連続濃度の主体をともなう結託形成ゲームにおけるNash均衡の存在証明について

著者	坂根 宏一
雑誌名	關西大學經済論集
巻	50
号	2
ページ	155-163
発行年	2000-09-30
その他のタイトル	The Existence Proof of an Equilibrium for a Coalition Formation Game
URL	http://hdl.handle.net/10112/4418

論　文

連続濃度の主体をともなう結託形成ゲームにおける Nash 均衡の存在証明について*

坂　根　宏　一

概 要

我々のモデルにおいては，主体は個別に戦略を表明するのではなく，n 個の結託を形成しながら結託単位で戦略を表明する．各結託は任意のメンバーに対して，結託の利得を最大にするような戦略を表明する．n 個の結託はこのような最適戦略を表明しながらメンバー構成を変化させ，より大きな利得を求める．n 個の結託の全てが，そのメンバー構成を変更しようとするインセンティブを持たない状態を「均衡」と呼び，以下ではその存在が証明される．

現実社会においては，各主体が個別に戦略を表明し合って利害の対立を調整するのではなく，利害の一致する主体同志が組織を形成し，組織単位で互いの利害対立を調整する，という現象がよく見受けられる．我々のモデルは，こうした現象を説明するための理論的枠組みを提供できる．

キーワード： 結託，結託形成ゲーム，Nash 均衡，
経済学文献季報分類番号：02-21, 02-23

1. 序文

本論文では，Schmeidler (1973)，Ichiishi (1983)(p.71, Theorem 4.7.3)，Khan (1986)，Khan et al. (1997) によって研究された Non-atomic ゲームの設定と同様に，主体が連続濃度で存在するモデルにおける非協力ゲームの Nash 均衡の存在が証明される．しかしそれらのモデルとは異なり，非協力ゲームのフレームワークでありながら結託形成が分析される．

我々のゲームは以下の 3 つの概念,「結託の集合」「結託の戦略集合」および「結託の利得」で構成される．これらの概念を定義することによって，モデルの概説を行うこととしたい．まずはじめに「結託の集合」とは，主体の全体集合のある部分集合族として定義される概念である．我々のモデルでは主体は結託単位で行動するため，結託の集合はプレイヤーの集合に似た概念とみなし得るのである．つぎに「結託の戦略集合」とは，個々の主体の戦略集合の当該結託上の集計概念である．我々のモデルでは，各主体は自らの戦略集合から個別に戦略を表明するのではなく，同じ結託に属する主体同志が協力行動をとり，当該結託の戦略集合からその要素である「結託の戦略」を選択する．このような主体の行動は，主体の利得関数の定義から導かれるものである．すなわち，各主体は自らの個別戦略からではなく，結託の戦略から利得を得ることが仮定されているため，結託形成行動に対して根拠を与えることが可能になるのである．さて最後に「結託の利得」は，個々の主体の利得を当該結託上で集計した概念として定義される．各主体は自らが所属する結託内部では，結託の利得を最大化する結託の戦略を選択するように協力行動をとり，他の結託に対しては

* 本研究は，平成 12 年度関西大学学部共同研究費によって行った．

結託単位で非協力行動をとるのである．さらに各結託はその「最適戦略」を変更するインセンティブがなくなるまで結託メンバーの構成を変えて，「最適結託メンバー」を探し出そうとする．これが我々のモデルにおける結託の行動仮説である．我々は n 個の結託が形成されることを仮定する．n 個の結託の全てが最適結託メンバーで構成されており，もはやそれを変更しようとするインセンティブが存在しない状態を「均衡」と呼ぶことにする．以下ではその存在が証明される．

現実社会においては，各主体が個別に戦略を表明し合って利害の対立を調整するのではなく，利害の一致する主体同志が組織を形成し，組織単位で互いの利害対立を調整する，という現象がよく見受けられる．我々のモデルは，こうした現象を説明するための理論的枠組みを提供し得るのである．

2. モデルの定義

2-1. 結託の集合

K を R^ℓ の非空コンパクト凸集合とする．K の非空閉集合の全てを $\mathscr{K}$ と書き，その要素 X を戦略集合と呼ぶことにする．戦略集合 X 上には二項関係 $\succsim$ が定義される．$\succsim$ について以下の仮定を設定する．

(A.1) (i) $\succsim$ は X 上において反射性，対称性および推移性を満たす比較可能な二項関係であり，(ii) $graph(\succsim) = \{(x,y) \in X \times X | x \succsim y\}$ は $X \times X$ の閉集合である．

