E}_P\{f[\boldsymbol{X}]\} \tag{3}$$

と表現することができる。ここで、$\mathrm{E}_P\{\ \}$は、確率測度Pに基づく期待値を表す。

最も広く用いられているモンテカルロ法では、$\boldsymbol{X}$に対する独立なサンプル列$\{\boldsymbol{X}_i\}_{i=1,\cdots,N}$を計算機上で発生させて、式(3)を算術平均で置き換えた

$$\hat{\psi}(T;N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f[\boldsymbol{X}_i] \tag{4}$$

により$\psi(T)$を近似評価する。ここで、Nは発生させるサンプル数であり、$\hat{\psi}$はψに対する推定量であることを表している。

5．モンテカルロ法の高速化

一般にリスク解析においては、目標となるリスク生起確率$\psi(T)$は小さな値となることが要求される。特に、人命に深くかかわるような重要システムの破壊リスクにおいては、リスク事象が生起した場合の損失が巨大であるため、極めて小さな値が必要となる。例えば、航空機では、1フライトあたりの墜落確率が1.5×10^{-7}程度となることが数値目標[3]とされており、近年では、様々な重要システムで、これと同レベルか、あるいはそれ以上の微小な故障確率値が要求されることも珍しくない。

このような微小な生起確率をモンテカルロ法で数値評価する場合、必要となるサンプル数が莫大となる。特に、モンテカルロ法では、サンプル数Nを増やしても、推定の誤差が$N^{-1/2}$に比例するスピードでしか減少していかないので、例えば、$\psi(T)=10^{-7}$が要求される場合、必要なサンプル数はおよそ倍のオーダーである10^{14}以上となってしまう。

こういった問題に対応するための有力な方法の1つに、重点サンプリング法と呼ばれる方法がある。重点サンプリング法とは、モンテカルロ法でのサンプルの発生のさせ方を人為的に変更し、本来稀にしか起こらないリスク事象の生起が多数起こるようにしてモンテカルロ法を適用する方法である。本来の確率を算出するための確率測度Pに対して、重点サンプリングを行う確率測度をQと表しておく。以下では、Pを原測度、Qを重点サンプリング測度と呼ぶこととする。

確率測度PとQが互いに絶対連続と呼ばれる条件を満たすとき、式(3)は

$$\psi(T) = \mathrm{E}_Q\left\{f[\boldsymbol{X}]\frac{dP}{dQ}\right\} \tag{5}$$

と書き換えることができることが知られている。ここで、$\mathrm{E}_Q\{\ \}$は、重点サンプリング測度Qに基づく期待値である、dP/dQはラドン・ニコディム（Radon-Nikodym）導関数と呼ばれるもので、2つの確率測度PとQの間の変換比に相当する量を与える。式(5)に基づくモンテカルロ法のスキームは、

$$\hat{\psi}(T;N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f[\boldsymbol{X}_i^{(Q)}]\left(\frac{dP}{dQ}\right)_i^{(Q)} \tag{6}$$

となる。ここで、

$$\{\boldsymbol{X}_i^{(Q)}\}_{i=1,\cdots,N},\quad \{(dP/dQ)_i^{(Q)}\}_{i=1,\cdots,N}$$

は、それぞれ$\boldsymbol{X}$、dP/dQの独立サンプル列を、確率測度Qの下で発生させたものである。式(6)は、リスク事象を高い確率で生起させるサンプル生成を行う代わりに、ラドン・ニコディム導関数によってその発生の確率を調整し、結果として少ないサンプル数で目標の値を精度よく推定する手順を表している。式(6)で$\psi(T)$を数値評価する方法を重点サンプリング法と呼んでいる。

