ライフサイクル理論による消費経路(I．方法)

論　文

ライフサイクル理論による消費経路
（I．方法）

村　田　安　雄
吉　田　しおり

序

日本人の平均寿命の伸長に対して，各個人は消費支出を生涯にわたって最適化することを考えざるを得なくなってきた。すなわち就業期間中に得るであろう全所得(可処分所得)，親から受け継ぐ遺産，および退職後に支給される年金などの生涯収入から，各個人は最大限の消費効用を全生存期間に得るように，また配偶者などへ最適額の遺産を移譲するように，毎年の消費支出の大きさを決定しなければならない，といういわゆるライフサイクル消費を考える必要性が高まってきた。日本人がすべてこのような消費行動を採ったとすると，各コーホート別の最適消費支出を全人口について集計することによって，日本のマクロ経済での消費額の将来にわたる系列が，したがってまたマクロの貯蓄も予測することができる。このような方向への研究の第一歩として，本稿は，表題に示したように，ライフサイクル理論による個人の消費行動を，異時点間の期待効用最大化の方法を用いて導出し，日本の統計データをそれに適用して，日

本人の消費パターンを求める。

現代ライフサイクル消費仮説について，村田（1993）はその理論展望を行い，また消費理論で活用されるベルマン（Bellman（1957））のダイナミック・プログラミングの方法を村田（1995）が解説しているので，詳細な理論と技法については，これらの文献にゆだねる。ライフサイクル消費の研究を実証的方向に進めた本稿を書くに当たって，依拠した主たる文献は Tachibanaki-Takata（1991）である。我々は彼らの理論展開上の誤びゅうをすべて修正し，また我々独自の発想を取り入れることによって，最適消費の算定式を可成り彼らのものと違ったものにしたが，全体の基本的考え方は彼らに負っている。他方，実証分析に当たって，彼らは20歳で1000万円の遺産を親から受けついだ場合を想定しているのに対して，我々は退職直後の66歳での資産目標を3000万円と設定する。また彼らの考えなかった年金支給と所得税を我々はモデル内に組み込むことによって，これらの変化による比較動学分析を行う予定である。

本稿の第1節は，前述のライフサイクル消費の見地に立って，就業期間中から死去するまでの，生涯消費の決定式を，退職前と退職後に2分して導出する。その際，代表的個人について，退職時までは確実に生存し，退職後は生存確率が1より小さくなるものと想定される。第2節では，各年の消費や移譲遺産の効用関数が特定化され，また生存確率の形も特定されて，最適消費の具体的算定式が求められる。第3節は，不確実性の概念が入ってくる就業期間中の所得の分布を対数正規分布によって近似し，所得分布の推定方法を解明する。第4節では，最適消費の算定式を実際に推定する場合のパラメータ・変数の具体的な値，また，推定のプロセスを見る。この推定のプロセスについては，実際のデータを用いて推定を行う手順について説明する。以上のように，本稿はモデル分析の方法を主として解説しており，モデルの推定結果については次の論稿で展開される。(なお，関係のある統計理論式を，注において，詳しく導出しておく。)

第1節　ライフサイクル消費の理論と D. P.

人生の或る時期において，今後に期待される収入と利用可能な資産を念頭におきながら，自分の生涯にわたる消費からの効用を最大化するように毎期の消費を決めるものと想定する。

平均的個人の死亡年齢を T と表し，t 歳以降 T 歳までの全消費と遺産（移譲する）からの効用を，現在価値に変換したものの総和が，最大化の目的関数であるが，同時に毎年形成される資産によって，消費全体が制約を受ける。ところで，この人の資産形成は，就業期間中は給料を受領するが，退職年齢 R を越えてからは一定の年金を受領するので，第 t 年の資産 A_tにその期に受領する収入（給料 y_tまたは年金 z）を加え，その期の消費 C_tを引いた残りを貯蓄して，その1年後の元利合計（年利子率を r（一定）とする）が第 $t+1$ 年の資産 A_{t+1} になると考える。この際，給料に一定の税率 τ が課せられるので，就業期間中の t（$\leqq R$）では，

$$A_{t+1}=(A_t+(1-\tau)y_t-C_t)(1+r) \qquad (1.1)$$

が資産形成式になる。そして退職後の t（$R+1\leqq t\leqq T$）については，

$$A_{t+1}=(A_t+z-C_t)(1+r) \qquad (1.2)$$

が資産形成式である。

平均的個人は R 歳までは確実に生きると想定され，その次の年からは正値の死亡確率 P_tが適用される。$R+1$ 歳以降の t 歳においては，この人は $1-P_t$の確率で生きるので，消費効用の（$1-P_t$）倍とその時に残す遺産の効用の P_t倍との和が，この時の全効用になる。いま t 歳末で死亡したときに残す遺産を B_t とし，その効用 $W(B_t)$ は次期に評価される大きさと考えると，死亡時点でのその効用は $W(B_t)$を1期前へ割引いたもの（その割引き率を θ とする），$(1+\theta)^{-1}W(B_t)$ に等しい。他方，t 歳における消費効用を $U(C_t)$ とすれば，当面の個人の t 歳での全効用は

$$(1-P_t)U(C_t)+P_tW(B_t)(1+\theta)^{-1}$$

になる。

いま就業期間中の t 歳において，この個人が自分の生涯にわたる効用を定式化すると，つぎのようになる。E_tを t 歳における期待値として，

$$E_t\sum_{i=0}^{R-t}\left[(1+\theta)^{-i}U(C_{t+i})+\max\left\{\sum_{j=R+1}^{T}((1-P_j)U(C_j)\right.\right.$$
$$\left.\left.+P_j(1+\theta)^{-1}W(B_j))(1+\theta)^{-(j+i)}\right\}\right] \tag{1.3}$$

そして，制約として，(1.1) 式および (1.2) 式の資産形成式が満たされるとの条件の下に，(1.3)式の目的関数が最大になるように C_tの系列を算出するのが，ライフサイクル理論による消費決定方法である。なお，(1.3) 式の最初に期待値オペレータが付されているのは，計画時点以降の就業期間中の給料 y_tが不確実な変数であって，その期間の消費 C_tはその不確実な y_tに依存しているからである。また遺産 B_tの大きさが次期の資産 A_{t+1}に等しいことに留意しておく。

(1.3) 式のような異時点間 (intertemporal) 効用は，いわゆるフォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン型の期待効用関数の一類型であって，これはベルマンのダイナミック・プログラミング (D. P.) の方法を適用するのに便利な形態である。つぎにD. P.を用いて，前記の最大問題を解こう。(その際，読者の理解が容易になるように，導出の過程を詳述する。)

