2次曲線と等積アファイン変換

著者	藤岡 敦
雑誌名	理工学と技術 : 関西大学理工学会誌 = Engineering & technology
巻	20
ページ	1-6
発行年	2013-11-15
その他のタイトル	Quadratic curves and equiaffine transformations
URL	http://hdl.handle.net/10112/8003

関西大学理工学会誌
理 工 学 と 技 術
V o l. 20 (2 0 1 3)

解　説

2次曲線と等積アファイン変換

藤　岡　　　敦*

Quadratic curves and equiaffine transformations

Atsushi FUJIOKA

1．微分積分の問題から

放物線、楕円、双曲線は x, y についての２次方程式の解全体の集合として、xy 平面に表すことができることから、２次曲線ともいう。

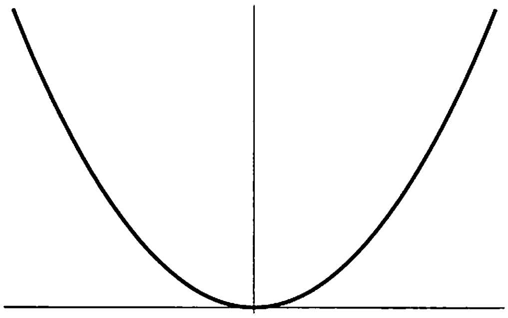

図１　放物線

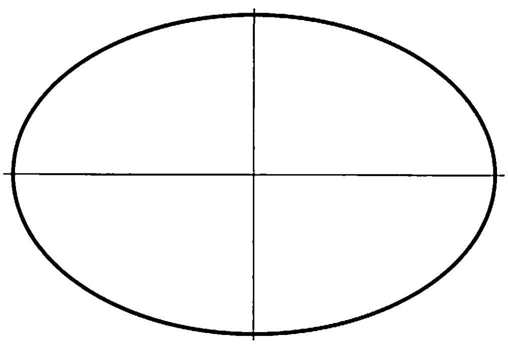

図２　楕円

原稿受付　平成25年７月30日
*システム理工学部 数学科 教授

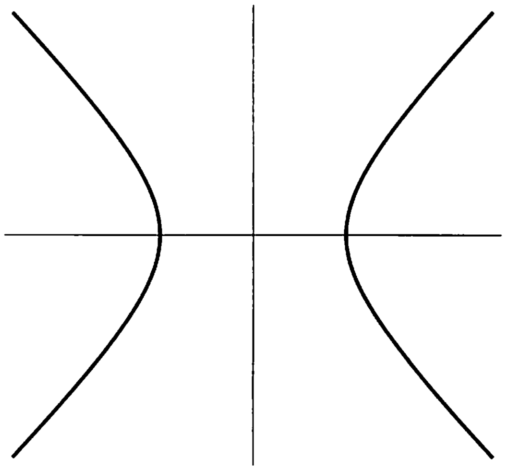

図３　双曲線

ここでは、次のような問題から考えてみよう。

問題 a, b を正の定数とする。P を x 座標が p の放物線 $y = ax^2 + b$ 上の点とする。P における接線と放物線 $y = ax^2$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