6．適　用　例

6・1 信用リスク解析への適用例

$X(t)$を時刻tでの対象企業の資産とし、その初期値を$X(0)=x_0$とする。企業資産の時間変動を記述するモデルとしては様々なものが提案されてきているが、近年広く用いられているのが、金融デリバティブにおけるブラック・ショールズ（Black-Scholes）の価格評価モデル[4]に基礎を置いたマートン（Merton）の資産変動モデル[5]で、これは次式で与えられる。

$$X(t) = x_0\exp\{\mu_0 t + \sigma_0 B(t)\} \tag{7}$$

ここで、μ_0は資産の平均成長率に対応する定数、σ_0は資産の不規則変動の大きさを支配するパラメータであり、$B(t)$はウィーナー（Wiener）過程あるいはブラウン運動過程と呼ばれ、ブラウン運動やその他の不規則な現象を記述するのに最も広く用いられている確率過程である。

u_0を定数とし、

$$B_Q(t) = B(t) - u_0 t \tag{8}$$

とすると、もちろん$B_Q(t)$はウィーナー過程とはならない。しかし、これがウィーナー過程となるように重点サンプリング測度Qを選ぶと、ギルサノフ（Girsanov）の定理[5]により、ラドン・ニコディム導関数は

$$\frac{dP}{dQ} = \exp\left\{-u_0 B(T) + \frac{1}{2}u_0^2 T\right\} \tag{9}$$

となることが知られているので、これを式(6)に適用することにより、重点サンプリング法を計算機上で実

現することが可能となる。一方、式(8) を式(7) に代入すると、

$$X(t) = x_0 \exp\{(\mu_0 - u_0\sigma_0)t + \sigma_0 B_Q(t)\} \quad (10)$$

となるため、u_0 をうまく調整することにより平均成長率を負の値とすることができ、$X(t)$ のサンプルが Q の下で減少する確率が高くなるようにできることになる。

図1は、$x_0 = 1$、$\mu_0 = 9.95 \times 10^{-3}$、$\sigma_0 = 0.18$、$x_d = 0.3$ と設定した上で、文献7）で著者が提案した手法により、最もサンプリングの効率が良くなる u_0 を選定した上で、資産過程のサンプルを発生させ、P、Q それぞれの下での挙動を比較したものである。この図からわかるように、資産は時間の経過とともに不規則に変動していくが、Q の下ではデフォルトが多数発生するように、$X(t)$ の挙動が平均的に減少していくように変更されている。

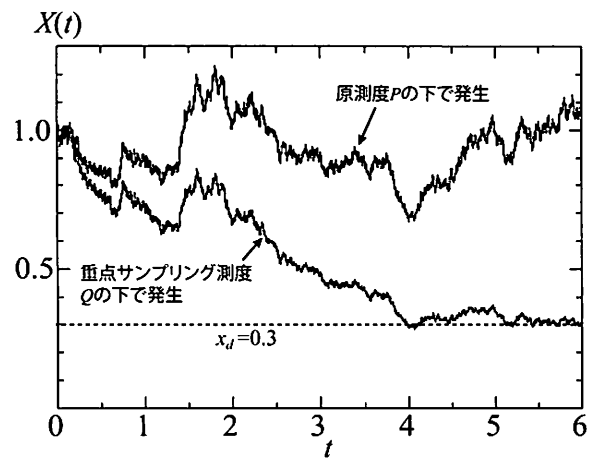

図1　原測度 P と重点サンプリング測度 Q での資産変動過程のサンプル挙動の違い。

図2は、重点サンプリング法により推定したデフォルト確率を常用対数でプロットしたものである。○印はサンプル数500の重点サンプリング法で推定した結果を、▲は同じサンプル数の通常のモンテカルロ法で推定した結果を表しており、実線はデフォルト確率に対して得られている厳密解を表している。このように、本提案手法の適用により、わずか500サンプルで、微小なデフォルト確率値も精度よく推定できることが分かる。なお、通常のモンテカルロ法では、$T<6$ では精度が悪化し、$T=2$ では1つもデフォルトサンプルが得られていない。

