死亡確率・年金と最適消費算定

著者	村田 安雄, 小林 かおり
雑誌名	關西大學經済論集
巻	50
号	4
ページ	337-350
発行年	2001-03-15
その他のタイトル	Probability of Death, Annuties, and Optimal Consumption Plans
URL	http://hdl.handle.net/10112/4483

論　文

死亡確率・年金と最適消費算定

村田安雄
小林かおり

要約：本稿の第一の問題は、年齢と共に増大する死亡確率を具体的な理論モデルで表すことで、それに基づいて平均余命と最適消費を導出する。最初に Blanchard 型の分析に我々のモデル化した死亡確率を導入して、期待効用の通時的極大を行い、最適消費を算定する。ついで同様の算定を離散時間の場合について行い、有限の生存年齢を想定した時の定額年金受給者の最適消費算定式を導出し、その式に現実的なパラメータの数値を代入して、10 年ごとの最適消費経路を算定する。

キーワード：平均余命；ガンマ関数；期待効用；ダイナミック・プログラミング
経済学文献季報分類番号：02-22；02-33

1　はじめに

人間の死亡確率をすべての年齢の個人について一定であると想定した Blanchard (1985) の分析手法は、Buiter(1988)、村田 (1992)、Saint-Paul(1992) において継承されて、マクロ経済学のミクロ的基礎として広く認知されている。しかし現実統計では年齢と共に死亡確率は上昇していて、この現象を理論化する研究はまだ行われていない。そこでの問題は如何なる形の現実的死亡確率の想定が、理論的分析において操作可能であるかということである。本稿は Blanchard 以来の分析に従いながら、年齢に応じて高まる死亡確率の一つの具体的形を提案して、平均余命や最適消費を理論的に導出する。まず第 2 節では我々の考案した死亡確率の形を示して、それが現実対応的で、また理論分析に耐えうることを明らかにする。特にこの形の死亡確率による平均余命は年齢と共に短くなることが証明される。つぎに第 3 節では、我々の提唱する死亡確率を組み込んだ期待効用の通時的極大を行って、最適消費を算定するが、その際に Blanchard の伝統に沿って、資産年金保険の存在を想定する。そして第 4 節は、離散時間の場合に同様の最適消費を算定する。そこでは有限の生存年齢を考え、退職後で定額年金を受給される個人について、通時的な期待効用の極大化から最適消費が算定される。最後に、この算定式に対して、実際的な数値のパラメータを適用することによって、10 年ごとの最適消費経路を算定するのが第 5 節の内容であって、異なる年齢帯の消費経路はどのように違うかが明らかにされる。

2　死亡確率と平均余命

この節では、はじめに生存関数 (survivor function) についての数理統計学の基礎知識が整理され、ついでハザード関数 (hazard function) に対し、我々が死亡確率として適当と考える特定化を行い、それによって平均余命 (expected remaining life) の大きさはガンマ関数との積の形に表現できることが明らかにされる。

いま人間の死亡する時点を T と表し、T が t の時点以降に来る確率を $F(t)$ と記そう。これを言い換えると、当面の人間が t 時以上生存する確率であり、つぎのように定義される。

$$F(t) \equiv P_r(T \geq t) \tag{1}$$

この F は生存関数と呼ばれ、現時点を0時点と考えて、

$$F(0) = 1 \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0 \tag{3}$$

を満たすことは自明であろう。$F(t)$ に対応する確率密度関数 $f(t)$ は任意の微小の正値 Δt について、下記のように定義される。

$$f(t) \equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_r(t \le T < t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{-dF(t)}{dt} \ (\ge 0) \tag{4}$$

そして (4) 式から逆に

$$F(t) = \int_t^\infty f(s)ds \tag{4'}$$

が導かれる。

つぎに t 時以上に生存するということを条件として、ちょうど t 時に死亡する確率を $\eta(t)$ と記すと、任意の微小の正値 Δt について、

$$\eta(t) \equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_r(t \le T < t + \Delta t \mid T \ge t)}{\Delta t} \tag{5}$$

と定義されて、η はハザード関数と言われる。(5) 式の条件付き確率から

$$\eta(t) = \frac{f(t)}{F(t)} \tag{6}$$

の式が成立する。(6) 式はつぎのように意味付けされる。

$$\begin{pmatrix} t\text{ 以上生きた後に} \\ t\text{ 時に死ぬ確率} \end{pmatrix} = \frac{(\text{ちょうど } t \text{ 時に死ぬ確率})}{(t\text{ 以上生きる確率})} \tag{6'}$$

(4) 式と (6) 式より

$$\eta(t) = \frac{1}{F(t)} \frac{-dF(t)}{dt} = \frac{-d\log F(t)}{dt} \tag{7}$$

が得られる。(7) 式を積分して、(2) 式を考慮すると、

$$\int_0^t \eta(z)dz = -\log F(t) \tag{8}$$

となり、これは下記のように書き換えられる。

$$F(t) = e^{-\int_0^t \eta(z)dz} \tag{8'}$$

最後に (8′) 式を (6) 式へ代入して、

$$f(t) = \eta(t)e^{-\int_0^t \eta(z)dz} \tag{9}$$

が導出される。(以上は主として Kalbfleish-Prentice (1980), pp.5-6 を参照。)

さて時点を年齢と読みかえると、$F(t)$ は t 才以上生存する確率であり、$f(z)$ はちょうど z 才までしか生存しない確率を示す。t 才の人の平均余命 $\xi(t)$ とは、t 才以上生存するとの条件の下で、t 才以上の任意の