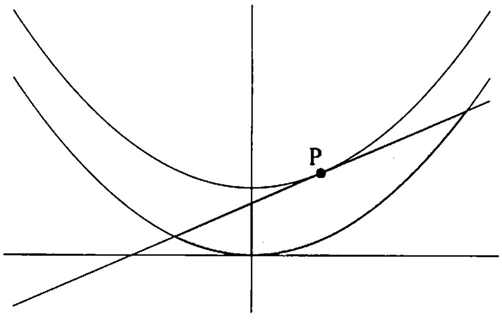

図４　接線と放物線で囲まれる図形

上の問題は次のようにして解くことができる。

解答　Pにおける接線の方程式は

$$y-(ap^2+b)=2ap(x-p)$$

すなわち、

$$y=2apx-ap^2+b$$

よって、接線と放物線 $y=ax^2$ の交点の x 座標は、方程式

$$2apx-ap^2+b=ax^2$$

を解いて、

$$x=p\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

したがって、求める面積は

$$\begin{aligned}
&\int_{p-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{p+\sqrt{\frac{b}{a}}}(2apx-ap^2+b-ax^2)dx\\
&=\int_{p-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{p+\sqrt{\frac{b}{a}}}\left\{-a(x-p)^2+b\right\}dx\\
&=\left[-\frac{a}{3}(x-p)^3+bx\right]_{p-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{p+\sqrt{\frac{b}{a}}}\\
&=-\frac{a}{3}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\\
&\quad+b\left\{p+\sqrt{\frac{b}{a}}-\left(p-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right\}\\
&=-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\\
&=\frac{4}{3}a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

□

解答からも分かるように、上の問題に現れた図形の面積は放物線の接線の選び方に依存しない。以下では、この事実をアファイン微分幾何学という数学の一分野の立場から眺めてみよう。なお、アファイン微分幾何学については［1］が良い参考文献である。

2．アファイン空間

実数全体からなる集合を $\mathbf{R}$ と表そう。このとき、$\mathbf{R}$ は直線とみなすことができるし、更に集合

$$\mathbf{R}^2=\left\{\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)\middle|\, x,y\in\mathbf{R}\right\}$$

は平面とみなすことができる。平面 $\mathbf{R}^2$ から任意に2点P, Qを選んでおくと、平面ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が得られる。このようにして得られる平面ベクトルのみたす性質を上手く取り出すことにより、次のようにしてアファイン空間というものが定義される。

定義　A を空でない集合、V をベクトル空間とする。任意の $p,q\in A$ に対して $\overrightarrow{pq}\in V$ をあたえる対応が定められ、次の (a), (b) をみたすとき、A を V に付随するアファイン空間という。

(a) 任意の $p,q,r\in A$ に対して
$$\overrightarrow{pr}=\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}$$
がなりたつ。

(b) 任意の $p\in A$ と任意の $v\in V$ に対して、$v=\overrightarrow{pq}$ となる $q\in A$ が一意的に存在する。

上の定義は抽象的かもしれないが、今後の議論では $\mathbf{R}^2$ のことだけを念頭に置いておけば十分である。また、アファイン空間としての $\mathbf{R}^2$ はアファイン平面ともいう。

3．アファイン変換

アファイン空間から同じアファイン空間への写像として、アファイン変換というものを考えることができる。以下では、アファイン平面 $\mathbf{R}^2$ のアファイン変換について述べよう。この場合のアファイン変換は2次の正則行列 A と平面ベクトル b を用いて、対応

$$v\mapsto Av+b\ (v\in\mathbf{R}^2) \tag{1}$$

によりあたえられる。

また、アファイン空間に対して体積要素というものを考えることができる。ただし、アファイン平面 $\mathbf{R}^2$ の場合は面積要素ということにしよう。面積要素を考えることにより、アファイン平面内の図形の面積を測ることが可能となる。例えば、2次の行列式は $\mathbf{R}^2$ の面積要素を定める。平行ではない2つの平面ベクトル u,v に対して、u,v を2辺とする平行四辺形の面積は行列式 $\det(u,v)$ の絶対値に等しいことを思い出そう。以下では、2次の行列式を $\mathbf{R}^2$ の面積要素として選んでおく。

u,v を2辺とする平行四辺形を (1) のアファイン変換により写すと、写されて得られる新しい平行四辺形の面積は

$$\det(Aa,Ab)=\det A\ \det(a,b)$$

の絶対値に等しい。このことから、(1) において $\det A=1$ となるアファイン変換を等積アファイン変換という。等積アファイン変換は平行四辺形に限らず、図形の面積を変えない。微分積分において現れる変数変換公式と (1) を変数変換とみなしたときのヤコビ行列式が $\det A$ であることを思い出そう。

4．放物線を不変にする等積アファイン変換

さて、最初の問題に戻るために a,b を正の定数、t を実数のパラメータとし、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2at & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ at^2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

により定められる等積アファイン変換を考えよう。この等積アファイン変換は2つの放物線 $y=ax^2$ と $y=ax^2+b$ 上の点をそれぞれ同じ放物線上の点へ

$$\begin{pmatrix} x \\ ax^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+t \\ a(x+t)^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ ax^2+b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+t \\ a(x+t)^2+b \end{pmatrix}$$

