



# 不完全競争経済における一般均衡の大域的漸近安定性

著者	坂根 宏一
雑誌名	関西大学経済論集
巻	61
号	3-4
ページ	265-269
発行年	2012-03-10
その他のタイトル	Global asymptotic stability of a general equilibrium for an economy under imperfect competition
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10112/9709">http://hdl.handle.net/10112/9709</a>

## 論 文

## 不完全競争経済における一般均衡の大域的漸近安定性

坂 根 宏 一

## 要 旨

本稿では、不完全競争経済の均衡の大域的漸近安定性が証明される。これは Sakane (2011) において証明された局所的漸近安定性の大域的な性質への拡張である。

キーワード：一般均衡；不完全競争；大域的漸近安定性  
 経済学文献季報分類番号：02-21；02-23

## 1 序文

本稿では、不完全競争経済の均衡の大域的漸近安定性が証明される。その「局所的」な安定性については、すでに Sakane (2011) において証明されており、本稿の帰結はその大域的な性質への拡張である。競争経済の一般均衡の大域的安定性については、Arrow *et al.* (1959) において証明が与えられている。しかしながら不完全競争経済の一般均衡については、決定的なモデルが存在しないため、安定性についての議論もいくつかのタイプが混在している。初期の業績 Negishi (1961) においては、不完全競争市場における調整過程は利潤を追求する企業の「自己調整過程」であることが仮定されている。つまり不完全競争企業は需要曲線（あるいは想定需要曲線）上で数量調整を行うために需給は常に一致する。こうして問わなければならない安定性は、企業の私的な利潤追求過程になるのである。また Fisher (1970), Fisher (1972) および Allingham (1976) においては、不完全競争企業が「競売人」の代替的存在として需給調整を行い得るモデルを提示している。しかしこれらモデルの仮定は強い。Sakane (2011) および本稿では、不完全競争企業が市場調整メカニズムに影響力を持つことが仮定され、微分方程式体系が定義される。均衡の大域的漸近安定性を証明するにあたっては、Arrow *et al.* (1959) がそうであるように Lyapunov の直接法を用いることが標準的手法であり、本稿でもまたこの手法がとられる。

## 2 不完全競争経済の調整過程

以下のモデルでは、財は  $s$  種類存在すると仮定される。  $s-1$  種類の生産物と 1 種類の生産要素である。一般性を失うことなく生産要素を  $s$  番目の財と考える。各企業は結合生産を行うことはなく、  $j$  番目の財を生産する企業を「企業  $j$ 」あるいは「第  $j$  番目の企業」と呼ぶこととする ( $j = 1, 2, \dots, s-1$ )。したがって第  $j$  番目の企業は、他の企業の生産物と消費者から提供される  $s-1$  種類の財を投入して第  $j$  財を生産するのである。財の番号について以下の集合を準備しておく。  $I := \{1, \dots, s\}; J := \{1, \dots, s-1\}; I_{-j} := \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, s\}$  ( $\forall j \in J$ );  $J_{-j} := \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, s-1\}$  ( $\forall j \in J$ )。また各財の価格を  $p_j$  ( $j \in I$ ) と表し、価格ベクトル  $(p_1, \dots, p_s)$  を  $p$  と表すことにする。

### 2.1 消費者行動

消費者は価格受容行動をとることが仮定される。したがって、需要関数  $x : R_{++}^s \rightarrow R^s$  は標準的な議論から導出できる。そのため消費者行動についての記述は最小限にとどめる。需要ベクトルを  $x(p) := (x_1(p), \dots, x_s(p))$  と表し、需要関数には以下の仮定を設定する。条件のすべては標準的なものである。

(A. 1) (i) 需要関数  $x : R_{++}^s \rightarrow R^s$  は  $C^2$ -級である；(ii)  $x$  は価格に関して 0 次同次である；さらに (iii) 任意の  $i \in I$  および  $j \in I$  ( $i \neq j$ ) について、条件  $\frac{\partial x_i(p)}{\partial p_j} > 0$  が成り立つ。

### 2.2 企業行動

不完全競争経済における企業の行動は、その一般均衡の局所漸近安定性を証明するにあたって Sakane (2011) において述べられている。本稿においてもその行動仮説は引き継がれるが、後の議論に必要な部分を再述しておくこととする。