$\mathscr{K}$ の要素 X と X 上で定義された $\succsim$ とのペア $(X,\succsim)$ を選好関係と呼び，選好関係の集合を I によって表すこととする，i.e., $I := \{(X,\succsim) | X \in \mathscr{K}$, $\succsim$ は仮定 (A.1) を満たす$\}$．以下我々のモデルでは Debreu (1969) と同様に，この集合 I の一般的要素 $(X,\succsim)$ によって主体を表現することとする．つまり I の一般的要素 $(X,\succsim)$ を i と書き，「主体 i」と呼ぶことにする．I 上にハウスドルフ距離 $h(i,j) := max\{\rho(i,j),\rho(j,i)\}$ を定義する．ここで $\rho(i,j) := \sup_{a\in i}\inf_{b\in j} d(a,b)$ であり，d は R^ℓ 上の距離関数である．距離 h によって定義される位相を $\mathscr{O}$ と表すと，$(I,\mathscr{O})$ は Aliprantis and Border (1994), Theorem 3.71 (p.111) によってコンパクト距離空間になる．この $\mathscr{O}$ によって生成される σ-algebara を $\mathscr{I}$ と表す．可測空間 $(I,\mathscr{I})$ 上で定義される測度を μ とし，主体の測度空間を $(I,\mathscr{I},\mu)$ と表すことにする．I の非空コンパクト部分集合の全てを $\mathbb{C}$ と表すことにし，その要素を結託 (coalition) と呼ぶ．$\mathbb{C}$ にハウスドルフ距離 $h^*(C,D) := max\{\rho^*(C,D),\rho^*(D,C)\}$ を定義する．ここで $\rho^*(C,D) := \sup_{i\in C}\inf_{j\in D} h(i,j)$ である．距離 h^* によって定義される位相を $\mathscr{O}^*$ と表すと，$(\mathbb{C},\mathscr{O}^*)$ は再度 Aliprantis and Border (1994), Theorem 3.71 (p.111) によってコンパクト距離空間になることがわかる．また $\mathbb{C}$ は明らかに凸集合である．

(D.1) $(\mathbb{C},\mathscr{O}^*)$; (結託の集合).

2-2. 結託の戦略集合

我々は個々の主体の戦略集合とは別に，「結託の戦略集合」という概念を定義しなければならない．それは主体の戦略集合を集計することによって得られる．主体の戦略集合は写像 $X : I \to \mathscr{K}$ によって与えられるが，$\mathscr{K}$ にハウスドルフ距離によって位相を定義すると，X はその位相で連続関数になることが Debreu (1969) における命題 (2) によって明らかにされている．また Aliprantis and Border (1994), Theorem 16-16 (p.531) によれば，それは R^ℓ のユークリッド位相では連続対応であることが示され得る．我々は X を連続対応，したがって可測多価写像であると考えて以下の議論を行うこととする．I から R^ℓ への可積分関数のすべてを $L^1(I,R^\ell)$ と表し，その部

分集合 $\{x \in L^1(I, R^\ell) | x(i) \in X(i)\ \mu\text{-a.e.}\}$ を $\mathscr{L}$ と示すことにする．Aumann (1965) における Proposition 2.1 から $\mathscr{L} \neq \emptyset$ であるから，$\mathscr{X}(C) := \int_C X(i)d\mu = \{\int_C x(i)d\mu \in R^\ell | x \in \mathscr{L}\}$ を定義できる．この集合 $\mathscr{X}(C)$ を用いて，結託の戦略集合を $\bigcup_{C \in \mathbb{C}} \mathscr{X}(C)$ と定義する．

(D.2) $\bigcup_{C \in \mathbb{C}} \mathscr{X}(C)$; (結託の戦略集合).

(補題 1): $\mathscr{X} : \mathbb{C} \to \mathscr{P}(R^\ell)$, $C \mapsto \int_C X(i)d\mu$ は連続対応である．

(証明)．関数 $d^* : \mathscr{P}(R^\ell) \backslash \{\emptyset\} \times \mathscr{P}(R^\ell) \backslash \{\emptyset\} \to R_+$, $(C, D) \mapsto \sup_{a_C \in C} d(a_C, D)$ を定義する．ここで $d(a_C, D) := \inf_{a_D \in D} d(a_C, D)$ である．以下の条件 (I) および (II) の成立を証明することで，所望の結論を得ることができる．つまり，条件 (I) の成立によって上半連続性が，条件 (II) の成立によって下半連続性がそれぞれ保証されるのである．
(I) $C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \{d^*(\mathscr{X}(C_n), \mathscr{X}(C))\}_n \to 0$, (II) $C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \{d^*(\mathscr{X}(C), \mathscr{X}(C_n))\}_n \to 0$.

はじめに，以下の条件 (1) が成り立つことを証明する．

(1) $$\forall x \in \mathscr{L},\ C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \limsup \int_{C_n} x(i)d\mu \leq \int_C x(i)d\mu$$

$\mathbb{C}$ はコンパクト集合なので，$(\forall x \in \mathscr{L}, \forall n \in N, \int_{\overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu < \infty)$ である．したがって，Halmos (1950)(p.40,(5)) から，以下のことが成立する．

(2) $$\begin{aligned}\forall x \in \mathscr{L},\ \int_I x(i)d\mu - \int_{\bigcap_{n=1}^\infty \overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu &= \int_{I \backslash \bigcap_{n=1}^\infty \overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu \\ &= \int_{\bigcup_{n=1}^\infty (I \backslash \overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m})} x(i)d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{I \backslash \overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_I x(i)d\mu - \int_{\overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu \right) \\ &= \int_I x(i)d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu.\end{aligned}$$