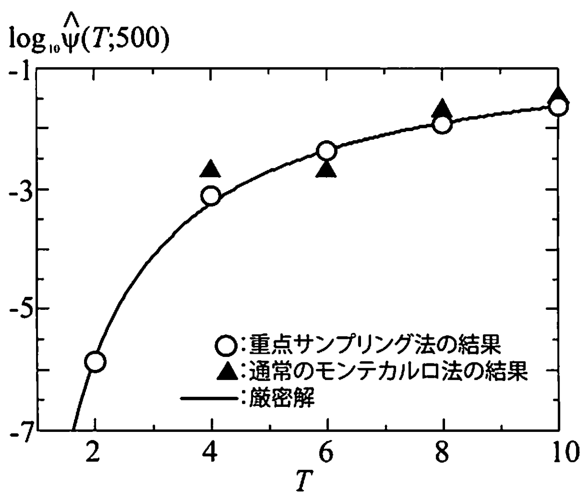

図2　重点サンプリング法を用いて推定されたデフォルト確率と、通常のモンテカルロ法による推定結果との比較。

6・2 トンネル覆工コンクリートの破壊リスク解析への適用例

近年、高度経済成長期に構築した多数のインフラが、同時多発的に劣化してきていることが深刻な問題となってきている。そういった問題の1つに、寒冷地トンネルの覆工コンクリートの経年劣化があり、安全性を維持した上で、経済的な面でできるだけ有利な維持管理を行っていくことが求められている。

著者は、文献8）において、覆工コンクリートの劣化の度合いを数量化した損傷度のランダムな時間成長に対して、次のようなモデルを提案している。

$$\frac{dX(t)}{dt} = \{\mu_0 + W_C(t)\}X(t) \quad (11)$$

ここで、μ_0 は正の定数、$W_C(t)$ はポアソン型白色雑音と呼ばれる確率過程で、

$$C(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \quad (12)$$

で定義される複合ポアソン過程の平均をゼロに調整したものの形式的な時間微分である。式(12) において、$N(t)$ はポアソン過程で、ランダムに生起する事象の回数をカウントする確率過程であり、$\{Y_1, Y_2, \cdots\}$ は損傷度の不規則な成長の度合いを表す確率変数の集まりである。すなわち、$C(t)$ は、$N(t)$ で事象が生起するごとに、$\{Y_1, Y_2, \cdots\}$ で与えられるランダムな大きさのジャンプが累積されていく確率過程を表している。式(11)は、確率過程が入力される特殊な微分方程式で、確率微分方程式（stochastic di.erential equation）と呼ばれている。

式(11) で与えられるモデルについてはギルサノフ

の定理が適用できないため、別の方法で Q を決めなければならない。デルバーン（Delbaen）らは、保険の数学モデルに基づく証券化に関する考察[9]の中で、$C(t)$ が Q の下でも複合ポアソン過程となるような Q を選ぶと、ラドン・ニコディム導関数が

$$\frac{dP}{dQ}=\mathrm{e}^{(\lambda_Q-\lambda)T}\prod_{k=1}^{N(T)}g(Y_k)^{-1} \tag{13}$$

という形を取ることを導いている。ここで、λ は P の下でのポアソン過程 $N(t)$ の事象発生頻度、λ_Q は Q の下での $X(t)$ の事象発生頻度で、$g(Y_k)$ は Q の下での $C(t)$ のジャンプの特性を定める関数を表している。このような Q を用いることにより、$C(t)$ の変動を調整し、それに対応して $X(t)$ の時間成長を平均して加速して、重点サンプリングの下で損傷度が速く成長して破壊するサンプルが多数生成されるように調整した上で、式(13) を式(6) に適用することによって重点サンプリングを計算機上で実現させることが可能となる。先の信用リスクの例では、デフォルトを多く生成するために、$X(t)$ の成長を抑制する必要があったのに対して、この破壊モデルにおいては、逆に $X(t)$ の成長を加速させるように Q を選定しなければならない。