年齢 s までしか生存しない確率 $f(s)$ に $(s-t)$ を乗じたものを、t 以上のすべての年齢にわたって合計した値である。すなわち

$$\xi(t) \equiv \int_t^{\infty} (s-t)\frac{f(s)}{F(t)}ds \tag{10}$$

いま部分積分を施すと、(4) 式と (3) 式を順次に考慮して、

$$\begin{aligned}\int_t^{\infty}(s-t)f(s)ds &= [-(s-t)F(s)]_t^{\infty} + \int_t^{\infty} F(s)ds \\ &= \int_t^{\infty} F(s)ds\end{aligned}$$

が得られる。そして (8′) 式を代入すると、(10) 式はつぎのようになる。

$$\xi(t) = \frac{\int_t^{\infty} e^{-\int_0^s \eta(z)dz}ds}{e^{-\int_0^t \eta(z)dz}} \tag{11}$$

t 才まで生存した後にその時点で死亡する確率を表す $\eta(t)$ が、t の上昇につれて小さくなるように、それを特定化するのに、我々は

$$\eta(t) = pt^a \qquad (0 < p < 1\,, \quad 0 < a < 1) \tag{12}$$

と想定する。この特定は今後の諸式の展開に複雑さを加えるが、現実的接近として、従来の $\eta(t) = p$ より大いに優れている。数値例として

$$p = 0.08\,, \qquad a = 0.5 \tag{13}$$

の場合には、$\eta(9) = 0.24$、$\eta(36) = 0.48$、$\eta(49) = 0.56$、$\eta(64) = 0.64$、$\eta(81) = 0.72$ となる。

いま生まれたばかりの人の平均余命 $\xi(0)$ を (11) 式によって算定するとつぎのようになる。

$$\xi(0) = \int_0^{\infty} e^{\frac{-p}{1+a}s^{1+a}}ds \tag{14}$$

ここで変数変換をして、

$$x = \frac{p}{1+a}s^{1+a} \tag{15}$$

と置くと、$dx = ps^a ds$ であるので、

$$\begin{aligned}ds &= \frac{1}{p}s^{-a}dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1+a}{p}x\right)^{\frac{-a}{1+a}}dx \\ &= [(1+a)^a p]^{\frac{-1}{1+a}} x^{\frac{-a}{1+a}}dx\end{aligned} \tag{15′}$$

となり、これを (14) 式へ代入して、下記のように整理される。

$$\xi(0) = [(1+a)^a p]^{\frac{-1}{1+a}} \int_0^{\infty} e^{-x}x^{\left(\frac{1}{1+a}-1\right)}dx \tag{16}$$

ここで $k \equiv 1/(1+a)$ と置くと、

$$\Gamma(k) \equiv \int_0^{\infty} e^{-x}x^{k-1}dx \qquad (k > 0) \tag{17}$$

はガンマ関数と呼ばれて、これは

$$\Gamma(k)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{y}\right)^{k-1}dy \tag{17'}$$

の形に解くことができる (付録Aを参照)。 ちなみに (13) 式の数値例では $\xi(0)$ の値はつぎのようになる。

$$\xi(0)\fallingdotseq 4.7\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

a の値が大きいほど、つまり年齢の上昇に伴って死亡確率が一層高まるように特定化するほど、$k-1(<0)$ の絶対値は大きくなって、$\Gamma(k)$ は減少する。また (16) 式右辺の $[(1+a)^a p]^{-1/(1+a)}$ の a についての偏微係数は負値をとる。かくして a 値の増大は平均余命 $\xi(0)$ を短縮させせることが分かる。

任意の t 才の人の平均余命 $\xi(t)$ を同じように導出すると下記のようになる。

$$\xi(t)=\left[\frac{e^{pt^{1+a}}}{(1+a)^a p}\right]^{\frac{1}{1+a}}\int_t^\infty e^{-x}x^{\left(\frac{1}{1+a}-1\right)}dx \tag{18}$$

$\xi(t)$ についても a の値の増大が平均余命を短縮させる効果をもつことは、ほとんどの t について言える (付録Bを参照)。

3　資産年金保険のある個人の最適消費算式

代表的消費者が自分の将来効用を極大化するように各時点の消費を決定するものとしよう。その計画のスタート時点を t として、現在は s 時点に居ると考えるか、または時点を年齢に読み替えて、現在 s 才の人が $t(>s)$ 才以降の将来の全期待効用 U_{ts} を極大化すると考えてもよい。我々は後者の考えをとるが、年齢は連続時間の正数とする。

いま $z>s$ として、現在 s 才の代表的消費者が z 才の時に消費する量を $c(z,s)$ と記そう。θ を消費の時間割引率 (定数) として、各時点の効用を $c(z,s)$ の対数と想定すると、U_{ts} はつぎのように定義される。

$$U_{ts}\equiv E\int_t^\infty \log c(z,s)\cdot e^{-\theta(z-t)}dz \tag{19}$$

ここに E は当面の個人の生存確率を考慮に入れた期待値を表す。それを明示するために、まず t 才まで生きるとの条件の下で、さらに z 才まで生きるという条件付き確率 $F(z)/F(t)$ を、t 才以降の全期間にわたって、各 z 才の効用に乗ずれば、期待効用の総計としての U_{ts} が得られる。(8′) 式の F の関数形へ、(12) で特定化された $\eta(z)$ を代入すると、

$$F(t)=e^{-\int_0^t p\tau^a d\tau}=e^{-\frac{p}{1+a}t^{1+a}} \tag{8''}$$

となるので、

$$\begin{aligned}U_{ts}&=\int_t^\infty\frac{F(z)}{F(t)}\log c(z,s)\cdot e^{-\theta(z-t)}dz\\&=\int_t^\infty \log c(z,s)\cdot e^{\left[-\theta(z-t)-\frac{p}{1+a}\left(z^{1+a}-t^{1+a}\right)\right]}dz\end{aligned} \tag{20}$$