また，$(\forall n \in N,\ C_n \subset \overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m})$ から，条件 $(\forall x \in \mathscr{L}, \forall n \in N, \int_{C_n} x(i)d\mu \leq \int_{\overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu)$ が帰結する．さらにその不等式の両辺について上極限をとれば，条件 $(\forall x \in \mathscr{L},\ \limsup \int_{C_n} x(i)d\mu \leq \limsup \int_{\overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu)$ を得る．点列 $\{\int_{\overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu\}_{n=1}^\infty$ はすべての $x \in \mathscr{L}$ について，単調減少であるから $(\forall x \in \mathscr{L},\ \limsup \int_{\overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu = \lim \int_{\overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu)$ である．したがって条件 $(\forall x \in \mathscr{L},\ \limsup \int_{C_n} x(i)d\mu \leq \lim \int_{\overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu)$ が成り立つ．この条件と (2) から $(\forall x \in \mathscr{L},\ \limsup \int_{C_n} x(i)d\mu \leq \int_{\bigcap_{n=1}^\infty \overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu)$ を得る．また Casting and Valadier (1977) Theorem II-2 (p.38) によって $C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \bigcap_{n=1}^\infty \overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m} = C$ であるから，$C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \int_C x(i)d\mu = \int_{\bigcap_{n=1}^\infty \overline{\bigcup_{m=n}^\infty C_m}} x(i)d\mu$ が成り立ち，条件 (1) が成立する．

次に，以下の条件 (3) が成り立つことを証明する．

(3) $$\forall x \in \mathscr{L},\ C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \int_C x(i)d\mu \leq \liminf \int_{C_n} x(i)d\mu$$

Halmos (1950)(p.40,(5)) から，以下のことが成立する．

$$(4)\qquad \forall x \in \mathscr{L},\ \int_{\bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}B_\epsilon(C_m)} x(i)d\mu$$
$$= \int_{\bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{m=k}^{\infty}B_\epsilon(C_m)\setminus\bigcap_{m=k-1}^{\infty}B_\epsilon(C_m))} x(i)d\mu$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\bigcap_{m=k}^{\infty}C_m\setminus\bigcap_{m=k-1}^{\infty}C_m} x(i)d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{\bigcap_{m=k}^{\infty}C_m\setminus\bigcap_{m=k-1}^{\infty}C_m} x(i)d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\bigcup_{k=1}^{n}(\bigcap_{m=k}^{\infty}C_m\setminus\bigcap_{m=k-1}^{\infty}C_m)} x(i)d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m} x(i)d\mu.$$

また，$(\forall n \in N, \bigcap_{m=n}^{\infty}C_m \subset C_n)$ から，条件 $(\forall x \in \mathscr{L}, \forall n \in N,\ \int_{\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m} x(i)d\mu \leq \int_{C_n} x(i)d\mu)$ が成立する．さらにその両辺について下極限をとれば，条件 $(\forall x \in \mathscr{L},\ \liminf \int_{\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m} x(i)d\mu \leq \liminf \int_{C_n} x(i)d\mu)$ を得る．点列 $\{\int_{\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m} x(i)d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ は，すべての $x \in \mathscr{L}$ について単調増加であるから $(\forall x \in \mathscr{L},\ \liminf \int_{\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m} x(i)d\mu = \lim \int_{\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m} x(i)d\mu)$ である．したがって条件 $(\forall x \in \mathscr{L},\ \lim \int_{\bigcap_{m=n}^{\infty}C_m} x(i)d\mu \leq \liminf \int_{C_n} x(i)d\mu)$ が成り立つ．この条件と (4) から $(\forall x \in \mathscr{L},\ \int_{\bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}B_\epsilon(C_m)} x(i)d\mu \leq \liminf \int_{C_n} x(i)d\mu)$ を得る．また Casting and Valadier (1977) Theorem II-2 (p.38) によって得られる帰結 $C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}B_\epsilon(C_m) = C$ から，$C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \int_C x(i)d\mu = \int_{\bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}B_\epsilon(C_m)} x(i)d\mu$ が成立し，条件 (3) が成立する．

$(\forall x \in \mathscr{L}, \liminf \int_{C_n} x(i)d\mu \leq \liminf \int_{C_n} x(i)d\mu)$ が必ず成り立つことと，(1) および (3) により，以下の条件が成立する．

$$(5)\qquad \forall x \in \mathscr{L},\ C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \{d(\int_{C_n} x(i)d\mu, \int_C x(i)d\mu)\}_n \to 0$$

(条件 (I) の証明): (5) 式と条件 $(\forall x \in \mathscr{L},\ \int_C x(i)d\mu \in \mathscr{X}(C))$ および，点と閉集合の距離の定義から次の条件が成立する．

$$(6)\qquad \forall x \in \mathscr{L},\ C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \{d(\int_{C_n} x(i)d\mu, \mathscr{X}(C))\}_n \to 0$$