D. P.の考え方は，計画期間中の任意の時点から以降で最適化が成立しなければ，全期間での最適計画ではないというものであるので，計画の最終期の最適条件を求めることから始め，つぎに最終期の1期以前から後の最適化を考えるというように，時間逆順に，各期の最適条件式を導出する。

そこで，まず退職後の任意の t 歳の期間の消費 C_tを考えると，それは次式が満たされるように決定される。

$$\max_{C_t}\sum_{i=0}^{T-t}\{(1-P_{t+i})U(C_{t+i})+P_{t+i}(1+\theta)^{-1}W(B_{t+i})\}(1+\theta)^{-i} \tag{1.4}$$

同時に制約式 (1.2) 式の条件が充足されていなければならない。D. P.のルールに従って，$t=T$ から出発すると，価値関数 $V(A_T)$ は，($B_T=A_{T+1}$と置く。)

$$V(A_T) \equiv \max_{C_T} \{(1-P_T)U(C_T)+P_T(1+\theta)^{-1}W(A_{T+1})\} \quad (1.5)$$

$$\text{s. t.} \quad A_{T+1}=(A_T+z-C_T)(1+r)$$

になる。(1.5) 式右辺の極大の一階条件（極値条件）は，{　} 内を C_T について微分したものをゼロと置いて，

$$(1-P_T)U'(C_T)=P_T(1+r)(1+\theta)^{-1}W'\{(A_T+z-C_T)(1+r)\} \quad (1.6)$$

になる。この式を満たす C_T を $\tilde{C}_T$ と記して，(1.5) 式へ代入すると，次式が得られる。

$$V(A_T)=(1-P_T)U(\tilde{C}_T)+P_T(1+\theta)^{-1}W(A_{T+1}) \quad (1.7)$$

この式の両辺を A_T で（偏）微分すると[1]，

$V'(A_T)=P_T(1+r)(1+\theta)^{-1}W'\{(A_T+z-\tilde{C}_T)(1+r)\}$ を得るが，これに（1.6）式を考慮すると，

$$V'(A_T)=(1-P_T)U'(\tilde{C}_T) \quad (1.8)$$

になる。

つぎに（1.4）式において $t=T-1$ と置くと，価値関数 $V(A_{T-1})$ は，下記のように定義される。($B_t=A_{t+1}$ $(t=T,\ T-1)$ と置く。)

$$V(A_{T-1}) \equiv \max_{C_{T-1}} [(1-P_{T-1})U(C_{T-1})+P_{T-1}(1+\theta)^{-1}W(A_T) + \{(1-P_T)U(\tilde{C}_T)+P_T(1+\theta)^{-1}W(A_{T+1})\}(1+\theta)^{-1}] \quad (1.9)$$

$$\text{s. t.} \quad A_{t+1}=(A_t+z-C_t)(1+r) \qquad (t=T,\ T-1)$$

（1.9）式右辺の極値条件は

$$(1-P_{T-1})U'(C_{T-1})=\{P_{T-1}W'(A_T)+(1-P_T)U'(\tilde{C}_T)\} \times(1+r)(1+\theta)^{-1} \quad (1.10)$$

になることが分かる。なぜならば，(1.9) 式右辺の {　} 内は $V(A_T)$ に等しく，これを C_{T-1} について偏微分すると，(1.8) 式と資産形成式を考慮して，

$$V'(A_T)\cdot(\partial A_T/\partial C_{T-1})=-(1-P_T)U'(\tilde{C}_T)(1+r)$$

となるからである。(1.10) 式を満たす C_{T-1} を $\tilde{C}_{T-1}$ と記し，(1.9) 式へ代入すると，

$$V(A_{T-1})=(1-P_{T-1})U(\tilde{C}_{T-1})+P_{T-1}(1+\theta)^{-1}W(A_T)+(1+\theta)^{-1}V(A_T) \quad (1.11)$$

になり，この式の両辺を A_{T-1}について(偏)微分して，(1.10)式を代入すると，次式が得られる。

$$V'(A_{T-1})=(1-P_{T-1})U'(\tilde{C}_{T-1}) \quad (1.8')$$

一般に，$t=T-1$，$T-2$，…，$R+1$については，上述の導出過程から類推して，つぎのように各期の価値関数を定義すればよいことが分かる。

$$V(A_t)=\max_{C_t}\ [(1-P_t)U(C_t)+P_t(1+\theta)^{-1}W(A_{t+1})+(1+\theta)^{-1}V(A_{t+1})]$$

$$\text{s. t.}\quad A_{t+1}=(A_t+z-C_t)(1+r) \quad (1.12)$$

(1.12)式は当面のD. P.問題におけるベルマン方程式である。そしてこの式の右辺の極値条件は下記のようになる。

$$(1-P_t)U'(C_t)=\{P_tW'(A_{t+1})+(1-P_{t+1})U'(C_{t+1})\}\times(1+r)(1+\theta)^{-1} \quad (1.13)$$

(1.13)式を満たす C_tを(1.12)式へ代入した後に，その両辺を A_tについて(偏)微分すると，次式が導出される。

$$V'(A_t)=(1-P_t)U'(C_t) \quad (1.14)$$

かくして，退職後($t=R+1,R+2,\cdots,T$)の最適消費を決定する式は(1.6)式と (1.13) 式になる。すなわち，C_Tの決定式は

$$U'(C_T)=\{(1+r)/(1+\theta)\}\{P_T/(1-P_T)\}\ W'(A_{T+1}) \quad (1.6')$$

であり，C_t ($t=T-1$，$T-2$，…，$R+1$) の決定式は次式である。

$$U'(C_t)=\{(1+r)/(1+\theta)\}\ [\{(1-P_{t+1})/(1-P_t)\}\ U'(C_{t+1})+\{P_t/(1-P_t)\}\ W'(A_{t+1})] \quad (1.13')$$

その際，制約条件として，資産形成の（1.2）式が満たされなければならない。

さて就業期間中の任意の t（$\leqq R$）歳以降の最適消費を求めるには，（1.3）式の目的関数を最大化するように考えればよい。$t=R$ の場合には，すでに $R+1$ 以降について，上記の方法で最適消費が得られていると想定して，この場合の価値関数 $V(A_R)$ は

$$V(A_R)=\max_{C_R}\ \{E_R\,U(C_R)+(1+\theta)^{-1}V(A_{R+1})\} \tag{1.15}$$

$$\text{s. t.}\quad A_{R+1}=\ \{A_R+(1-\tau)y_R-C_R\}(1+r)$$

（1.15）式右辺の極値条件は

$$E_R\,U'(C_R)=(1+r)(1+\theta)^{-1}V'(A_{R+1})$$

となり，$V'(A_{R+1})$ は（1.14）式を満たすので，

$$E_R\,U'(C_R)=\ \{(1+r)/(1+\theta)\}\ (1-P_{R+1})\,U'(C_{R+1}) \tag{1.16}$$

が導出され，これが最適な C_R の決定式である。この C_R を（1.15）式へ代入した後に，その両辺を A_R で（偏）微分すると，次式を得る。

$$\begin{aligned} V'(A_R)&=(1+r)(1+\theta)^{-1}V'(A_{R+1}) \\ &=E_R\,U'(C_R) \end{aligned} \tag{1.17}$$