が得られる。

現在 s 才の人が将来の z 才の時に得る労働所得を $y(z,s)$ とし、そのときの金融資産を $w(z,s)$ と記そう。そしてつぎのような資産からの年金保険制度の存在を想定しよう。すなわち各人はその死亡時に全金融資産 w を保険会社へ移譲するという契約をするが、同時にその代わりに生存中は t 才以降、毎 z 才ごと

に $pz^a w(z,s)$ の年金を受けとることを契約する。この場合には当人の期待する受け取り年金総額 (Ω) は、$w(z,s)=w$(一定) と想定して、

$$\Omega=\int_t^{\infty}\frac{F(z)}{F(t)}pz^a w dz=w \tag{21}$$

となり、保険会社の収支は大体において損得のない状態にある (付録Cを参照)。

金融資産は毎時 r の利子率で金利をもたらすので、当面の個人の z 才の予算制約式は、上記の年金も含めてつぎのように表される。

$$\frac{dw(z,s)}{dz}=\{r+pz^a\}\,w(z,s)+y(z,s)-c(z,s) \tag{22}$$

そしてこの個人は (22) 式の制約の下に、(20) 式の U_{ts} を極大化するように $c(t,s)$ を算定したい。そのための方法は、まず現在価値ハミルトニアン (H) を定義して、下記の三つの必要条件を満たす $c(z,s)$ を求めればよい。(Kamien-Schwartz (1981), p.152 を参照。) H はつぎのようになる。

$$H\equiv\log c(z,s)+\lambda(z)\left[(r+pz^a)w(z,s)+y(z,s)-c(z,s)\right]$$

そして必要条件は下記の (Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ) である。

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & \dfrac{\partial H}{\partial c}=0\\
(\mathrm{II}) & -\dfrac{\partial H}{\partial w}\cdot e^{\left[\frac{p}{1+a}(t^{1+a}-z^{1+a})-\theta(z-t)\right]}=\dfrac{d\{\lambda(z)\cdot\exp[\cdots]\}}{dz}\\
(\mathrm{III}) & \lim\limits_{z\to\infty}\lambda(z)w(z,s)\cdot\exp[\cdots]=0
\end{array}$$

ここに c は $c(z,s)$ を、w は $w(z,s)$ を、そして $\exp[\cdots]$ は (Ⅱ) の左辺にある指数関数と同じものを意味する。

(Ⅰ) の条件より次式が得られる。

$$c^{-1}=\lambda \tag{23}$$

(23) 式の両辺を z について微分すると、

$$-\frac{\dot c}{c^2}=\dot\lambda \tag{23$'$}$$

になる。つぎに (Ⅱ) の条件式を算定した後に、両辺を $\exp[\cdots]$ でわって、つぎのように整理する。

$$(\theta-r)\lambda=\dot\lambda \tag{24}$$

(24) 式へ (23) 式と (23$'$) 式を代入して、

$$\frac{\dot c}{c}=r-\theta \tag{25}$$

が導出される。(25) 式の両辺を t から任意の $z(>t)$ まで定積分すると、

$$\log\frac{c(z,s)}{c(t,s)}=(r-\theta)(z-t)$$

となり、これを下記のように書き換える。

$$c(z,s)=c(t,s)e^{(r-\theta)(z-t)}\qquad(z>t) \tag{26}$$

他方、(22) 式は $w(z,s)$ についての非斉次の線形微分方程式であって、その解はつぎのようになる (付録Dを参照)。

$$w(t,s) = -\int_t^{\infty} \{y(z,s) - c(z,s)\} e^{\left[-\int_t^z (r+p\tau^a)d\tau\right]} dz \tag{27}$$

ただしここでは

$$\lim_{z\to\infty} w(z,s) e^{\left[-\int_t^z (r+p\tau^a)d\tau\right]} = 0 \tag{28}$$

が満たされていることを必要とするが、それは前述の (Ⅲ) の条件によって保証されることを以下に証明しよう。

[証明]

$$\int_t^z (r + p\tau^a) d\tau = r(z-t) + \frac{p}{1+a}\left(z^{1+a} - t^{1+a}\right) \tag{29}$$

であるので、(28) 式左辺は

$$\lim_{z\to\infty} w(z,s) e^{\left[-r(z-t) - \frac{p}{1+a}\left(z^{1+a}-t^{1+a}\right)\right]}$$

と書き換えられる。他方、(Ⅲ) の条件式は (23) 式を考慮に入れて、

$$\lim_{z\to\infty} \frac{w(z,s)}{c(z,s)} e^{\left[-\theta(z-t) - \frac{p}{1+a}\left(z^{1+a}-t^{1+a}\right)\right]} = 0$$

になる。ここへ (26) 式を代入すると、$c(t,s)$ は不変であるので、

$$\lim_{z\to\infty} w(z,s) e^{\left[-r(z-t) - \frac{p}{1+a}\left(z^{1+a}-t^{1+a}\right)\right]} = 0 \tag{28'}$$