さて $\xi_n \in \mathscr{X}(C_n)$ を条件 $(\forall n \in N,\ d^*(\mathscr{X}(C_n), \mathscr{X}(C)) = d(\xi_n, \mathscr{X}(C)))$ を満たす要素とする．任意の $x^k \in \mathscr{L}$ に対して，点列 $\{\int_{C_1} x^k(i)d\mu, \int_{C_2} x^k(i)d\mu, \cdots, \int_{C_n} x^k(i)d\mu, \cdots\}$ を定義すれば，一般性を失うことなく，$k=n$ となる要素 $\int_{C_n} x^n(i)d\mu$ を ξ_n とすることができる．$\{d(\xi_n, \mathscr{X}(C))\}_n$ は (6) から単調減少列である．実際，任意の $n \in N$ について，ξ_n の定義から $d(\int_{C_n} x^{n+1}(i)d\mu, \mathscr{X}(C))) < d(\xi_n, \mathscr{X}(C)))$，また条件 (6) から $d(\xi_{n+1}, \mathscr{X}(C))) < d(\int_{C_n} x^{n+1}(i)d\mu, \mathscr{X}(C)))$ である．したがって $C_n \overset{h^*}{\to} C \Rightarrow \{d(\xi_n, \mathscr{X}(C))\}_n \to 0$ が成り立ち，所望の結論を得る．

(条件 (II) の証明): (I) と同様の方法によって，所望の結論を得ることができる．□

(補題 2): 結託の戦略集合 $\bigcup_{C\in\mathbb{C}}\mathscr{X}(C)$ は非空コンパクト凸集合である．

(証明)．(非空値性): $X : I \to \mathscr{X}$ は積分有界である．任意の $C \in \mathbb{C}$ について，特性関数 χ_C を定義する．$\chi_C X$ は積分有界となり，これに Aumann (1965) における Theorem 2 を適用すれば，

$\int \chi_C X(i)d\mu = \int_C X(i)d\mu = \mathscr{X}(C)$ なので所望の結論を得る．(コンパクト性): (補題 1) から $\mathscr{X}$ は (上半) 連続対応である．$\mathbb{C}$ はコンパクトなので，Aliprantis and Border (1994) の Lemma 16.8 (p.528) から示される．(凸性): Vind (1964) における Lemma A から示される． □

2-3. 最適戦略の決定

我々のモデルにおいては，結託は n-個形成されるものと仮定されている．これまでの議論ではそれらの結託の番号を明示する必要はなかったが，以下では λ-番目の結託の空間を $\mathbb{C}_\lambda$ と表し，その要素である結託を C_λ と書くことにする．ただし C_λ が λ-番目の結託の空間 $\mathbb{C}_\lambda$ に属していることが明らかな場合には単に C と書くこともある．λ-番目の結託が C_λ に固定されたとき，その結託の戦略を $a_{C_\lambda} \in \mathscr{X}(C_\lambda)$，またその結託の規模を $k_{C_\lambda} \in [0,1]$ と表すことにする．簡略化のため $s_\lambda := (a_{C_\lambda}, k_{C_\lambda})$，$S_\lambda := \bigcup_{C \in \mathbb{C}_\lambda} \mathscr{X}(C) \times [0,1]$ と書き，さらに $s := (s_1, \cdots, s_n)$，$S := \prod_{\lambda=1}^{n} S_\lambda$ と書くことにする．さて，任意の $\lambda \in \{1, \cdots, n\}$ について，$\mathbb{C}_\lambda$ から R^ℓ への連続関数の全てを $\mathfrak{C}(\mathbb{C}_\lambda, R^\ell)$ と表すことにする．また $\mathfrak{C}(\mathbb{C}_\lambda, R^\ell)$ の部分集合 $\{f \in \mathfrak{C}(\mathbb{C}_\lambda, R^\ell) | f(C) \in \mathscr{X}(C)\}$ を $\mathscr{C}_\lambda$ と書くことにする．$\mathscr{C}_\lambda \neq \emptyset$ は次のようにして確かめられる．$\mathbb{C}_\lambda$ はコンパクト距離空間であり，$\mathscr{X} : \mathbb{C}_\lambda \to \mathscr{P}(R^\ell)$ は (補題 1) から (下半) 連続対応である．$X : I \to \mathscr{K}$ はコンパクト値を持つので，χ_C を特性関数とすれば，$\chi_C X$ もまたコンパクト値を持つ．したがって Aumann (1965) における Theorem 4 から，$\int \chi_C X(i)d\mu = \int_C X(i)d\mu = \mathscr{X}(C)$ は，すべての $C \in \mathbb{C}_\lambda$ についてコンパクト集合である．さらに Vind (1964) における Lemma A から $\mathscr{X}(C)$ は凸集合である．したがって Michael (1956) から，条件 $(\forall C \in \mathbb{C}_\lambda,\ f(C) \in \mathscr{X}(C))$ を満たす $f : \mathbb{C} \to R$ が存在する．我々のモデルでは，結託 C に属する主体は，その内部においては $\mathscr{X}(C)$ から戦略 a_C を選択するために協力行動をとり，C 以外の結託に対しては，結託単位で非協力行動をとることが仮定されている．C に属する主体は，協力行動として集計戦略 a_C を表明することから利得を得ると仮定する．任意の λ 番目の結託に属する主体の利得関数を $u : I \times graph(\mathscr{X}) \times S \to R_+$ と表し，任意の $C \in \mathbb{C}_\lambda$，$f \in \mathscr{L}$，$s \in S$ について

$$u(\cdot, C, f(C), s) : I \to R_+,\ i \mapsto \begin{cases} u(i, C, f(C), s) < \infty & i \in C \\ 0 & i \notin C \end{cases}$$