初めに生産技術について述べる。任意の  $j \in J$  について、  $w_j := (w_{j1}, \dots, w_{jj-1}, w_{jj+1}, \dots, w_{js})$  を投入要素ベクトルを、  $f_j : R^{s-1} \rightarrow R$  を生産関数を表すものとする。これ以後  $f_j^m$  および  $f_j^{mn}$  は  $f_j$  の 1 次および 2 次導関数を表すものとする、つまり  $f_j^m := \frac{\partial f_j(w_j)}{\partial w_{jm}}$ ,  $f_j^{mn} := \frac{\partial}{\partial w_{jn}} \frac{\partial f_j(w_j)}{\partial w_{jm}}$  である。生産関数については以下の仮定を設定する。

(A. 2) 任意の  $j \in J$  について：(i)  $f_j : R^{s-1} \rightarrow R$  は  $C^2$ -級である；(ii) 任意の  $m \in I_{-j}$  について、  $f_j^m > 0$ ；(iii) 任意の  $m \in I_{-j}$ ,  $n \in I_{-j}$  ( $m \neq n$ ) について、  $f_j^{mn} < 0$  および

$f_j^{mn} > 0$  ; (iv) 任意の  $w_j \in R^{s-1}$  について,  $w_{js} < \infty$  ならば  $f_j(w_j) < \bar{y}_j < \infty$  を満たす  $\bar{y}_j \in R$  が存在する.

次に不完全競争企業の価格予想について述べる. 市場価格  $p$  が与えられた時, 企業は自らの生産量に応じてその価格がどの程度変動するかを主観的に予想する. その予想の仕方は Sakane (2011) で詳細に述べられている関数

$$\varphi_j : (-\infty, \bar{y}_j) \rightarrow (-1, \infty)$$

で表現できる. この関数については以下の仮定を設定する.

(A. 3) 任意の  $j \in J$  について, (i)  $\varphi_j : (-\infty, \bar{y}_j) \rightarrow (-1, \infty)$  は線形である ; (ii) 条件  $\varphi_j'(y_j) < 0$  が任意の  $y_j \in (-\infty, \bar{y}_j)$  について成り立つ.

不完全競争企業の利潤関数は

$$(1) \quad \pi_j(p) := \max_{w_j} (1 + \varphi_j(f_j(w_j))) p_j f_j(w_j) - \sum_{m \in J-j} p_m w_{jm}$$

によって定義される. 利潤最大化問題の 1 階条件は,

$$(2) \quad p_j f_j^m (1 + \varphi_j(y_j) + \varphi_j'(y_j) y_j) - p_m = 0 \text{ for any } m \in I-j;$$

さらに 2 階条件は, 関数  $p_j f_j^m (1 + \varphi_j(f_j(w_j)) + \varphi_j'(y_j) f_j(w_j)) - p_m$  のヘシアン行列の負値定符号性によって与えられる.  $\eta_j := 1 + \varphi_j(y_j) (1 + \sigma_j(y_j))$  と定義すれば, ヘシアン行列は以下のように定義される.

$$H_j := \left( p_j \eta_j f_j^{mn} + 2 p_j \varphi_j'(y_j) f_j^m f_j^n, m \in I-j, n \in I-j \right).$$

$H_j$  が負値定符号であることは, Sakane (2011) の Lemma によって証明されている. 要素需要関数を  $w_j(p) := (w_{j1}(p), \dots, w_{j,j-1}(p), w_{j,j+1}(p), \dots, w_{js}(p))$  ; 供給関数を  $y_j(p) := f_j(w_j(p))$  によって定義すれば, 超過需要関数は

$$z_j(p) := x_j(p) + \sum_{n \in J-j} w_{nj}(p) - y_j(p) \text{ for any } j \in J \text{ and}$$

$$z_s(p) := x_s(p) + \sum_{j \in J} w_{js}(p) - \bar{x}_s$$

と表される, ここで  $\bar{x}_s$  は消費者の初期賦存である.