が得られ、(28′) 式は (28) 式の別表現である。　　[証明了]

さて、s 才の人の $t(>s)$ 才における人的資産は $h(t,s)$ と記され、

$$h(t,s) \equiv \int_t^{\infty} y(z,s) e^{\left[-\int_t^z (r+p\tau^a)d\tau\right]} dz \tag{30}$$

と定義される。したがって (27) 式は

$$w(t,s) + h(t,s) = \int_t^{\infty} c(z,s) e^{\left[-\int_t^z (r+p\tau^a)d\tau\right]} dz$$

と書き換えられ、ここへ (26) 式と (29) 式を代入すると、

$$c(t,s) = \{w(t,s) + h(t,s)\} \left[\int_t^{\infty} e^{\left\{-\theta(z-t) - \frac{p}{1+a}\left(z^{1+a}-t^{1+a}\right)\right\}} dz\right]^{-1} \tag{31}$$

が導出される。この (31) 式は、現在 s 才の人が t 才に最適消費計画をスタートさせる場合の、t 才での最適消費算式である。

4　定額年金の受給者の最適消費算式 (離散系)

この節では年齢を離散的な正整数とする場合に、各年齢での最適消費が算定される。いま s 才の時を0時点 (スタート時点) として将来にわたる自分の期待効用の総計を極大化するが、その計画を s 才以前

に立案すると考えて、0年から最終年 T までの総期待効用をつぎのように定義しよう。(Kotlikoff-Spivak (1981) の (4) 式と同じ。)

$$EU \equiv \sum_{t=0}^{T} P_t \rho^t \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{32}$$

ここに $\rho \equiv (1+\theta)^{-1}$ は1年ごとの時間割引率で、t 年の効用が $C_t^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ と表されている。そして t 年では $t+s$ 才となるので、

$$P_t \equiv F(t+s) = e^{\left[\frac{-p}{1+a}(t+s)^{1+a}\right]} \tag{33}$$

が $t+s$ 才まで生存する確率を示す ((8″) 式を参照)。なお γ が限界効用の弾力性および相対的危険回避度を意味することは周知であろう。

当面の個人は、退職後で毎年 Z の定額年金を受け取るものと想定して、i 年に保有する金融資産を W_i と記し、年金利を r として、$R \equiv 1+r$ と書くと、労働所得が無い状態であるので、t 年の予算制約式として

$$W_t = (W_{t-1} - C_{t-1} + Z)R \tag{34}$$

が $t = 1, 2, \cdots, T, T+1$ について成立する。いま (34) 式右辺の W_{t-1} へ (34) 式での t を $t-1$ で置き換えた式を代入すると、

$$W_t = W_{t-2}R^2 - \sum_{\tau=1}^{2} C_{t-\tau}R^{\tau} + Z\sum_{\tau=1}^{2} R^{\tau}$$

になる。このような置換と代入を順次に $t-2, t-3, \cdots, 1$ まで行うと、

$$\begin{aligned} W_t &= W_0 R^t - \sum_{\tau=1}^{t} C_{t-\tau}R^{\tau} + Z\sum_{\tau=1}^{t} R^{\tau} \quad (t = 1, 2, \cdots, T, T+1) \\ &= W_0 R^t - \sum_{i=0}^{t-1} C_i R^{t-i} + Z\sum_{i=0}^{t-1} R^{t-i} \end{aligned} \tag{34'}$$

が得られ、(34′) 式の両辺を R^t で除して、次式が導出される。

$$\sum_{i=0}^{t-1} C_i R^{-i} = W_0 - W_t R^{-t} + Z\sum_{i=0}^{t-1} R^{-i} \qquad (t = 1, 2, \cdots, T, T+1)$$

ここで $t = T+1$ と置き、遺産を残さないものと想定するので、$W_{T+1} = 0$ であり、上式はつぎのように変形する。(この代わりに、一定額の遺産を残すと想定すると、以下の分析に若干の変更を追加すればよい。)

$$\sum_{i=0}^{T} C_i R^{-i} = W_0 + Z\sum_{i=0}^{T} R^{-i} \tag{35}$$

この (35) 式は我々の最適消費計画の全期間にわたる予算制約式を表す。

本節の課題は (35) 式の制約の下に、(32) 式の総期待効用を極大化するように、各年の消費を算定することである。この極大問題はダイナミック・プログラミングの手法にしたがって、まず最終年の T 年に生存しているとの前提で、$C_T \leq W_T + Z$ と $C_T \geq 0$ の制約の下に、T 年の効用 $C_T^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ を極大化する消費は

$$C_T = W_T + Z \tag{36.0}$$

となる。ゆえに T 年の価値関数は下記のようになる。

$$V(W_T)=\frac{(W_T+Z)^{1-\gamma}}{1-\gamma}=\frac{C_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{37.0}$$

つぎに $T-1$ 年に生存しているとの前提で、予算制約式

$$W_T=(W_{T-1}-C_{T-1}+Z)R \tag{38.1}$$

の制約の下に、この年の価値関数

$$V(W_{T-1})=\max_{C_{T-1}}\left\{\frac{C_{T-1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\rho\frac{P_T}{P_{T-1}}V(W_T)\right\} \tag{37.1}$$