を満たすものとして定義する．任意の λ 番目の結託に属する主体の利得関数について，以下の仮定を設定する．

(A.2) (i) 任意の $C \in \mathbb{C}_\lambda$，$i \in C$ について，$u(i, C, \cdot, \cdot) : \mathscr{X}(C) \times S \to R_+$ は連続である，
(ii) 任意の $C \in \mathbb{C}_\lambda$，$f \in \mathscr{L}$，$s \in S$ について，$u(\cdot, C, f(C), s) : I \to R_+$ は可測である，
(iii) 任意の $\varepsilon > 0$ について，$C^n \to C \Rightarrow \mu(\{i \in I | |u(i, C^n, f(C^n), s) - u(i, C, f(C), s)| \geqq \varepsilon\}) \to 0$.

各結託はそのメンバーが任意に固定されると，他の $n-1$ 個の結託の戦略とその規模とをデータとして，以下で定義される結託の利得関数の値を最大にする戦略を表明する．また，結託の利得関数については以下の仮定 (A.3) を設定する．

(D.3) $v : graph(\mathscr{X}) \times S \to R_+$; $(C, s) \to \int_C u(i, C, f(C), s)d\mu$ (結託の利得関数).

(A.3) (i) 任意の $C \in \mathbb{C}_\lambda, t \in [0,1], a_C, a'_C \in \mathscr{X}(C)$，$s \in S$ について，$v(C, a_C, s) = v(C, a'_C, s) \Rightarrow tv(C, a_C, s) + (1-t)v(C, a'_C, s) < v(C, ta_C + (1-t)a'_C, s)$ が成立する．

(ii) 任意の $C,D\in\mathbb{C}_\lambda$, $t\in[0,1]$, $s\in S$, $f\in\mathscr{L}$ について，$(C(t)=tC+(1-t)D, v(C,f(C),s)=v(D,f(D),s)\Rightarrow tv(C,f(C),s)+(1-t)v(D,f(D),s)<v(C(t),f(C(t)),s)$ を満たす $f(C(t)\in\mathscr{X}(C(t))$ が存在する．

仮定 (A.3)(i) は，任意の $C\in\mathbb{C}_\lambda$ におけるほとんどすべての主体の利得関数の凹性，$u(i,C,a_C,s)=u(i,C,a'_C,s)\Rightarrow tu(i,C,a_C,s)+(1-t)u(i,C,a'_C,s)<u(i,C,ta_C+(1-t)a'_C,s)$ と同義である．実際，この不等式の両辺を C 上で積分すれば，$\int_C[tu(i,C,f(C),s)+(1-t)u(i,C,f(C),s)]d\mu<\int_C u(i,C,ta_C+(1-t)a'_C,s)d\mu$ が成立し，左辺は $t\int_C u(i,C,f(C),s)d\mu+(1-t)\int_C u(i,C,f(C),s)d\mu$ である．したがって標準的仮定として許容し得るものである．仮定 (A.3)(ii) については，条件 $C\subset D$ を付加するならば十分な意味を求めることが可能である．つまり主体が協力行動をとるためには費用がかかりさらにその費用が負の利得として表せると仮定するならば，この仮定は結託の規模が大きくなるにしたがって協力行動をとるための費用が増加し，結託規模が大きくなりすぎると利得は小さくなる，ということを意味するのである．これは結託の規模が主体の全体集合にまで大きくならないことを意味している．現実の現象においても，ある組織の規模がその社会の構成員全体の集合に等しくなることなどないことを考えると，この仮定もまた許容し得るものである．けれども結託に包含関係が成り立たない一般的な場合においては，この仮定は $graph(\mathscr{X})$ の凸性を示すものであるから，強い仮定であると言わざるをえない．これらの仮定の下で，λ 番目の結託が C に固定されたとき，最大利得を保証する戦略を与える写像は以下のように定義される．

$$(7)\qquad f^*(C,\cdot):S\to\mathscr{X}(C_\lambda),\ s\mapsto a^*_C\ ;\ v(C,a^*_C,s)=\max_{a_C\in\mathscr{X}(C)}v(C,a_C,s)$$

(補題 3): 任意の $\lambda\in\{1,\cdots,n\}$，$C\in\mathbb{C}_\lambda$ について，$f^*(C,\cdot):S\to\mathscr{X}(C)$ は連続である．