と写す。よって、最初の問題は次のように説明することができる。P,P' を放物線 $y=ax^2+b$ 上の異なる2点とする。このとき、t を上手く選んでおくことにより、(2) の等積アファイン変換で P を P′へ写すようなものが存在する。P における接線と放物線 $y=ax^2$ で囲まれる図形は、この等積アファイン変換により、P′における接線と放物線 $y=ax^2$ で囲まれる図形へ写され、それぞれの面積は等しい。

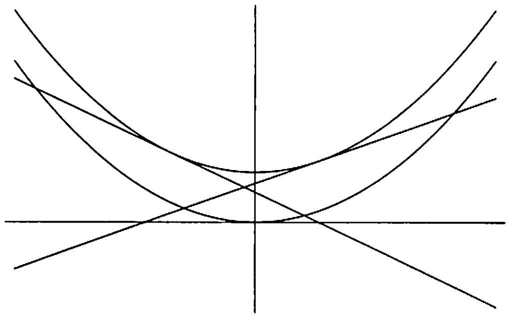

図5　接線と放物線で囲まれる2つの図形

しかし、(2) のような等積アファイン変換がなぜ現れたのであろうか。以下では、そのことについて述べていこう。

5．曲線の径数表示

a を0でない定数、b,c を定数とすると、2次関数 ax^2+bx+c のグラフは放物線を表す。また、a,b を正の定数とすると、方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

をみたす実数の組 (x,y) 全体は楕円を表す。これらの曲線はどちらも径数表示を用いて表すことができる。なお、径数とはパラメータあるいは媒介変数のことである。

平面上の曲線の径数表示とは曲線を区間から $\mathbf{R}^2$ への写像として表すことである。例えば、2次関数 ax^2+bx+c のグラフは

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ at^2+bt+c \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定められる $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}^2$ への写像として表すことができる。また、方程式 (3) の定める楕円は

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \quad (t \in [0,2\pi])$$

により定められる区間 $[0,2\pi]$ から $\mathbf{R}^2$ への写像として表すことができる。

6．非退化な曲線

放物線や楕円に共通する特徴として、曲線上のどの点で接線を引いても曲線はその接線の片側にあるということが挙げられる。このような曲線は非退化であるという。以下では、非退化な曲線について考えていきたいが、このままでは計算ができないので、非退化であるという性質を式で表しておこう。

区間 I から $\mathbf{R}^2$ への写像として表される曲線

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (t \in I)$$

を考える。ただし、$x(t),y(t)$ は I で定義された実数値関数である。簡単のため、$x(t)$ や $y(t)$ などの関数は t に関して何回でも微分可能であると仮定しよう。以下では、t に関する微分はドット $\dot{}$ を用いて、

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix}, \ \ddot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \ddot x(t) \\ \ddot y(t) \end{pmatrix}$$

のように表すことにする。このとき、γ が非退化であるという条件は、任意の $t \in I$ に対して

$$\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(t)) \neq 0$$

という条件と同値である。実際、0と異なり0に十分近い $h \in \mathbf{R}$ が $t+h \in I$ をみたすとすると、テイラーの定理より、t と $t+h$ の間のある $\tau \in I$ が存在し

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + h\dot\gamma(t) + \frac{1}{2}h^2\ddot\gamma(\tau)$$

がなりたち、

$$\det(\dot\gamma(t), \gamma(t+h)-\gamma(t)) = \frac{1}{2}h^2\det(\dot\gamma(t), \ddot\gamma(\tau)) \neq 0$$

となるからである。

7．等積アファイン平面曲線

放物線はアファイン平面上の等積アファイン平面曲線として捉えると、ユークリッド幾何における直線に相当する基本的な曲線であることが分かる。まず、等積アファイン平面曲線について述べよう。