図3は、$x_0=1$、$x_c=12$、$\mu_0=0.03$ [year^{-1}]、$\lambda=0.5$ [year^{-1}] とし、$\{Y_k\}$ が平均0.05の指数分布に従う場合を想定した上で、$T=10$ [year] ～50 [year] の5通りの評価時刻までに、損傷度が限界値を超えて破壊する確率を、重点サンプリング法によって推定した結果を対数プロットしたものである。なお、Q の下での $C(t)$ の性質に関するデルバーンの変換式中のパラメータ等は、著者の提案する方法[10]によって推定が最も効率的に行われるように定めてある。この場合、破壊確率の厳密解が得られていないため、各点においてサンプル数が500のシミュレーションを独立に10回行った最大の推定値と最小の推定値の推定幅をエラーバーで示し、推定値である○印はその平均値としてある。図でのエラーバーは十分に小さく、重点サンプリング法により非常に小さな破壊確率値でも精度よく推定できていることがわかる。なお、図には示していないが、同じサンプル数の通常のモンテカルロ法では破壊サンプルが1つも得られなかった。

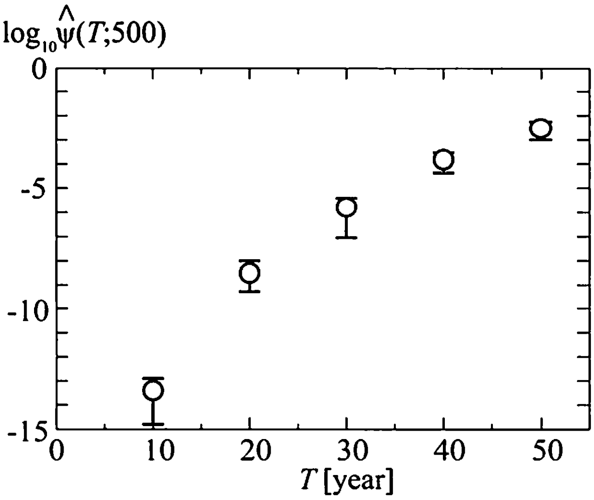

図3　重点サンプリング法により推定された破壊確率 $\psi(T)$。

7．リスクの証券化

リスクに対する対処法は、(i)リスクの保有、(ii)リスクの移転、(iii)リスクの直接的抑制、の3通りに大別できる。リスクの保有とは、具体的な対処法を何も取らないことで、発生したリスクによる損害は自身が受け持つことになる。リスクの移転とは、発生したリスクによる損害を第三者に負担してもらう方法で、保険に加入する方法や、証券化と呼ばれる方法がある。リスクの直接的抑制とは、工学的な手段などを用いてリスクの生起確率を直接に低減させる方法であり、例えば構造物に耐震補強工事を施すことは、地震リスクの直接的抑制の有力な手段の1つである。ただし、抑制を行うために必要となるコストは、新たなリスクと解釈しなければならない点には注意が必要であり、このことをリスク解析に取り入れないと、適切なリスク管理が困難となってしまう。

これらの中で、近年非常に需要が高まっているのが、リスクを証券化する方法である。例えば、保険会社は自身の保有するリスクの一部を再保険会社に移転するという方法を取っている。特に、大規模な自然災害保険のようにリスクが巨大となるような場合は再保険への加入は不可欠である。しかし、この移転を請け負った再保険会社は同様に巨大なリスクを保有することになるので、さらに再々保険への加入が必要となり、連鎖は続いていくことになる。我が国における地震保険の場合は、いくつかの再保険を経由して、最終的な再保険の受け入れ先は国、すなわち税金の投入で最後の歯止めをかける仕組みとなっている。これに対して、最終的な受け入れ先を金融市場に求めるのがリスクの証券化である。

図4に、リスクの証券化の一般的な枠組みの概略を示す。再保険会社のようにリスクを保有している「オリジネーター」が、証券発行に特化したSPC（Special Purpose Company）を作り、そこを通じて証券化したリスクを投資家に売却する。売却代金として投資家から受け取る「プレミアム」がオリジネーターに渡り、