いま y_R が第 R 期において確定していると想定して，

$$U'(C_R)=\ \{(1+r)/(1+\theta)\}\ (1-P_{R+1})\,U'(C_{R+1}) \tag{1.16'}$$

を C_R の決定式と考えることができる。

つぎに $t=R-1$ における価値関数は下記のように定義される。

$$V(A_{R-1})=\max_{C_{R-1}}\ E_{R-1}\ [U(C_{R-1})+\ (1+\theta)^{-1}V(A_R)] \tag{1.18}$$

$$\text{s. t.}\quad A_R=\ \{A_{R-1}+(1-\tau)y_{R-1}-C_{R-1})(1+r)$$

（1.18）式右辺の極値条件は，（1.17）を考慮に入れると，

$$\begin{aligned} E_{R-1}\,U'(C_{R-1})&=(1+r)(1+\theta)^{-1}E_{R-1}\,V'(A_R) \\ &=(1+r)(1+\theta)^{-1}E_{R-1}\,U'(A_R) \end{aligned} \tag{1.19}$$

になる[2)]。ここで y_{R-1} が第 $R-1$ 期において確実であると想定して

$$U'(C_{R-1}) = \{(1+r)/(1+\theta)\} E_{R-1} U'(C_R) \qquad (1.20)$$

を C_{R-1} の決定式と考えることができる。

一般に t（$\leqq R-1$）について、前述と同様の過程によって，

$$V(A_t) = \max_{C_t} E_t \left[U(C_t) + (1+\theta)^{-1} V(A_{t+1})\right] \qquad (1.21)$$

$$\text{s. t.} \quad A_{t+1} = (A_t + (1-\tau) y_t - C_t)(1+r)$$

を定義して，(1.21) 式右辺の極値条件を求めると，

$$E_t U'(C_t) = (1+r)(1+\theta)^{-1} E_t V'(A_{t+1}) \qquad (1.22)$$

になり，この極値条件を満たす C_t を (1.21) 式へ代入した後に，両辺を A_t について（偏)微分すると，(1.22) 式も考慮に入れて，

$$\begin{aligned} V'(A_t) &= (1+r)(1+\theta)^{-1} E_t V'(A_{t+1}) \\ &= E_t U'(C_t) \end{aligned} \qquad (1.23)$$

が得られる。(1.23) 式の関係は，t を $t+1$ と置いても（$t \leqq R-1$）成立するので，(1.22) 式はつぎの (1.22′) 式に書き換えることができる。

$$E_t U'(C_t) = (1+r)(1+\theta)^{-1} E_t U'(C_{t+1}) \qquad (1.22')$$

いま (1.22′) 式で，y_t は第 t 期に確実であると想定すると，

$$U'(C_t) = (1+r)(1+\theta)^{-1} E_t U'(C_{t+1}) \qquad (1.24)$$

が C_t の決定式になる[3)]。また，この代替として，(1.22) 式において y_t を確実と想定した式

$$U'(C_t) = (1+r)(1+\theta)^{-1} E_t V'(A_{t+1}) \qquad (1.24')$$

を用いることも可能であるが，我々は (1.24) 式を活用する。

第2節　最適消費の算定式

(1.6′) 式と (1.13′) 式の消費決定式に含まれる効用関数と死亡確率を特定化して，退職後の最適消費の算定式を顕示しよう。我々は，Tachibanaki-Takata (1991) の効用関数と同じく，

$$U(C_t)=(1-\gamma)^{-1}C_t^{1-\gamma} \tag{2.1}$$

$$W(B_t)=k(1-\gamma)^{-1}B_t^{1-\gamma} \tag{2.2}$$

を採用する。(2.1)式の効用関数のパラメータ γ は限界効用の弾力性に等しく，相対的危険回避度を示す。γ と k はどちらも正定数である。

また生存確率については，現実適応性と簡便性を考えて，

$$1-P_t=(1+p)^{R-t} \qquad (R\leqq t\leqq T) \tag{2.3}$$

の形に特定化する。ここに p は経験的に0.5以下の正定数と想定され，p が大きいほど，生存確率は低くなる。(2.3) 式の生存確率式を用いると，下記の関係が得られる[4)]。

$$P_t/(1-P_t)=(1+p)^{t-R}-1 \tag{2.4a}$$

$$(1-P_{t+1})/(1-P_t)=(1+p)^{-1} \tag{2.4b}$$

(2.1) 式，(2.2) 式および (2.4a，b) 式の諸式を (1.6′) 式，(1.13′) 式の両式へ代入し，資産形成式 (1.2) 式を考慮して，最適消費の算定式を導出しよう。まず (1.6′) 式より，C_T の算定式がつぎのように得られる。

$$C_T=[(1+r)(1+\theta)^{-1}\{(1+p)^{T-R}-1\}k]^{-(1/\gamma)}A_{T+1} \tag{2.5}$$

(1.2) 式を考慮して，(2.5) 式を C_T について解いた結果が次式である。

$$C_T=(A_T+z)/[1+\{(1+r)^{1-\gamma}/(1+\theta)\}k \times\{(1+p)^{T-R}-1\}]^{(1/\gamma)} \tag{2.5′}$$

つぎに (1.13′) 式より，$t=T-1$，$T-2$，…，$R+1$ について

$$C_t^{-\gamma}=\{(1+r)/(1+\theta)\}[(1+p)^{-1}C_{t+1}^{-\gamma}+k\{(1+p)^{t-R}-1\}A_{t+1}^{-\gamma}]$$

を得るが，この式の両辺に A_{t+1}^{γ} を乗じて，

$$c_t\equiv C_t/A_t \qquad (R+1\leqq t\leqq T) \tag{2.6}$$

および (1.2) 式の資産形成式を考慮に入れると，

$$[\{(A_t+z)/C_t\}-1]^{\gamma}=\{(1+r)^{1-\gamma}/(1+\theta)\}\times[(1+p)^{-1}c_{t+1}^{-\gamma}+k\{(1+p)^{t-R}-1\}]$$