区間 I から $\mathbf{R}^2$ への写像として表される非退化な曲線 γ および区間 J を I へ写す変数変換

$$t=\varphi(s) \quad (s \in J)$$

を考えよう。このとき、γ と合成写像 $\gamma\circ\varphi$ は写像としては異なるが、写像の像だけに注目すれば同じ曲線を表していることに注意しよう。s に関する微分はプライム $'$ を用いることにすると、合成関数の微分法と行列式の性質より、

$$\begin{aligned}\det((\gamma\circ\varphi)',(\gamma\circ\varphi)'') &= \det(\dot\gamma\varphi',\ddot\gamma(\varphi')^2+\dot\gamma\varphi'')\\ &= (\varphi')^3\det(\dot\gamma,\ddot\gamma)\end{aligned}$$

となる。なお、煩雑さを避けるため、$\gamma(t)$ などは単に γ などと表した。

ここで、γ は非退化であるから、$t_0 \in I$ を固定しておくと、φ を逆関数が

$$\varphi^{-1}(t)=\int_{t_0}^{t}\det(\dot\gamma,\ddot\gamma)^{\frac{1}{3}}dt \quad (t\in I)$$

となるものとして定めることができる。このとき、

$$\det((\gamma\circ\varphi)',(\gamma\circ\varphi)'')=1$$

がなりたつ。すなわち、非退化な曲線は、必要ならば変数変換を行うことにより、始めから

$$\det(\gamma'(s),\gamma''(s))=1 \quad (s\in I) \tag{4}$$

となるように径数表示されているとしてよい。このような γ を等積アファイン平面曲線という。また、このときの s を等積アファイン弧長径数という。

8．等積アファイン平面曲線の基本定理

等積アファイン平面曲線の形は等積アファイン曲率という関数によって完全に決定することができる。まず、次の命題を示そう。

命題　γ を等積アファイン平面曲線とすると、

$$\gamma'''=-\det(\gamma'',\gamma''')\gamma'$$

証明　γ の定義域を I とすると、(4) より、任意の $s\in I$ に対して $\gamma'(s),\gamma''(s)$ は $\mathbf{R}^2$ の基底となり、

$$\gamma'''=\alpha\gamma'+\beta\gamma'' \tag{5}$$

と一意的に表すことができる。ただし、α,β は I で定義された実数値関数である。

ここで、再び (4) に注意すると、

$$\det(\gamma',\gamma''')=\det(\gamma',\gamma'')'-\det(\gamma'',\gamma'')=0$$

また、

$$\det(\gamma',\alpha\gamma'+\beta\gamma'')=\beta$$

よって、(5) より、

$$\beta=0$$

したがって、(4), (5) より、

$$\alpha=\det(\gamma''',\gamma'')=-\det(\gamma'',\gamma''')$$

□

等積アファイン平面曲線 γ に対して、

$$\kappa=\det(\gamma'',\gamma''')$$

とおき、κ を γ の等積アファイン曲率という。線形常微分方程式の解の存在と一意性を用いることにより、次を示すことができる。

等積アファイン平面曲線の基本定理　区間 I で定義された任意の実数値関数

$$\kappa=\kappa(s) \quad (s\in I)$$

に対して、s を等積アファイン弧長径数、κ を等積アファイン曲率とする等積アファイン平面曲線が、等積アファイン変換の合成を除いて一意的に存在する。

上の定理において述べた等積アファイン変換の合成を除く一意性とは、$\gamma,\tilde\gamma$ をともに同じ等積アファイン曲率をもつ等積アファイン平面曲線としたとき、行列式が 1 の 2 次行列 A と平面ベクトル b が存在し、任意の $s\in I$ に対して

$$\tilde\gamma(s)=A\gamma(s)+b$$

がなりたつ、という意味である。

9．等積アファイン曲率が一定の場合

等積アファイン曲率が κ の等積アファイン平面曲線のみたす線形常微分方程式

$$\gamma'''=-\kappa\gamma' \tag{6}$$

は、κ が定数のときは具体的に解くことができる。まず、κ が恒等的に 0 であるとしよう。このとき、(6)