(証明)．任意の $C\in\mathbb{C}_\lambda$，$n\in N$ について，主体の利得関数は C 上で，条件 $|u(i,C,a^n_C,s^n)|\leqq M$ を満たすような $M>0$ が存在する．また I はコンパクトなので $\mu(C)<\infty$ が成り立つ．したがって仮定 (A.2)(i) の下，Lebesgue の有界収束定理 (e.g.,Theorem D in Halmos (1950), p110) によって，条件 $(a^n_C,s^n)\to(a_C,s)\Rightarrow\int_C u(i,C,a_C,s)d\mu\to\int_C u(i,C,a_C,s)d\mu$ が成立する．仮定 (A.3)(i) と Vind (1964) における Lemma A によって証明される $\mathscr{X}(C)$ の凸性から，Berge の最大値定理によって所望の結論を得る．□

さらに以下で定義される関数の連続性も証明される．

$$(8)\qquad f^*(\cdot,s):\mathbb{C}_\lambda\to\bigcup_{C\in\mathbb{C}_\lambda}\mathscr{X}(C),\ C\mapsto f^*(C)\ ;\ v(C,f^*(C),s)=\max_{f(C)\in\mathscr{X}(C)}v(C,f(C),s)$$

(補題 4): 任意の $\lambda\in\{1,\cdots,n\}$，$s\in S$ について，$f^*(\cdot,s):\mathbb{C}_\lambda\to\bigcup_{C\in\mathbb{C}_\lambda}\mathscr{X}(C)$ は連続である．

(証明)．任意の $s\in S$，$f\in\mathscr{L}$，$n\in N$ について，主体の利得関数は条件 $|u(i,C^n,f(C^n),s)|\leqq M$ を満たすような $M>0$ が存在する．仮定 (A.2)(iii) の下，Lebesgue の有界収束定理 (e.g.,Theorem D in Halmos (1950), p.110) によって $C^n\to C\Rightarrow\int_{C^n}u(i,C^n,f(C^n),s)d\mu\to\int_C u(i,C,f(C),s)d\mu$ が帰結する．さて，仮に以下の条件が成立するとしてみる．$\exists\delta>0,\forall n\in N,C^n\in U(C,1/n)\wedge(\int_{C^n}u(i,C^n,f^*(C^n),s)d\mu\geqq\int_C u(i,C,f^*(C),s))d\mu+\delta)$．すると $C^n\in U(C,1/n)$ 上で条件 $\int_{C^n}u(i,C^n,g(C^n),s)d\mu>\int_C u(i,C,f^*(C),s))d\mu$ を満たすような $g\in\mathscr{C}$ が存在することになる．$C^n\to C$ とすると，$\int_{C^n}u(i,C^n,g(C^n),s)d\mu\to\int_C u(i,C,g(C),s)d\mu>\int_C u(i,C,f^*(C),s))d\mu$ が成り立つが，これは $f^*(C,s)$ の定義に矛盾する．□

2-4. 最適結託メンバーの決定

λ 番目の結託に対して，最大利得を保証する結託メンバーを与える関数を以下のように定義する．

(9) $$C_\lambda^*: S \to \mathbb{C}_\lambda,\ s \mapsto C^*\ ;\ v(C^*, f^*(C^*), s) = \max_{C \in \mathbb{C}_\lambda} v(C, f(C), s))$$

(補題 5): 任意の $\lambda \in \{1, \cdots, n\}$ について，$C_\lambda^*: S \to \mathbb{C}_\lambda$ は連続である．

(証明). $f^*: \mathbb{C}_\lambda \times S \to \bigcup_{C \in \mathbb{C}_\lambda} \mathscr{X}(C)$ は (補題 3)，(補題 4) から連続である．また仮定 (A.2)(i), (iii) から条件 $(C^n, s^n) \to (C, s) \Rightarrow \mu(\{i \in I || u(i, C^n, f^*(C^n, s^n)) - u(i, C, f^*(C, s))| \geqq \varepsilon\}) \to 0$ が成立する．任意の $\varepsilon > 0$, $n \in N$ について，主体の利得関数は条件 $|u(i, C^n, f^*(C^n, s^n)| \leqq M$ を満たす $M > 0$ が存在する．したがって Lebesgue の有界収束定理 (e.g.,Theorem D in Halmos (1950), p.110) によって，$(a_C^n, s^n) \to (a_C, s) \Rightarrow \int_C u(i, C^n, f^*(C^n, s^n))d\mu \to \int_C u(i, C, f^*(C, s))d\mu$ である．$\mathbb{C}_\lambda$ は明らかに凸であるから，仮定 (A.3)(ii) の下，所望の結論は Berge の最大値定理によって得られる． □