を求める。この問題の極値条件は (38.1) の W_T を (37.1) 式右辺へ代入してから、その式の { } 内を C_{T-1} で偏微分したものをゼロと置けば求められる。これを整理して、C_{T-1} について解いて

$$C_{T-1}=\frac{W_{T-1}+Z(1+R^{-1})}{1+\{\rho R^{1-\gamma}(P_T/P_{T-1})\}^{1/\gamma}} \tag{36.1}$$

を得る (付録Eを参照)。なお (P_T/P_{T-1}) は (33) 式を参照して、$T+s-1$ 才以上生きるとの条件付きで、つぎの $T+s$ 才まで生きる確率を表す。(36.1) 式の C_{T-1} を (37.1) 式へ代入して整理した結果はつぎの通りである。

$$V(W_{T-1})=v_{T-1}\frac{(W_{T-1}+Z(1+R^{-1}))^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{39.1}$$

ここに

$$v_{T-1}\equiv\left[1+\{\rho R^{1-\gamma}(P_T/P_{T-1})\}^{1/\gamma}\right]^{\gamma} \tag{40.1}$$

と置いている。

さらに1年前に戻って、$T-2$ 年に生存しているとの前提で、予算制約式

$$W_{T-1}=(W_{T-2}-C_{T-2}+Z)R \tag{38.2}$$

の制約の下に、この年の価値関数

$$V(W_{T-2})=\max_{C_{T-2}}\left\{\frac{C_{T-2}^{1-\gamma}}{1-\gamma}+\rho\frac{P_{T-1}}{P_{T-2}}V(W_{T-1})\right\} \tag{37.2}$$

を求めると、以前の同様の手順で C_{T-2} がつぎのように導出される。

$$C_{T-2}=\frac{W_{T-2}+Z(1+R^{-1}+R^{-2})}{1+\{\rho R^{1-\gamma}v_{T-1}(P_{T-1}/P_{T-2})\}^{1/\gamma}} \tag{36.2}$$

そして (36.2) 式の C_{T-2} を (37.2) 式へ代入すると次式が得られる。

$$V(W_{T-2})=v_{T-2}\frac{(W_{T-2}+Z(1+R^{-1}+R^{-2}))^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{39.2}$$

ここに

$$v_{T-2}\equiv\left[1+\{\rho R^{1-\gamma}v_{T-1}(P_{T-1}/P_{T-2})\}^{1/\gamma}\right]^{\gamma} \tag{40.2}$$

と置いている。

(36.0) 式の C_T、(36.1) 式の C_{T-1}、および (36.2) 式の C_{T-2} の系列を伸ばすと、一般に C_t の式はつぎのようになることが分かる。

$$C_t = \left(W_t + Z\sum_{i=0}^{T-t} R^{-i}\right) P_t^{\frac{1}{\gamma}} \left[\sum_{i=0}^{T-t}\left(\rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)^i P_{t+i}^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{-1} \tag{41}$$

そして価値関数の (37.0) 式を (37.1) 式へ、さらに (37.1) 式を (37.2) 式へそれぞれ代入して、両辺に P_{T-2} を乗じると、

$$P_{T-2}V(W_{T-2}) = \frac{C_{T-2}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \rho P_{T-1}\frac{C_{T-1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \rho^2 P_T \frac{C_T^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{42}$$

を得る。ただしここでの消費は上記の極大効用をもたらす消費を意味する。(42) 式を伸長すると、最終的に

$$P_0 V(W_0) = \sum_{t=0}^{T} P_t \rho^t \frac{C_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{42$'$}$$

となって、(42′) 式は実は (32) 式と同一形になる。ただし (42′) 式の C_t が各段階での極大効用をもたらす消費である点で、(32) 式と違っている。$V(W_0)$ は 0 年に生存しているとの前提での価値関数で、それに生存確率 $P_0 = F(s)$ を乗じて、期待効用へ変換したものが (42′) 式である。またその際、各期で予算制約式 (34) 式はすべての年について成立しているので、全期間の予算制約式 (35) は満たされている。かくして (41) 式で表される消費 C_t は (35) 式の制約の下に (32) 式の総期待効用を極大化する最適消費を意味する。

(41) 式の C_t を初期資産 W_0 で表現するには、その式の右辺の W_t へ (34′) 式を代入して、

$$C_t = \left\{W_0 R^t + \sum_{j=0}^{t-1}(Z - C_j)R^{t-j} + Z\sum_{i=0}^{T-t} R^{-i}\right\} P_t^{\frac{1}{\gamma}} \left[\sum_{i=0}^{T-t}\left(\rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)^i P_{t+i}^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{-1} \tag{43}$$

と書き換えた式において、$t = 0, 1, 2, \cdots, T$ の順に C_t を求めていけばよい。すなわち (33) 式も考慮に入れて、各年の最適消費の算定式はつぎのようになる。

$$C_0 = \left(W_0 + Z\sum_{i=0}^{T} R^{-i}\right)\left[\sum_{i=0}^{T}\left(\rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)^i \exp\left\{\frac{p(s^{1+a} - (i+s)^{1+a})}{\gamma(1+a)}\right\}\right]^{-1} \tag{44.0}$$

$$\begin{aligned} C_1 = &\left\{(W_0 + Z - C_0)R + Z\sum_{i=0}^{T-1} R^{-i}\right\} \\ &\times \left[\sum_{i=0}^{T-1}\left(\rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)^i \exp\left\{\frac{p((s+1)^{1+a} - (i+s+1)^{1+a})}{\gamma(1+a)}\right\}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{44.1}$$