は $\gamma'''=0$ となるから、$a,b \in \mathbf{R}^2$ を用いて

$$\gamma(s) = \frac{1}{2}s^2 a + sb + c \tag{7}$$

を得る。ここで、

$$\gamma'(s) = sa + b,\ \gamma''(s) = a$$

だから、(4) より、

$$\det(b,a) = 1$$

である。更に、(7) は

$$\gamma(s) = (b,a)\begin{pmatrix} s \\ \frac{1}{2}s^2 \end{pmatrix} + c$$

と表され、これは放物線または放物線の一部である。

次に、κ が正の定数であるとしよう。(6) を γ' に対する 2 階の定数係数線形常微分方程式とみなすと、$a,b \in \mathbf{R}^2$ を用いて

$$\gamma'(s) = a\cos(\sqrt{\kappa}s) + b\sin(\sqrt{\kappa}s)$$

を得る。ここで、(4) より、

$$\det(a,b) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$$

である。更に、γ は $c \in \mathbf{R}^2$ を用いて

$$\gamma(s) = (-\sqrt{\kappa}b, \sqrt{\kappa}a)\begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}\cos(\sqrt{\kappa}s) \\ \frac{1}{\kappa}\sin(\sqrt{\kappa}s) \end{pmatrix} + c$$

と表され、これは楕円または楕円の一部である。

κ が負の定数のときは双曲線関数を用いればよい。このときは

$$\det(a,b) = \frac{1}{\sqrt{-\kappa}}$$

となる $a,b \in \mathbf{R}^2$ および $c \in \mathbf{R}^2$ を用いて

$$\gamma(s) = (-\sqrt{-\kappa}b, \sqrt{-\kappa}a)\begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa}\cosh(\sqrt{-\kappa}s) \\ -\frac{1}{\kappa}\sinh(\sqrt{-\kappa}s) \end{pmatrix} + c$$

と表され、これは双曲線または双曲線の一部である。

10. 等積アファイン変換群

等積アファイン変換全体の集合は群という構造をもつ。一般に群とは次のように定義される。

定義　G を集合とする。任意の $a,b \in G$ に対して $ab \in G$ をあたえる対応が定められ、次の (a) ～ (c) をみたすとき、G を群という。

(a)　任意の $a,b,c \in G$ に対して

$$(ab)c = a(bc)$$

がなりたつ。

(b)　ある $e \in G$ が存在し、任意の $a \in G$ に対して

$$ae = ea = a$$

がなりたつ。

(c)　任意の $a \in G$ に対して、ある $a' \in G$ が存在し、

$$aa' = a'a = e$$

がなりたつ。

上の定義において、ab を a と b の積、(a) を結合律という。また、e を G の単位元という。単位元は一意的であることが分かる。更に、a' を a の逆元という。a の逆元は一意的であることが分かり、a^{-1}とも表す。

等積アファイン変換全体の集合は、写像の合成を積とすることにより群となり、等積アファイン変換群という。結合律がなりたつことは行列の積が結合律をみたすことから従う。また、単位元は恒等写像であり、逆元は逆写像によりあたえられる。

(1)により定められる等積アファイン変換に対して、行列

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

を対応させよう。(8) のように表される行列全体は、行列の積を用いることにより群となる。ここで、T_1, T_2 をそれぞれ

$$T_1(v) = A_1 v + b_1,\ T_2(v) = A_2 v + b_2 \quad (v \in \mathbf{R}^2)$$

により定められる等積アファイン変換としよう。ただし、A_1, A_2 は行列式が 1 の 2 次行列で、b_1, b_2 は平面ベクトルである。このとき、

$$\begin{aligned}(T_2T_1)(v) &= T_2(T_1(v)) = T_2(A_1v + b_1) \\ &= A_2(A_1v + b_1) + b_2 = (A_2A_1)v + (A_2b_1 + b_2)\end{aligned}$$

で、一方

$$\begin{pmatrix} A_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2A_1 & A_2b_1 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。よって、上の対応は群の積も込みにした対応となる。そこで、(8) のように表される行列全体を等積アファイン変換群とみなし、

$$\mathrm{SA}(2,\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A \text{ は } \det A = 1 \text{ の 2 次} \\ \text{行列、} b \text{ は平面ベクトル} \end{array} \right\}$$