対応 $\tilde{C}_\lambda : S \to \mathscr{P}(I)$ を $\tilde{C}_\lambda(s) = C_\lambda^*(s)$ と定義すると，$\tilde{C}_\lambda$ は I を定義域とする ($\mathbb{C}_\lambda$ ではなく) 連続対応であることが Aliprantis and Border (1994), Theorem 16.16 (p.531) からわかる．$C_\lambda^*(s)$ は $\mathbb{C}_\lambda$ の要素であり，$\tilde{C}_\lambda(s)$ は I の部分集合である．以下必要に応じて，C_λ^* と $\tilde{C}_\lambda$ との両方を使い分けることにする．さらに対応 $\bigcup_{\lambda=1}^n \tilde{C}_\lambda : S \to \mathscr{P}(I)$ を $s \mapsto \bigcup_{\lambda=1}^n \tilde{C}_\lambda(s)$ と定義する．我々は各結託は他のすべての結託の戦略とそれらの規模 $s \in S$ とをデータとして行動することを仮定しているので，上述の $C_\lambda^*(s)$ を「$C_\lambda^*(s)$ の規模」という観測可能なデータに変換しなければならない．そのために，ほとんどすべての $i \in I$ について $\chi_I(i) = 1$ となる可測関数 χ_I を用いて，以下のような写像を定義する．

(10) $$\nu : \mathbb{C}_\lambda \to [0, 1],\ C \mapsto \int_C \chi_I(i) d\mu$$

(補題 6): 任意の $\lambda \in \{1, \cdots, n\}$ について，$\nu : \mathbb{C}_\lambda \to [0, 1]$, $C \mapsto \int_C \chi_I(i) d\mu$ は連続である．

(証明). (補題 1) と同様の方法によって示し得る． □

$\int_C \chi_I(i) d\mu$ は $\mathscr{I}$ 上では $\mu(C)$ に等しいから，ν は測度 μ の $\mathbb{C}_\lambda$ への制限であると考えられる．関数 ν を用いると，$s \in S$ に対する最適結託 $C_\lambda^*(s)$ を，最適結託「規模」を表すデータに変換する写像を以下のようにして定義することができる．結託そのものは観測可能なデータにはなり得ないが，結託規模ならばそれは観測可能なデータである．

(11) $$\alpha_\lambda : S \to [0, 1],\ s \mapsto \nu(C_\lambda^*(s))$$

3. 均衡の存在定理

以上で，我々は結託形成ゲーム (Coalition Formation Game) を定義するための準備を，すべて終えたことになる．結託形成ゲームは，(D.1)~(D.3) によって定義された概念の以下のようなリストとして，正式に定義される．

(D.4) $((\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_n), (\bigcup_{C \in \mathbb{C}_1} \mathscr{X}(C), \cdots, \bigcup_{C \in \mathbb{C}_n} \mathscr{X}(C)), v)$; (結託形成ゲーム)

(D.5) $((\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_n), (\bigcup_{C \in \mathbb{C}_1} \mathscr{X}(C), \cdots, \bigcup_{C \in \mathbb{C}_n} \mathscr{X}(C)), v)$ の均衡とは，任意の $\lambda \in \{1, \cdots, n\}$ について以下の条件 (i)~(ii) を満たす $(a_{C_\lambda^*}^*, C_\lambda^*)$ の n-個の組 $(a_{C_\lambda^*}^*, C_\lambda^*)_{\lambda=1}^n$ である．
(i) $a_{C_\lambda^*}^*$ は $v(C, a_{C_\lambda^*}^*, s) = max_{a_{C_\lambda} \in \mathscr{X}(C_\lambda)} v(C, a_{C_\lambda}, s)$ を満たす，

(ii) C_λ^* は $\sum_{\lambda=1}^n \nu(C_\lambda^*) = 1$ を満たす．(結託形成ゲームの均衡)

(D.5) の条件 (ii) について言及しておきたい．我々の結託形成ゲームにおいては n-個の結託が形成されることが仮定されており，主体の利得関数の定義から，それら n-個の結託はすべての $s \in S$ について，条件 $I \subset \bigcup_{\lambda=1}^n \tilde{C}_\lambda(s)$ を満たす．しかしこれは複数の結託に重複して参加している主体の測度が，厳密に正の値を持つことを許してしまうことになる．そのような場合，つまり $\sum_{\lambda=1}^n \nu(C_\lambda^*(s^*)) > 1$ である場合，または同じことを意味するが，$\mu(\tilde{C}_\lambda(s^*) \bigcap \tilde{C}_\eta(s^*)) \neq 0$ $(\lambda \neq \eta)$ である場合，結託の戦略が実行不可能になってしまうのである．すなわち $\mu(\tilde{C}_\lambda(s^*) \bigcap \tilde{C}_\eta(s^*)) \neq 0$ となる $\tilde{C}_\lambda(s^*) \bigcap \tilde{C}_\eta(s^*)$ に属するほとんどすべての主体が，戦略の実行段階において $\tilde{C}_\eta(s^*)$ で戦略 $a_{\tilde{C}_\eta}^*$ を選択するとすれば，$\tilde{C}_\lambda(s^*)$ の戦略 $a_{\tilde{C}_\lambda}^*$ は実行不可能となる．このような不都合を排除するためには，任意の $\lambda, \eta \in \{1, \cdots, n\}$ について，$\mu(\tilde{C}_\lambda(s^*) \bigcap \tilde{C}_\eta(s^*)) = 0$ でなければならない．このことは $I \subset \bigcup_{\lambda=1}^n \tilde{C}_\lambda(s^*)$ が成り立つことを考慮すれば，$\sum_{\lambda=1}^n \nu(C_\lambda^*(s^*)) = 1$ であることと同値である．つまり (D.5) の条件 (ii) は，結託の戦略の実行可能性を保証するための条件なのである．この実行可能性が満たされるためには，ほとんどすべての主体が $\sum_{\lambda=1}^n \nu(C_\lambda^*(s)) = 1$ という条件の下でのみ，ゲームがプレイされることを知っている必要がある．こうしたゲームのルールは，以下の写像によって記述される．