リスクをヘッジするための経済的基盤となるのである。この手法のポイントは、オリジネーターの有する巨大なリスクが、細分化されて投資家に移転されている点にある。移転を受け入れた投資家はリスクの一部を請け負うが、その代償として有利な利回りなどを受け取り、請け負ったリスクを自身の投資行動の中に埋め込んでしまうことが可能となる。

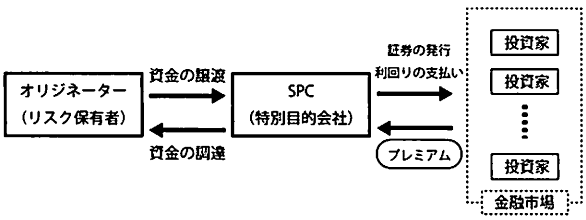

図4　リスク証券化の仕組みの概略図。

リスク証券化において、最も重要となるのが、プレミアムの妥当な値の算出である。プレミアムはリスク事象の生起による経済的損失を反映して、オリジネーターと投資家との間の均衡が保たれるような値とならなければならない。このプレミアムの算出に、リスク事象の生起確率が必要となるのである。

住宅ローンの証券化などでは、リスク事象の生起確率の大小により、トランシェと呼ばれる細分化された証券の形で投資家に渡るので、上位トランシェ（最もリスク生起確率の低いトランシェ）におけるリスク事象の生起確率は非常に小さな値を取ると考えられる。このような微小な確率を計算機シミュレーションを通じて推定するには、本稿で述べたような高速化法の適用が不可欠となってくる。

8. おわりに

本稿では、リスク解析において最も基本となるリスク事象の生起確率の推定について一般的な定式化を与え、モンテカルロ法と呼ばれるシミュレーション手法によって生起確率を推定する枠組みを構成した。さらに、対象となる生起確率が微小となる場合に対応するために、重点サンプリング法を適用して推定精度を飛躍的に向上させる手法を紹介した。対象事象の状態が時間と共に変動していく場合にも適用し得る重点サンプリング法は、近年の著者の研究により、さらに一般化されたケースに対して適用できるように改良されてきており[10]、今後多くの分野に応用することができると考えられる。

リスク解析に関しては、様々な分野に横断的に適用し得る概念であることを念頭に置いて、研究を進めていくことが肝要である。

参考文献

1）日本工業規格 JIS Z8105 デイペンダビリティ（信頼性）用語.

2）森平爽一郎, "信用リスクモデリング—測定と管理—", 朝倉書店, 2009.

3）成合英樹, "安全目標—リスクと安全・社会の安心—", 学術の動向, 2009年9月号.

4）Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol.**81**, pp.637-654, 1973.

5）Gisanov, I. V., "On Transfoming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures", *Theory Probab. Its Appl.*,Vol. **5**, pp.285-301, 1960.

6）Merton, R. C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates", *Journal of Finance*, Vol.**29**, pp.449-470, 1974.

7）田中泰明, "システム信頼性解析における効率的シミュレーション解法", 日本応用数理学会誌, Vol.**10**, No.3, pp.229-239, 2000.

8）Tanaka, H., O. Maruyama and A. Stoh, "Probabilistic Model for Damage Accumulation in Concrete Tunnel Lining and its Application to Optimal Repair Strategy", *Proc. of ICASP 11, CD-ROM*, pp.2368-2375, Taylor & Francis, 2011.

9）Delbaen, F. and J. Haezendonck, "A Maringale Approach to Premium Calculation Principles in an Arbitrage Free Market", *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol.**8**, pp.269-277, 1989.

10）田中泰明, "Lévy 過程に対する確率測度変換とその高速モンテカルロスキームへの応用", 第7回構造物の安全性および信頼性に関する国内シンポジウム（JCOSSAR 2011）CD-ROM 論文集, pp.677-683, 日本建築学会, 2011.

注：「田中泰明」「H. Tanaka」は著者の旧姓。