### 3 均衡の大域的漸近安定性

不完全競争経済の均衡は、任意の  $j \in J$  について  $\varphi_j(y_j(p^*)) = 0$  そして任意の  $j \in I$  について  $z_j(p^*) = 0$  が成立する配分のことである。関数  $y_j$  は 0 次同次であることが Sakane (2011) によって示されているので、仮定 (A. 1) (ii) を勘案すると、価格を正規化することができる。これ以後、任意の  $j \in J$  について、 $j$  番目の生産物の価格  $p_j$  は  $s$  番目の numéraire 財との相対価格  $p_j/p_s$  を表すものとする。さらに  $p$  は相対価格ベクトル  $(p_1, \dots, p_{s-1})$  を表すものとする。任意の  $j \in J$  について、もし  $z_j(p^*) = 0$  が成り立つならば、ワルラス法則によって  $z_s(p^*) = 0$  も成立する。従って我々は、 $s$  番目の生産要素以外の  $s-1$  個の生産物の超過需要およびそれらの予想価格について、以下の調整過程を考えればよいことになる。

$$(3) \quad \frac{dp_j(t)}{dt} = \varphi_j^*(p) + z_j(p) \quad (\forall j \in J)$$

ここで  $\varphi_j^*(p) := \varphi_j(y_j(p))$  である。

**定理.** 不完全競争経済の一般均衡は、仮定 (A. 1)–(A. 3) の下、大域的に漸近安定である。

**証明.**  $V$  を以下で定義される関数とする：

$$V(p) := \frac{1}{2} \sum_{j \in J} (p_j - p_j^*)^2.$$

$V$  が Lyapunov 関数であれば、つまり以下の条件 (i)–(iii) を満たせば、所望の結論を得る（例えば Agarwal and O'Regan (2008)）：

- (i) 均衡価格  $p^*$  では、 $V(p^*) = 0$  が成り立つ；
- (ii) 任意の価格  $p \neq p^*$  について、 $V(p) > 0$  が成り立つ；
- (iii) 任意の価格  $p \neq p^*$  について、 $\frac{dV(p(t))}{dt} < 0$  が成り立つ。

条件 (i) と (ii) が満たされることは明らかである。条件 (iii) の証明。先の定義 (3) とワルラス法則によって以下が成り立つ：

$$\frac{dV(p(t))}{dt} = \sum_{j \in J} (p_j - p_j^*) \varphi_j^*(p) - \sum_{j \in J} p_j^* z_j(p).$$

初めに任意の  $j \in J$  について、条件  $(p_j - p_j^*) \varphi_j^*(p) \leq 0$  が成り立つことを証明する。以下の条件

$$\frac{\partial \varphi_j^*(p)}{\partial p_j} < 0 \quad (\forall p \in R^{s-1})$$

が、Sakane (2011) において証明されていることに注意しておく。すると仮定 (A. 3) の下で、 $p_j^* < p_j$  となる任意の価格  $p \in R^{s-1}$  について、

$$\frac{\partial \varphi_j^*(p)}{\partial p_j} = \frac{\varphi_j^*(p) - \varphi_j^*(p^*)}{p_j - p_j^*} < 0$$

が成立する。均衡価格  $p^*$  の下では  $\varphi_j^*(p^*) = 0$  が成り立つので、 $\varphi_j^*(p) < 0$  が得られる。同様の方法によって、 $p_j^* < p_j$  となる任意の価格  $p \in R^{s-1}$  について、 $\varphi_j^*(p) > 0$  が得られる。さらに  $p_j = p_j^*$  であったとすると、明らかに  $(p_j - p_j^*)\varphi_j^*(p) = 0$  である。したがって  $\sum_{j \in J} (p_j - p_j^*)\varphi_j^*(p) < 0$  が成り立つ。次に、Arrow *et al.* (1959)における定理3を適用することによって  $\sum_{j \in J} p_j^* z_j(p) > 0$  である。したがって先の条件(iii)が成り立つ。

### 参考文献

- Agarwal, R. P and D. O'Regan. (2008): *An introduction to ordinary differential equations*. Springer.
- Allingham, M. G.(1976): "Stability of monopoly," *Econometrica*, 44, No.3, 601-602.
- Arrow, K. J., H. D. Brock and L. Hurwicz. (1959): "On the stability of the competitive equilibrium, II," *Econometrica*, 27, No.1, 82-109.
- Fisher, F. M.(1970): "Quasi-competitive price adjustment by individual firms: a preliminary paper," *Journal of Economic Theory*, 2, 195-206.
- Fisher, F. M.(1972): "On price adjustment without an auctioneer," *Review of Economic Studies*, 39, 1-16.
- Negishi, T.(1961): "Monopolistic competition and general equilibrium," *Review of Economic Studies*, 28, 196-201.
- Sakane, H.(2011): "Local asymptotic stability of a general equilibrium for an economy under imperfect competition," 関西大学『経済論集』, 第??巻第?号, 196-201.