となり，これを C_t について解くと，次式が導出される。

$$C_t=(A_t+z)/\ [1+\ [\{(1+r)^{1-\gamma}/(1+\theta)\}\ \{k((1+p)^{t-R}-1)+(1+p)^{-1}c_{t+1}^{-\gamma}\}]^{(1/\gamma)}] \qquad (2.7)$$

さらに，$t=T$ から時間逆順に C_t を算定するので，A_t は（1.2）式より

$$A_t=(1+r)^{-1}A_{t+1}+C_t-z \qquad (1.2')$$

によって算定される。(1.2′) 式を（2.7）式へ代入して整理すると，

$$C_t=A_{t+1}/\ [\{(1+r)/(1+\theta)\}\ \{k((1+p)^{t-R}-1)+(1+p)^{-1}\times c_{t+1}^{-\gamma}\}]^{(1/\gamma)} \qquad (2.7')$$

が最終算定式である。そして（2.6）式の右辺は（2.7′）式の C_t と（1.2′）式の A_t より算定される。

つぎに C_R の算定式を求めよう。(1.16′) 式へ（2.1）式と（2.3）式の特定化を代入すると，

$$C_R^{-\gamma}=\ \{(1+r)/(1+\theta)\}\ (1+p)^{-1}C_{R+1}^{-\gamma}$$

になり，この式の両辺に A_{R+1}^{γ} を乗じて，資産形成式 (1.1) 式を考慮することにより，

$$[[\{A_R+(1-\tau)y_R\}\ /\ C_R]-1]^{\gamma}=\ \{(1+r)^{1-\gamma}/(1+\theta)\}\times(1+p)^{-1}c_{R+1}^{-\gamma}$$

を得て，これから C_R の算定式がつぎのように求まる。

$$C_R=\ \{A_R+(1-\tau)y_R\}\ /\ [1+\ [\{(1+r)^{1-\gamma}/(1+\theta)\}\ (1+p)^{-1}\times c_{R+1}^{-\gamma}]^{1/\gamma}] \qquad (2.8)$$

ここで A_{R+1} が与えられたとして，C_R を求めるには，(1.1) 式より，

$$A_R=(1+r)^{-1}A_{R+1}+C_R-(1-\tau)y_R \qquad (1.1')$$

を得て，これを(2.8)式へ代入して，C_R の最終算定式をつぎのように導出する。

$$C_R=A_{R+1}/\ [\{(1+r)/(1+\theta)\}\ (1+p)^{-1}c_{R+1}^{-\gamma}]^{(1/\gamma)} \qquad (2.8')$$

最後に最適な C_t（$t\leqq R-1$）の算定式を導出しよう。(1.24) 式の C_t の決定式へ（2.1）式の効用関数を代入すると，

$$C_t^{-\gamma}=\{(1+r)/(1+\theta)\}\ E_tC_{t+1}^{-\gamma}=\{(1+r)/(1+\theta)\}^2E_tC_{t+2}^{-\gamma}$$
$$=\ \cdots\cdots\ =\{(1+r)/(1+\theta)\}^i\,E_tC_{t+i}^{-\gamma}$$

となるので，最適消費 C_tは次式を満たさなければならない。

$$C_t=\{(1+r)/(1+\theta)\}^{-(i/\gamma)}\,E_tC_{t+i}$$
$$(i=1,\ 2,\cdots,\ R-t) \tag{2.9}$$

他方，資産形成式 (1.1) 式を $t=R$ から始めて，時間逆順に逐次代入を行なうと，つぎのようになる。(ただし簡単化のために，途中では$(1-\tau)y_t$を y_tと書き，最後に元へ戻すことにする。)

$$\begin{aligned}A_{R+1}&=(A_R+y_R-C_R)(1+r)\\&=\{(A_{R-1}+y_{R-1}-C_{R-1})(1+r)+y_R-C_R\}(1+r)\\&=A_{R-1}(1+r)^2+(y_{R-1}-C_{R-1})(1+r)^2\\&\quad+(y_R-C_R)(1+r)\\&=A_{R-2}(1+r)^3+(y_{R-2}-C_{R-2})(1+r)^3\\&\quad+(y_{R-1}-C_{R-1})(1+r)^2+(y_R-C_R)(1+r)\\&\ \vdots\\&=A_t(1+r)^{R-t+1}+(y_t-C_t)(1+r)^{R-t+1}\\&\quad+(y_{t+1}-C_{t+1})(1+r)^{R-t}+\cdots+(y_R-C_R)(1+r)\end{aligned} \tag{2.10}$$

(2.10) 式の両辺に $(1+r)^{-(R-t+1)}$を乗ずると，

$$\begin{aligned}A_{R+1}(1+r)^{t-R-1}=A_t+y_t-C_t&+(y_{t+1}-C_{t+1})(1+r)^{-1}\\&+(y_{t+2}-C_{t+2})(1+r)^{-2}\\&+\cdots+(y_R-C_R)(1+r)^{t-R}\end{aligned}$$

になり，これをつぎのように書きなおす。(y_tを $(1-\tau)y_t$に戻して。)

$$A_t=A_{R+1}(1+r)^{t-R-1}+\sum_{i=0}^{R-t}\{C_{t+i}-(1-\tau)y_{t+i}\}(1+r)^{-i} \tag{2.11}$$

そして期待値オペレータ E_tを (2.11) 式の中の C_{t+i}と y_{t+i}に付けると，

$$A_t=A_{R+1}(1+r)^{t-R-1}+\sum_{i=0}^{R-t}\{E_tC_{t+i}-(1-\tau)E_ty_{t+i}\}(1+r)^{-i} \tag{2.11'}$$

を得る。

さて (2.9) 式の最適消費の条件を (2.11′) 式へ挿入すると，

$$A_t = A_{R+1}(1+r)^{t-R-1} + \sum_{i=0}^{R-t} \{(1+r)^{1-\gamma}/(1+\theta)\}^{(i/\gamma)} C_t$$
$$-(1-\tau)\sum_{i=0}^{R-t} E_t y_{t+i}(1+r)^{-i} \qquad (2.12)$$

になる。ここで，

$$g \equiv \{(1+r)^{1-\gamma}/(1+\theta)\}^{(1/\gamma)} \qquad (2.13)$$

とおくと，γ は正値であるので，g は1より小さい正値になる。したがって

$$D_t \equiv \sum_{i=0}^{R-t} g^i = (1-g^{R-t+1})/(1-g) \qquad (2.14)$$

である。(2.14) 式の D_tを (2.12) 式へ代入してから，C_tについて解くと，それは (2.9) 式の最適消費条件と資産形成式 (1.1) 式とを満たした，最適消費を意味する。その最適消費は

$$C_t = D_t^{-1}\ [A_t + (1-\tau)\sum_{i=0}^{R-t}(1+r)^{-i}E_t y_{t+i} - A_{R+1}(1+r)^{t-R-1}] \qquad (2.15)$$