$$\begin{aligned} C_2 = &\left\{(W_0 + Z - C_0)R^2 + (Z - C_1)R + Z\sum_{i=0}^{T-2} R^{-i}\right\} \\ &\times \left[\sum_{i=0}^{T-2}\left(\rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)^i \exp\left\{\frac{p((s+2)^{1+a} - (i+s+2)^{1+a})}{\gamma(1+a)}\right\}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{44.2}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} C_t = &\left\{(W_0 + Z - C_0)R^t + \sum_{j=1}^{t-1}(Z - C_j)R^{t-j} + Z\sum_{i=0}^{T-t} R^{-i}\right\} \\ &\times \left[\sum_{i=0}^{T-t}\left(\rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)^i \exp\left\{\frac{p((s+t)^{1+a} - (i+s+t)^{1+a})}{\gamma(1+a)}\right\}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{44.t}$$

$$\vdots$$

$$C_{T-1} = \left\{ (W_0 + Z - C_0)R^{T-1} + \sum_{j=1}^{T-2} (Z - C_j)R^{T-1-j} + Z(1 + R^{-1}) \right\}$$

$$\times \left[1 + \left(\rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} \right) \exp \left\{ \frac{p((s + T - 1)^{1+a} - (s + T)^{1+a})}{\gamma(1 + a)} \right\} \right]^{-1} \tag{44.T-1}$$

$$C_T = (W_0 + Z - C_0)R^T + \sum_{j=1}^{T-1} (Z - C_j)R^{T-j} + Z \tag{44.T}$$

5　異なる年齢帯の最適消費パターン

前節で導出された最適消費の算定式によって、適当な数値例を使って、最適消費の大きさを求めよう。まず死亡確率に係わる p と a の値を (13) で示したもの、すなわち $p = 0.08$、$a = 0.5$ に設定する。つぎに年利子率 r を2％とし、1ヵ年の時間割引率 θ を3％とすると、R と ρ はつぎの数値になる。

$$R = 1.02\ , \quad \rho = (1.03)^{-1}$$

各年の効用 $\left(C_t^{1-\gamma}/(1-\gamma)\right)$ における γ の値は、田近・林 (1996) を参考にして、若干の試行錯誤の後に、$\gamma = 3$ に定めることにした。

計画期間として、最初に60才から70才までの10年間を想定し、後に65才から75才までの10年間との最適消費額の違いを比較してみよう。いずれの場合も、初期資産 $W_0 = 1000$ 万円と年金 $Z = 100$ 万円を想定する。以上の数値を (44.0)～(44.T) の各式へ挿入して計算すると、表1の結果が得られる。ここでは $T = 10$ である。

表 1: 最適消費

(単位：万円)

	60才～70才の場合	65才～75才の場合
C_0	451.6	462.3
C_1	365.8	371.3
C_2	295.8	297.8
C_3	238.8	239.8
C_4	192.5	190.2
C_5	154.9	151.8
C_6	124.4	121.0
C_7	99.8	96.2
C_8	79.9	76.4
C_9	63.8	60.6
C_{10}	50.9	48.0
計	2118.2	2115.4

（注：$W_0 = 1000,\quad Z = 100,\quad p = 0.08,\quad a = 0.5,$
$r = 0.02,\quad \theta = 0.03,\quad \gamma = 3.$）

いずれの年齢帯の場合も、最適消費は年齢が増すほど少ない額になっているが、年齢帯がより高齢である場合に、その程度は一層大きくなっている。その結果、資産に対する利子収入の全期間を通しての総額

は、65 才〜75 才の場合の方が 60 才〜70 才の場合よりも少なくなり、最適消費の総額もそれに見合っている。かくして年齢差と年齢帯の差が、最適消費に影響することが分かる。

最後に年金 Z の一定額変化が最適消費に及ぼす効果を 60 才〜70 才の年齢帯の場合について算定しよう。その算定式は (44.0)〜(44.T) の各式を Z で微分したつぎの諸式である。

$$\frac{dC_0}{dZ} = \sum_{i=0}^{T} R^{-i}\left[\sum_{i=0}^{T} Q^i\cdot\exp\left\{\frac{p\left(s^{1+a}-(i+s)^{1+a}\right)}{\gamma(1+a)}\right\}\right]^{-1} \tag{45.0}$$

$$\frac{dC_1}{dZ} = \left(R+\sum_{i=0}^{T-1} R^{-i} - \frac{dC_0}{dZ}R\right) \times\left[\sum_{i=0}^{T-1} Q^i\cdot\exp\left\{\frac{p\left((s+1)^{1+a}-(i+s+1)^{1+a}\right)}{\gamma(1+a)}\right\}\right]^{-1} \tag{45.1}$$

$$\frac{dC_2}{dZ} = \left(R^2+R+\sum_{i=0}^{T-2} R^{-i} - \frac{dC_0}{dZ}R^2-\frac{dC_1}{dZ}R\right) \times\left[\sum_{i=0}^{T-2} Q^i\cdot\exp\left\{\frac{p\left((s+2)^{1+a}-(i+s+2)^{1+a}\right)}{\gamma(1+a)}\right\}\right]^{-1} \tag{45.2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dC_t}{dZ} = \left(\sum_{j=1}^{t} R^j+\sum_{i=0}^{T-t} R^{-i} - \sum_{i=0}^{t-1}\frac{dC_i}{dZ}R^{t-i}\right) \times\left[\sum_{i=0}^{T-t} Q^i\cdot\exp\left\{\frac{p\left((s+t)^{1+a}-(i+s+t)^{1+a}\right)}{\gamma(1+a)}\right\}\right]^{-1} \tag{45.t}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dC_{T-1}}{dZ} = \left(\sum_{j=1}^{T-1} R^j+\sum_{i=0}^{1} R^{-i} - \sum_{i=0}^{T-2}\frac{dC_i}{dZ}R^{T-1-i}\right) \times\left[1+Q\cdot\exp\left\{\frac{p\left((s+T-1)^{1+a}-(s+T)^{1+a}\right)}{\gamma(1+a)}\right\}\right]^{-1} \tag{45.T-1}$$

$$\frac{dC_T}{dZ} = \sum_{j=1}^{T} R^j + 1 - \sum_{i=0}^{T-1}\frac{dC_i}{dZ}R^{T-i} \tag{45.T}$$