$$\beta_\lambda : S \to [0,1],\ s \mapsto \begin{cases} 1 - \sum_{\eta \neq \lambda} \alpha_\eta(s) & \text{on } \{s | \sum_{\eta \neq \lambda} \alpha_\eta(s) < 1\} \\ 0 & \text{on } \{s | 1 \leqq \sum_{\eta \neq \lambda} \alpha_\eta(s)\} \end{cases} \tag{12}$$

β_λ の値は λ 番目の結託にとって，次のような意味を持つ．つまりその値は，他の結託に同時に参加しないようにして，(正確には，同時に他の結託に参加する主体の測度が 0 になるようにして)，λ 番目の結託に参加することが可能な主体の濃度の最大値を表している．これを λ 番目の結託の「調和規模」と呼んでおくことにする．各結託は調和規模をシグナルとして行動するが，その値に等しくなるように結託規模を定める必要などはない．結果として均衡が存在するのならば，各結託の最適規模と調和規模は一致して，(D.5) の条件 (ii) が満たされることになるのである．

(定理): 仮定 (A.1)~(A.3) の下，$((\mathbb{C}_1, \cdots, \mathbb{C}_n), (\bigcup_{C \in \mathbb{C}_1} \mathscr{X}(C), \cdots, \bigcup_{C \in \mathbb{C}_n} \mathscr{X}(C)), v)$ には均衡が存在する．

(証明): 任意に $\lambda \in \{1, \cdots, n\}$ を固定する．$\phi_\lambda : S \to \bigcup_{C \in \mathbb{C}_\lambda} \mathscr{X}(C)$, $s \mapsto f^*(C_\lambda^*(s))$ と定義すれば，f^* は (補題 3) および (補題 4) から，C_λ^* は (補題 5) からそれぞれ連続なので，ϕ_λ も連続である．(11) で定義された最適結託規模を表す写像 α_λ は (補題 5) および (補題 6) から連続であり，このことから (12) で定義された β_λ も連続である．実際，$\beta_\lambda^-((0,1]) = \{s | \sum_{\eta \neq \lambda} \alpha_\eta(s) < 1\}$ は S の開集合であり，$\beta_\lambda^-(\{0\}) = \{s | 1 \leqq \sum_{\eta \neq \lambda} \alpha_\eta(s)\}$ はその閉集合である．さらに $\psi_\lambda : S \to S_\lambda$, $s \mapsto (\phi_\lambda(s), \beta_\lambda(s))$ と定義すると，ϕ_λ と β_λ の連続性から，やはりそれも連続である．これらの主張は全ての $\lambda \in \{1, \cdots, n\}$ について成立する．(補題 2) から $\bigcup_{C \in \mathbb{C}_\lambda} \mathscr{X}(C)$ は，非空コンパクト凸集合であるから，S もまた同じ性質を持つ．$\psi : S \to S$, $s \mapsto (\psi_1(s), \cdots, \psi_n(s))$ と定義すれば，ψ は非空コンパクト凸集合からそれ自身への連続関数である．したがって Brouwer の不動点定理によって不動点 $s^* = \phi(s^*)$ が存在し，それは (D.5) の条件を満たす．　□

REFERENCES

Aliprantis, C. and Border, K. (1994): *Infinite Dimensional Amalysis, A Hitchhiker's Guide 2nd Edition,*. Springer-Verlag,.

Aumann, R. (1965): "Integrals of Set-valued Functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications 12*, 1–12.

Casting, C. and Valadier, M. (1977): *Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in Mathematics, Vol.580,*. Springer-Verlag, New York.

Debreu, G. (1969): "Neighboring Economic Agents," *La Décision ,C.N.R.S.* 85–90. Reprinted as Chapter 13 in G. Debreu, *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Halmos, P. (1950): *Measure Theory.* Springer-Verlag.

Ichiishi, T. (1983): *Game Theory for Economic Analysis.* Academic Press, New York.

Khan, M. A. (1986): "Equilibrium Points of Non Atomic Games over Banach Space," *Transactions of the American Mathematical Society 293*, 737–749.

Khan, M. A., Rath, K. P., and Sun, Y. (1997): "On the Existence of Pure Strategy Equilibria in Game with a Continuum of Players," *Journal of Economic Theory 76*, 13–46.

Michael, E. (1956): "Continuous Selections I," *Annals of Mathematics 63*(2), 361–382.

Schmeidler, D. (1973): "Equilibrium Points of Nonatomic Games," *Journal of Statistical Phisics 4*, 295–300.

Vind, K. (1964): "Edgeworth-Allocations in an Exchange Economy with Many Traders," *International Economic Review 5*, 165–177.