である。

いま Tachibanaki-Takata (1991) の考え方に従って[5)]

$$L_t \equiv A_t + (1-\tau)\sum_{i=0}^{R-t}(1+r)^{-i}E_t y_{t+i} - A_{R+1}(1+r)^{t-R-1} \qquad (2.16)$$

と置くと，(2.15) 式は

$$C_t = D_t^{-1} L_t \qquad (2.15')$$

と書きかえられる。

ところで最適消費 C_tの決定式 (1.24) 式へ (2.1) 式の効用関数を想定すると，つぎのようになる。

$$C_t^{-\gamma} = \{(1+r)/(1+\theta)\}\ E_t C_{t+1}^{-\gamma} \qquad (2.17)$$

(2.17) 式の右辺へ，t を $t+1$ とした場合の (2.15’) 式を代入すると，

$$C_t^{-\gamma} = \{(1+r)/(1+\theta)\}\ D_{t+1}^{\gamma}\ E_t[L_{t+1}^{-\gamma}] \qquad (2.18)$$

が得られる。ここで Tachibanaki-Takata (1991) の採用した方式に従って

$$E_t[L_{t+1}^{-\gamma}] = \bar{L}_{t+1}^{-\gamma} + (1/2)\gamma(\gamma+1)\bar{L}_{t+1}^{-\gamma-2}\,\mathrm{Var}(L_{t+1})$$
$$= \{1+(1/2)\gamma(\gamma+1)\sigma^2\}\bar{L}_{t+1}^{-\gamma} \qquad (2.19)$$

と近似する。ただし $\bar{L}_{t+1} = E_t\ [L_{t+1}]$ とおき，また

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(L_{t+1})/(\bar{L}_{t+1})^2$$

が利用された。(2.19) 式を (2.18) 式へ代入して，$-\gamma^{-1}$べき乗すると，

$$C_t=\{(1+r)/(1+\theta)\}^{-(1/\gamma)}D_{t+1}^{-1}$$
$$\times\{1+(1/2)\gamma(\gamma+1)\sigma_{t+1}^2\}^{-(1/\gamma)}\bar{L}_{t+1} \tag{2.20}$$

が得られる。

L_{t+1}を検討しよう。(2.16) 式の L_tの定義を L_{t+1}へ伸長すると，

$$L_{t+1}=A_{t+1}+(1-\tau)\sum_{i=0}^{R-t-1}(1+r)^iE_{t+1}y_{t+1+i}-A_{R+1}(1+r)^{t-R} \tag{2.16'}$$

になり，ここで A_{t+1}へ (1.1) 式を代入して，(2.16′) 式右辺を書きなおすと，つぎのようになる。

$$L_{t+1}=A_t(1+r)-C_t(1+r)+(1-\tau)\sum_{i=0}^{R-t}\{(E_ty_{t+i})/(1+r)^i\}$$
$$\times(1+r)-\{A_{R+1}/(1+r)^{R-t}\}$$
$$=(L_t-C_t)(1+r) \tag{2.21}$$

(2.21) 式の関係を (2.20) 式へ考慮して，$\bar{L}_t=E_t[L_t]$ とおいて，

$$C_t=\{(1+r)/(1+\theta)\}^{-(1/\gamma)}D_{t+1}^{-1}$$
$$\times\{1+(1/2)\gamma(\gamma+1)\sigma_{t+1}^2\}^{-(1/\gamma)}(\bar{L}_t-C_t)(1+r)$$

を得るので，これを C_tについて解けば，C_tの算定式が導出される。すなわち

$$C_t=\bar{L}_t/[1+[\{(1+r)^{1-\gamma}/(1+\theta)\}D_{t+1}^{\gamma}\{1+(1/2)\gamma(\gamma+1)$$
$$\times\sigma_{t+1}^2\}]^{(1/\gamma)}] \tag{2.22}$$

いま (1.1) 式より得られる次式

$$A_t+(1-\tau)y_t=(1+r)^{-1}A_{t+1}+C_t$$

を (2.16) 式の L_tへ代入すると，

$$L_t=M_{t+1}+C_t$$

ただし

$$M_{t+1}=(1+r)^{-1}A_{t+1}+(1-\tau)\sum_{i=1}^{R-t}(1+r)^{-i}E_ty_{t+i}$$
$$-A_{R+1}(1+r)^{t-R-1} \tag{2.23}$$

となるので，これを (2.22) 式へ代入して，下記のように整理できる。

$$C_t=M_{t+1}/[\{(1+r)/(1+\theta)\}D_{t+1}^{\gamma}\{1+(1/2)\gamma(\gamma+1)\sigma_{t+1}^2\}]^{(1/\gamma)}$$

(2.22′)

これが C_t（$t \leqq R-1$）の最終算定式である。

Tachibanaki-Takata (1991) は (2.8) 式と (2.22) 式を C_R と C_t（$t \leqq R-1$）の算定式として提示したが，我々はそれらに代えて (2.8′) 式と (2.22′) 式を採用する。

第3節　就業期間中における所得分布の推定方法[6)]

第1～2節のモデルにおける不確実な所得分布を近似するために，対数正規分布 (log-normal distribution) を考える[7)]。単位期間における所得分布は対数正規分布にしたがうことが経験的に知られている。対数正規分布の性質は，以下のようなものである。

$x \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき，$x=\ln y$ の変換をすると，$dx=(1/y)dy$ となるから，対数正規分布の確率密度関数は，(3.1)式のようになる[8)]。確率密度関数を $g(y)$ とすると，$y>0$ のとき，

$$g(y)=\{1/(y\sigma\sqrt{2\pi})\}\exp\{-(\ln y-\mu)^2/(2\sigma^2)\} \tag{3.1}$$

$y>0$ 以外の場合，

$$g(y)=0 \tag{3.2}$$

対数正規分布の特性値は，k 次の積率（モーメント）$E(y^k)$ については[9)]，

$$E(y^k)=\exp\{(1/2)k^2\sigma^2+k\mu\} \tag{3.3}$$

平均については[10)]，

$$E(y)=\exp\{(1/2)\sigma^2+\mu\} \tag{3.4}$$

分散については[11)]，$E(y)=\bar{y}$ とすると，

$$\mathrm{Var}(y)=(\bar{y})^2\{\exp(\sigma^2)-1\} \tag{3.5}$$

標準偏差については[12)]，

$$\sigma(y)=\bar{y}\sqrt{\exp(\sigma^2)-1} \tag{3.6}$$

となる。ここで，y_tを第 t 期の所得，そして，対数変換した y_tの値を x_tとする。第 $t+1$ 期の x の値は，以下の分布にしたがうとする。

$$x_{t+1} \sim N(ax_t+b,\ s^2) \tag{3.7}$$

（3.7）式において，a は所得の成長率，b は定数項，s^2は分散を表わす。第２期の所得の期待値 $E(x_2)$ は，（3.7）式より，

$$\begin{aligned} E(x_2) &= E(ax_1+b) = aE(x_1)+b \\ &= a\mu+b \end{aligned} \tag{3.8}$$

ax_1+b とは独立の確率変数 Z を考える。Z の分布は，

$$Z \sim N(0,\ s^2) \tag{3.9}$$

とする。すると，x_2の分布は，

$$x_2 = ax_1+b+Z \tag{3.10}$$

となる。したがって，x_2の平均からの偏差は，

$$\begin{aligned} x_2-E(x_2) &= ax_1+b+Z-(a\mu+b) \\ &= a(x_1-\mu)+Z \end{aligned} \tag{3.11}$$