とおく。

11. 1 径数部分群

群の部分集合の中でも基本的なものとして、1 径数部分群というものが挙げられる。

定義 G を群とする。任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $g(t) \in G$ があたえられ、任意の $s, t \in \mathbf{R}$ に対して

$$g(s+t) = g(s)g(t)$$

がなりたつとき、集合

$$\{g(t) \,|\, t \in \mathbf{R}\}$$

を G の 1 径数部分群という。

そこで、放物線 $y = ax^2$ や $y = ax^2 + b$ を不変にした等積アファイン変換 (2) を思い出そう。これら全体の集合は実は等積アファイン変換群 $\mathrm{SA}(2, \mathbf{R})$ の 1 径数部分群

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & t \\ 2at & 1 & at^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, t \in \mathbf{R} \right\}$$

なのである。

逆に、$\mathrm{SA}(2, \mathbf{R})$ の 1 径数部分群

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} A(t) & b(t) \\ 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, t \in \mathbf{R} \right\}$$

があたえられたとしよう。このとき、$v \in \mathbf{R}^2$ を固定しておくと、$\mathbf{R}^2$ 上の曲線 γ を

$$\gamma(t) = A(t)v + b(t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

により定めることができる。このように表される曲線は等質であるという。

もしも、この γ が非退化ならば、γ は等積アファイン曲線として径数表示することができる。更に、そのときの等積アファイン曲率は一定である。なぜならば、γ の定義より、γ 上の任意の点を γ 上の別の任意の点へ写し、γ を不変にする 1 径数部分群の元が存在し、等積アファイン平面曲線の基本定理より、等積アファイン変換を合成しても対応する点の等積アファイン曲率は変わらないからである。

等積アファイン曲率が一定の等積アファイン曲線は放物線、楕円、双曲線またはそれらの一部であった。上で述べたように放物線は等質であるが、楕円や双曲線も等質であることが分かる。実際、$P \in \mathrm{SA}(2, \mathbf{R})$ を任意に固定しておき、楕円、双曲線の場合に応じて、それぞれ 1 径数部分群

$$\left\{ P^{-1} \left(\begin{array}{ccc} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) P \,\middle|\, t \in \mathbf{R} \right\},$$

$$\left\{ P^{-1} \left(\begin{array}{ccc} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) P \,\middle|\, t \in \mathbf{R} \right\}$$

を考えればよい。よって、楕円や双曲線に対しても最初と同様の問題を考えることができるのである。

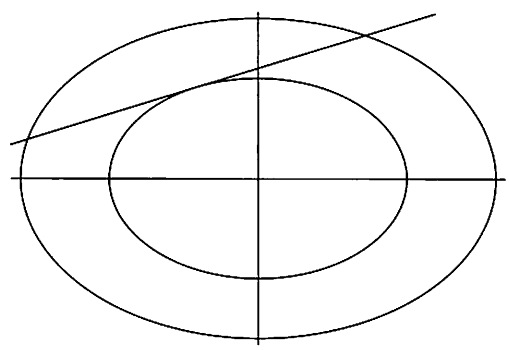

図 6　楕円の場合

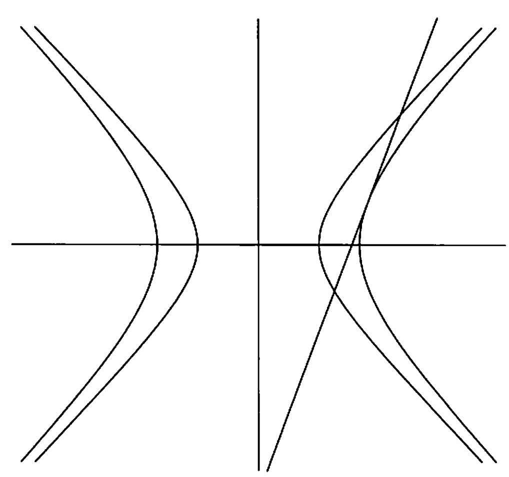

図 7　双曲線の場合

参考文献

[1] 野水克己・佐々木武、アファイン微分幾何学―アファインはめ込みの幾何―、裳華房、1994