ここで $Q \equiv \rho^{\frac{1}{\gamma}}R^{\frac{1}{\gamma}-1}$ と置いている。60 才〜70 才の年齢帯での算定では、T を 10 と置く。以前と同じ数値例を用いて、(45.0)〜(45.T) の各式を計算し、年金が年額 10 万円増加したとすると、最適消費の増加額は、$(dC_t/dZ)\times 10$ であって、表 2 のようになる。

表 2: 60 才〜70 才での 10 万円の年金増額による最適消費増分（単位：万円）

60 才	22.6 (5.0 %)	66 才	6.2 (5.0 %)
61 才	18.3 (5.0 %)	67 才	4.9 (4.9 %)
62 才	14.8 (5.0 %)	68 才	3.9 (4.9 %)
63 才	11.9 (5.0 %)	69 才	3.1 (4.9 %)
64 才	9.6 (5.0 %)	70 才	2.5 (4.9 %)
65 才	7.7 (5.0 %)	計	105.5 (5.0 %)

表2では最適消費の増加は、ほとんど5％であることが判明した。これは全期間の資産額2000万円 $(= W_0 + 10Z)$ に対する年金増加総額が100万円であることを正確に反映していると考えられる。

付録A．ガンマ関数

$\psi(x) \equiv e^{-x}x^{k-1}$ $(1 > k > 0)$ は $x(> 0)$ について連続で、$\psi(x) > 0$ である。また

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{k+1} = 0$$

であるので、十分大きな正値 β より大きな x は、$e^{-x}x^{k+1} < 1$ を満たす。ゆえに

$$\psi(x) = e^{-x}x^{k-1} < \frac{1}{x^2}$$

である。ところで

$$\int_\beta^\infty \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{\beta}$$

となるので、$\int_\beta^\infty \psi(x)dx$ は収束する。つぎに $x > 0$ では $e^{-x} < 1$ となるので、

$$\psi(x) = e^{-x}x^{k-1} < x^{-(1-k)}$$

そして、$\int_0^\beta x^{-(1-k)}dx = \beta^k/k$ であるので $\int_0^\beta \psi(x)dx$ は収束する。かくして $\int_0^\beta \psi(x)dx + \int_\beta^\infty \psi(x)dx = \int_0^\infty \psi(x)dx$ も収束する。

いま $\Gamma(k) \equiv \int_0^\infty e^{-x}x^{k-1}dx$ $(1 > k > 0)$ において、$y = e^{-x}$ とおくと、$\boxed{x : 0 \to \infty}$ は $\boxed{y : 1 \to 0}$ に対応して、

$$dy = -e^{-x}dx\ , \quad \log y = -x$$

であるので

$$\Gamma(k) = \int_1^0 (-\log y)^{k-1}(-dy) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{y}\right)^{k-1} dy$$

さて $\Gamma_t(k) \equiv \int_t^\infty e^{-x}x^{k-1}dx$ $(1 > k > 0)$ において $y = e^{-x}$ とおくと、$\boxed{x : t \to \infty}$ は $\boxed{y : e^{-t} \to 0}$ に対応するので、

$$\Gamma_t(k) = \int_{e^{-t}}^0 (-\log y)^{k-1}(-dy) = \int_0^{e^{-t}} \left(\log\frac{1}{y}\right)^{k-1} dy$$

いま $k \equiv 1/(1+a)$ とおいて、$a(> 0)$ が増大すると、k は減少して、$1-k(> 0)$ は増大するので、$\left(\log\frac{1}{y}\right)^{k-1}$ は減少し、したがって $\Gamma_t(k)$ も減少する。

付録B．若干の微分計算

①. $Y \equiv [(1+a)^a p]^{-1/(1+a)}$ の a についての微分

$$\begin{aligned}
\log Y &= \frac{-a}{1+a}\log(1+a) + \frac{-1}{1+a}\log p \\
\frac{d\log Y}{da} &= -(1+a)^{-2}[a + \log((1+a)/p)] \\
\frac{dY}{da} &= \frac{dY}{d\log Y}\frac{d\log Y}{da} = Y\frac{d\log Y}{da} \\
&= -(1+a)^{-2}[a + \log((1+a)/p)](1+a)^{\frac{-a}{1+a}}p^{\frac{-1}{1+a}} < 0
\end{aligned}$$

②. $Z \equiv \left(e^{pt^{1+a}}\right)^{1/(1+a)} \cdot Y$ の a についての微分

$$\begin{aligned}
\log Z &= (1+a)^{-1} pt^{1+a} + \log Y \\
\frac{d \log Z}{da} &= \left\{-(1+a)^{-2}[pt^{1+a} + a + \log((1+a)/p)] + (1+a)^{-1} pt^{1+a} \log t\right\} \\
\frac{dZ}{da} &= \frac{dZ}{d\log Z}\frac{d\log Z}{da} = Z\frac{d\log Z}{da} \\
&= \left[\frac{e^{pt^{1+a}}}{(1+a)^a p}\right]^{1/(1+a)} \{\cdots\}
\end{aligned}$$