であり，分散は，

$$\mathrm{Var}(x_2) = E\{x_2-E(x_2)\}^2 \tag{3.12}$$

となる。

Z は，ax_1+b とは独立の確率変数で，クロス部分がないので，(3.12)式より分散は，

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(x_2) &= \{a(x_1-\mu)+Z\}^2 \\ &= a^2\sigma^2+s^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

t 期に拡張した平均と分散を求めるため，μ と σ^2について逐次代入を行なう。まず，平均については，順次，代入を行なっていくと，第 t 期の平均は，

$$\mu_t = a^{t-1}\mu+b(a^{t-2}+a^{t-3}+\cdots+1) \tag{3.14}$$

となる。（　）内は等比級数の和の形になっているので，t 期の平均は，以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \mu_t &= a^{t-1}\mu+b\ \{(1-a^{t-1})/(1-a)\} \\ &= a^{t-1}\ \{\mu-b/(1-a)\}+b/(1-a) \end{aligned} \tag{3.15}$$

分散については，順次，代入を行なっていくと，第 t 期の分散は，

$$\sigma_t{}^2 = a^{2t-2}\sigma^2 + s^2(a^{2t-4} + a^{2t-6} + a^{2t-8} + \cdots + a^2 + 1) \tag{3.16}$$

(　)内は等比級数の和の形になっているので，t 期の分散は，以下のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \sigma_t{}^2 &= a^{2t-2}\sigma^2 + s^2\ \{(1-a^{2t-2})/(1-a^2)\} \\ &= a^{2t-2}\ \{\sigma^2 - s^2/(1-a^2)\} + s^2/(1-a^2) \end{aligned} \tag{3.17}$$

よって，第 t 期の所得は，以下のような分布にしたがう。対数正規分布を LN と表わすと，

$$\begin{aligned} y_t \sim LN[&a^{t-1}\ \{\mu - b/(1-a)\} + b/(1-a), \\ &a^{2t-2}\ \{\sigma^2 - s^2/(1-a^2)\} + s^2/(1-a^2)] \end{aligned} \tag{3.18}$$

以上のような y_t の分布に基づいて，生涯所得がどのような分布にしたがうかを求めることができる。第1期から第 R 期までに得る生涯所得は，その生涯所得を Y と表わすと，

$$Y = \Sigma\ \{y_t/(1+r)^{t-1}\} \tag{3.19}$$

となり，Y の平均と分散は次のように求めることができる。

平均については，

$$E(Y) = \Sigma\ \{1/(1+r)^{t-1}\}\ E(y_t) \tag{3.20}$$

対数正規分布の一次のモーメントが，(3.4) 式のように表わされることから，

$$E(Y) = \Sigma\ \{1/(1+r)^{t-1}\}\exp\{(1/2)\sigma_t{}^2 + \mu_t\} \tag{3.21}$$

分散については，

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 \tag{3.22}$$

となる[13]。ここで，$E(Y^2)$ の部分について見ると，まず，Y^2 は，

$$\begin{aligned} Y^2 = &\ \{y_1 + y_2/(1+r) + y_3/(1+r)^2 + \cdots + y_t/(1+r)^{t-1}\}^2 \\ = &\ y_1{}^2 + \{y_2/(1+r)\}^2 + \{y_3/(1+r)^2\}^2 \\ &+ \cdots + \{y_t/(1+r)^{t-1}\}^2 \\ &+ 2\,[[y_1\{y_2/(1+r)\}] + [y_1\{y_3/(1+r)^2\}] \\ &+ \cdots + [\{y_{t-1}/(1+r)^{t-2}\}\ \{y_t/(1+r)^{t-1}\}]] \end{aligned} \tag{3.23}$$

となる。(3.23) 式の期待値 $E(Y^2)$ は，2乗の部分は，対数正規分布の2次モ

ーメントによって[14]，クロスの部分は，s 期と t 期 $(s<t)$ の積率母関数によって考えることができる[15]。クロスの部分の積率母関数の和の部分を省略して書くと[16]，$E(Y^2)$ は，

$$E(Y^2)=\Sigma\ \{(1/(1+r)^{2t-2})\exp(2\mu_t+2\sigma_t{}^2)$$
$$+2\ \Sigma\ \{1/(1+r)^{s+t-2}\}\exp(\mu_{st}+(1/2)\sigma_{st}{}^2)$$

したがって，分散は，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y)&=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2\\&=\Sigma\ \{(1/(1+r)^{2t-2})\exp(2\mu_t+2\sigma_t{}^2)\\&\quad+2\ \Sigma\ \{1/(1+r)^{s+t-2}\}\exp(\mu_{st}+(1/2)\sigma_{st}{}^2)\\&\quad-\ [\Sigma\ \{1/(1+r)^{t-1}\}\exp\{(1/2)\sigma_t{}^2+\mu_t\}]^2\end{aligned}\tag{3.24}$$