付録C.(21) 式の証明

$$\Omega = \int_t^\infty pz^a \frac{F(z)}{F(t)} w dz = w \int_t^\infty pz^a e^{\left\{\frac{-p}{1+a}(z^{1+a} - t^{1+a})\right\}} dz$$

いま $x \equiv \frac{p}{1+a}(z^{1+a} - t^{1+a})$ とおくと、$\boxed{z : t \to \infty}$ は $\boxed{x : 0 \to \infty}$ に対応して、$dx/dz = pz^a$ であるので、

$$\Omega = w \int_0^\infty e^{-x} dx = w\left[-e^{-x}\right]_0^\infty = w$$

[証明了]

付録D. 線形1階微分方程式の解

$$\dot{x}(t) - a(t)x(t) = N(t) \qquad (N(t) : \text{非斉次項})$$

の両辺に $e^{\int_t^\infty a(u)du}$ を乗じて、

$$\frac{d\left\{x(t)e^{\int_t^\infty a(u)du}\right\}}{dt} = N(t)e^{\int_t^\infty a(u)du}$$

となる。この式の両辺を t から $+\infty$ まで積分すると、

$$\begin{aligned}
x(\infty) - x(t)e^{\int_t^\infty a(u)du} &= \int_t^\infty N(z)e^{\int_z^\infty a(u)du} dz \\
\therefore \quad x(t) = x(\infty)e^{-\int_t^\infty a(u)du} &- \int_t^\infty N(z)e^{-\int_t^z a(u)du} dz
\end{aligned}$$

この解が一意であるためには、つぎの“Non-Ponzi-Game”条件が満たされなければならない。

$$\lim_{z\to\infty} x(z)e^{-\int_t^z a(u)du} = 0$$

付録E.(36.1) 式と (36.2) 式の導出

(38.1) の予算制約式のもとで、(37.1) 式右辺の極大をもたらす極値条件は、つぎのように展開される。

$$
\begin{aligned}
0 &= C_{T-1}^{-\gamma} + \rho \frac{P_T}{P_{T-1}} \left[(W_{T-1} + Z - C_{T-1})R + Z\right]^{-\gamma} (-R) \\
\therefore \quad C_{T-1} &= (\rho R P_T / P_{T-1})^{-1/\gamma} \left[(W_{T-1} + Z - C_{T-1})R + Z\right] \\
\therefore \quad \left\{1 + (\rho R^{1-\gamma} P_T / P_{T-1})^{-1/\gamma}\right\} C_{T-1} &= (\rho R^{1-\gamma} P_T / P_{T-1})^{-1/\gamma} \\
&\quad \times \left[W_{T-1} + Z(1 + R^{-1})\right]
\end{aligned}
$$

これより (36.1) 式が直ちに得られる。そして (36.1) 式は下式に書き換えられる。

$$
C_{T-1} = \left(W_{T-1} + Z(R^{-1} + 1)\right) P_{T-1}^{\frac{1}{\gamma}} \left[\rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} P_T^{\frac{1}{\gamma}} + P_{T-1}^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{-1} \tag{36.1'}
$$

上述と同様の手順に従って、(38.2) 式の予算制約式のもとで、(37.2) 式右辺の極大をもたらす極値条件を展開すると、(36.2) 式が導出される。そこでの v_{T-1} に (40.1) 式を代入して、つぎのように整理できる。

$$
C_{T-2} = \left(W_{T-2} + Z(R^{-2} + R^{-1} + 1)\right) P_{T-2}^{\frac{1}{\gamma}} \left[P_{T-2}^{\frac{1}{\gamma}} + \rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1} P_{T-1}^{\frac{1}{\gamma}} + \left(\rho^{\frac{1}{\gamma}} R^{\frac{1}{\gamma}-1}\right)^2 P_T^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{-1} \tag{36.2'}
$$

(36.1′) 式と (36.2′) 式を一般化したものが (41) 式である。

参考文献

[1] Blanchard, O.J., " Debt, Deficit, and Finite Horizons, " *Journal of Political Economy*, 93, (1985), 223-247

[2] Buiter, W.H., " Death, Birth, Productivity Growth and Debt Neutrality, " *Economic Journal*, 98, (1988), 279-293

[3] Kalbfleisch, J.D. and R.L. Prentice, *The Statistical Analysis of Failure Time Data*, J.Wiley and Sons, New York, 1980.

[4] Kamien, M.I. and N.L. Schwartz, *Dynamic Optimization : The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, North Holland, New York, 1981.

[5] Kotlikoff, L.J. and A. Spivak,"The Family as an Incomplete Annuities Market," *Journal of Political Economy*, 89, (1981), 372-391

[6] 村田安雄,「ライフ・サイクル消費と資本蓄積―Blanchard 理論の解明―」, 関西大学『経済論集』第42巻, (1992), 609-625

[7] Saint-Paul, G.,"Fiscal Policy in an Endogenous Growth Model," *Quarterly Journal of Economics*, 107, (1992), 1243-1259

[8] 田近栄治・林文子,「個人年金市場と逆選択―国民年金基金のケース―」,『経済研究』第47巻, (1996), 217-228