となる。

ここで，所与の a，b，s^2，μ，σ^2の下で，μ_t，$\sigma_t{}^2$，μ_{st}，$\sigma_{st}{}^2$を推定し，その値を用いて，生涯所得 Y の平均 $E(Y)$ と分散 $\mathrm{Var}(Y)$ を推定する。$E(Y)$ と $\mathrm{Var}(Y)$ は，最適消費経路を導出する際に用いることができる。

a，b，s^2，μ，σ^2を導出するために，労働省による『賃金センサス』を用いる。まず，μ は，『賃金センサス』における所定内給与額階級[17]の中央値（メディアン）の対数をとったものであるとする。メディアンを m とすると，

$$\mu=\ln(m)\tag{3.25}$$

で表わされる。

また，σ を求めるために，10分位分散係数を用いる[18]。10分位分散係数は，『賃金センサス』において与えられている。10分位分散係数は，10分偏差を用いて求める。ここで，10分偏差を D とする。また，データを大きさの順に並べて10等分した場合，それぞれの何等分目のところの値であるかを D_iで表わす（$i=1,2,\cdots,9$）。すると D は，

$$D=(1/2)(D_9-D_1)\tag{3.26}$$

である。10分位分散係数を v とすると，v は，

$$v=D/\{(D_9+D_1)/2\}\tag{3.27}$$

（3.26）式より，（3.27）式は，

$$v=(D_9-D_1)/(D_9+D_1) \tag{3.28}$$

となる。D_9+D_1は$2m$だから，

$$v=(D_9-D_1)/(2m) \tag{3.29}$$

vは対数正規分布にしたがうから，

$$\begin{aligned} v &= \{\exp(\mu+n\sigma)-\exp(\mu-n\sigma)\}/\{2\exp(\mu)\} \\ &= \{\exp(n\sigma)-\exp(-n\sigma)\}/2 \end{aligned} \tag{3.30}$$

となる。

ここで，nは標準正規分布の10パーセント点である。正規分布表を用いて，10パーセント点の逆関数を求めると，およそ1.281551になる。この値をnの値として用いる。

σはvの式から導出できる。（3.30）式より，

$$\exp(n\sigma)-2v-\exp(-n\sigma)=0 \tag{3.31}$$

$\exp(n\sigma)$ をかけると，

$$\exp(2n\sigma)-2v\{\exp(n\sigma)\}-1=0 \tag{3.32}$$

ここで，$\exp(n\sigma)$ をxとおくと，（3.32）式は，

$$x^2-2vx-1=0 \tag{3.33}$$

となる。2次方程式の解の公式により，

$$x=v\pm\sqrt{v^2+1} \tag{3.34}$$

ここでは，xは，プラスの値をとるので，

$$x=v+\sqrt{v^2+1} \tag{3.35}$$

$x=\exp(n\sigma)$ とおいているので，

$$\exp(n\sigma)=v+\sqrt{v^2+1} \tag{3.36}$$

対数をとると，

$$n\sigma=\ln(v+\sqrt{v^2+1}) \tag{3.37}$$

よって，

$$\sigma=(1/n)\ln(v+\sqrt{v^2+1}) \tag{3.38}$$

となる。

さて,『賃金センサス』においては，5歳ごとに年齢階層を分けたコーホート・データを用いている。したがって，μ_tとσ_t^2の分布が,

$$LN(\mu_t,\ \sigma_t^2) \sim LN(A\mu+B,\ A^2\sigma^2+S^2) \tag{3.39}$$

にしたがうとすると，平均については,

$$\begin{aligned}\mu_t &= A\mu+B\\ &= a^5\mu+\{b(1-a^5)\}/(1-a)\end{aligned} \tag{3.40}$$

となる。したがって,

$$a=\sqrt[5]{A} \tag{3.41}$$

また,

$$b=\{B(1-a)\}/(1-a^5) \tag{3.42}$$

が導出される。分散については,

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= A^2\sigma^2+S^2\\ &= a^{10}\sigma^2+\{s^2(1-a^{10})/(1-a^2)\}\end{aligned} \tag{3.43}$$

であるため,

$$s^2=\{S^2(1-a^2)\}/(1-a^{10}) \tag{3.44}$$

が導出される。a，b，s^2は，生涯所得の平均と分散を導出する際に用いることができる。

第4節　パラメータと算定プロセス

推定においては，それぞれのパラメータの値を表1のように仮定して行う[19]。

表1　使用するパラメータ

相対的危険回避度（γ）	2.0
利子率（r）	0.03
主観的時間選好率（θ）	0.2
遺産動機パラメータ（k）	0.5
税率（τ）	0.3
p	0.08

ここで，p は，第2節で述べられたように，

$$1-P_t=(1+p)^{R-t} \qquad (R \leqq t \leqq T)$$

で定義される正定数である。p が大きくなるほど生存確率は低くなる。ここでは，$p=0.08$ と仮定する。

また，各々の変数は，表2のような値をとるものとする。

表2　使用する変数

年金（z）	2（百万円）
退職年齢（R）	65（歳）
退職時の資産（A_{R+1}）	30（百万円）
最終期（T）	100（歳）
最終期の遺産（B_T）	（仮）10（百万円）

最適消費経路の具体的な数値の導出に際しては，退職前（$t \leqq R-1$）・退職時（$t=R$）・退職後（$t \geqq R+1$）・最終期（$t=T$）のそれぞれの推定式を用いて行なう。第1～2節において，Bellman (1957) の Dynamic Programming (D. P.) によって，最適消費経路を求めるための推定式が導出された。これらの推定式を用いて，まず，66歳時点において30（百万円）の資産 A_{R+1} を持つように，R までの消費経路 C_t を求める。その際，A_t については，時間逆順に第 $T+1$ 期から始めて，第 $R+1$ 期において A_{R+1} が30（百万円）になるように値を収束させる。第 $T+1$ 期の遺産 $A_{T+1}(B_T)$ は，収束させるための初期値として，仮に10（百万円）に設定する。第 R 期以前においての消費経路は，特定の値に収束させない。つまり，初期資産の値は定めない。したがって，A_{R+1} の値を指定したとき，初期資産の値がいくらになるのかを見ることができる。遺産相続は25歳に行なわれるものとする。Tachibanaki-Takata (1991) においては，初期資産を10（百万円），20（百万円），30（百万円）の3通りについて考えており，また，遺産相続年齢は，20歳としている。

実際の算定プロセスはつぎのようになる。第 $T+1$ 期の資産価値 A_{T+1} の値を適当に，例えば10（百万円）に設定すると，(2.5) 式によって C_T が算定され

る。つぎに（1.2′）式を用いて，

$$A_T=(1+r)^{-1}A_{T+1}+C_T-z$$

を計算し，また $c_T=C_T/A_T$ を算出する。これらの値を（2.7′）式へ代入すると，C_{T-1}が算定され，それは

$$C_{T-1}=A_T/[\{(1+r)/(1+\theta)\}\{k((1+p)^{T-1-R}-1)+(1+p)^{-1}c_T^{-\gamma}\}]^{(1/\gamma)} \quad (4.1)$$

である。さらに A_{T-1}を

$$A_{T-1}=(1+r)^{-1}A_T+C_{T-1}-z$$

より求め，$c_{T-1}=C_{T-1}/A_{T-1}$を計算して，これらの値を（2.7′）式へ代入すると，（4.1）式を1期遅らせた形になって，

$$C_{T-2}=A_{T-1}/[\{(1+r)/(1+\theta)\}\{k((1+p)^{T-2-R}-1)+(1+p)^{-1}c_{T-1}^{-\gamma}\}]^{(1/\gamma)} \quad (4.1')$$

が計算される。以下同様の過程をくり返して，

$$A_{T-2},\ C_{T-3},\ A_{T-3},\cdots,\ C_{R+2},\ A_{R+2},\ C_{R+1},\ A_{R+1}$$

を順次に算定して，最後の A_{R+1}を，その目標値の30（百万円）と比較して，もしその差が許容誤差以上ならば，その誤差を縮小するように，A_{T+1}の値を変更した後に，以前と同じプロセスによって，

$$C_T,\ A_T,\ C_{T-1},\ A_{T-1},\cdots,\ C_{R+1},\ A_{R+1} \quad (4.2)$$

を順次に計算する。この最後に得られる A_{R+1}の値と，その目標値（30）との差が許容誤差より小さければ，（4.2）の系列が $t=R+1,\ R+2,\cdots,\ T$ についての C_tと A_tの最適系列であると考える。

つぎに $A_{R+1}=30$と置き，$c_{R+1}=C_{R+1}/A_{R+1}$を計算して，これらの値を（2.8′）式へ代入すれば，C_Rが求められる。さらに（1.1）式より

$$A_R=(1+r)^{-1}A_{R+1}+C_R-(1-\tau)y_R \quad (4.3)$$

を得て，これを（2.23）式へ代入すると，M_Rはつぎのようになる。

$$M_R=(1+r)^{-1}A_R+(1-\tau)E\{(1+r)^{-1}y_R\}-A_{R+1}(1+r)^{-2} \quad (4.4)$$

この M_Rの値を（2.22′）式へ代入すると，

$$C_{R-1}=M_R/\ [\{(1+r)/(1+\theta)\}\ D_R^{\gamma}\ \{1+(1/2)\gamma(1+\gamma)\times\sigma_R{}^2\}]^{(1/\gamma)} \tag{4.5}$$

が算定される。ついで

$$A_{R-1}=(1+r)^{-1}A_R+C_{R-1}-(1-\tau)y_{R-1} \tag{4.3'}$$

$$M_{R-1}=(1+r)^{-1}A_{R-1}+(1-\tau)E\{(1+r)^{-1}y_{R-1}+(1+r)^{-2}y_R\}-A_{R+1}(1+r)^{-3} \tag{4.4'}$$

を計算して，これを (2.22′) 式へ代入して，(4.5) 式の右辺の中の R を $R-1$ に変えた形で C_{R-2} を算定できる。以下同様のプロセスによって，

$$M_R,\ C_{R-1},\ A_{R-1},\ M_{R-1},\ C_{R-2},\ A_{R-2},\cdots,\ M_{t+1},\ C_t,\ A_t \tag{4.6}$$

を順次に算定してゆく。

以上のプロセスを実際に推定するに際して，(2.23) 式の E_ty_{t+i} については，y_{t+i} の平均値(つまり，第 $t+i$ 歳の年齢階級に属する人の一人当たり所得の平均値）であると考える。具体的には，それぞれの期の各年齢階級の平均所得を，所定内給与額階級のメディアン（中央値）を用いることによって算術平均によって計算する。それによって，$(1+r)^{-i}E_ty_{t+i}$ を計算することができる。推定は，昭和59年（1984年）から平成7年（1995年）までについて行ない，この間の給与所得の（分布の）変化に伴う最適消費経路の変化を見る。データは，労働省の1984年から1995年までの『賃金センサス』を用いる。推定のためのコンピューター言語としては，FORTRAN 77を用いる。次稿において，最適消費経路の推定結果を示す。

注

1）ここでは包絡線 (envelope) 定理を適用して，(1.7) 式の左辺を全微分し，右辺を偏微分している。

2）$E_{R-1}E_R\,U'(C_R)=E_{R-1}\,U'(C_R)$ であるから。

3）これは Hall（1978）の最適消費決定式に等しい。

4）Richardson（1995）は，我々よりも単純なライフサイクル消費モデルを用いて，年金との関係で，消費行動を図形化している。その際，退職前と退職後に別々の p（(2.3) 式での）をもった生存確率の形を想定した。

5）(2.16) 式右辺の最終項を，我々は L_tの定義に加えた。この最終項のない L_tの定義は，Skinner (1988) にも見られる。

6）以下の展開は，主に Tachibanaki-Takata (1991) にしたがう。

7）対数正規分布についての説明・証明は，主に守谷 (1995) を参考にする。

8）対数正規分布の確率密度関数は，正規分布の確率密度関数より導出される。

$$x \sim N(\mu,\ \sigma^2)$$

であるとするとき，

$$x = \ln y$$

の変換を行なうと，

$$dx = (1 / y)\,dy$$

である。

正規分布の確率密度関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \{1 / (\sigma\sqrt{2\pi})\}\exp\{-(x-\mu)^2 / (2\sigma^2)\}$$

であり，したがって，対数正規分布の確率密度関数 $g(x)$ は，

$$g(x) = \{1 / (y\sigma\sqrt{2\pi})\}\exp\{-(\ln y-\mu)^2 / (2\sigma^2)\}$$

となる。

9）k 次のモーメントについての証明は以下のようになる。

原点まわりの k 次のモーメントは，x が確率変数で連続型分布をしている場合，

$$m'_k = E(x^k) = \int_R x^k f(x)\,dx$$

である。したがって，対数正規分布の場合，

$$E(y^k) = \int_0^\infty y^k g(y)\,dy$$
$$= \int_0^\infty y^k \{1 / (y\sqrt{2\pi}\,\sigma)\}$$
$$\times \exp\{-(\ln y-\mu)^2 / (2\sigma^2)\}dy$$

となる。

$$y = \exp(x)$$

より、

$$y = \exp(k \ln y)$$

である。上式に代入すると，

$$E(y^k) = \int_0^\infty \{\exp(k \ln y)\}\{1 / (y\sqrt{2\pi}\,\sigma)\}$$
$$\times \exp\{-(\ln y-\mu)^2 / (2\sigma^2)\}dy$$
$$= \int_0^\infty \{1 / (y\sqrt{2\pi}\,\sigma)\}\{\exp(k \ln y)\}$$
$$\times \exp\{-(\ln y-\mu)^2 / (2\sigma^2)\}dy$$
$$= \int_0^\infty \{1 / (y\sqrt{2\pi}\,\sigma)\}$$
$$\times \exp[\{-1 / (2\sigma^2)\}$$
$$\times \{-2\sigma^2 k \ln y + (\ln y)^2 - 2\mu \ln y + \mu^2\}]dy$$

2番目の｛　｝内は，

$$(\ln y)^2 - 2(\sigma^2 k + \mu)\ln y + \mu^2$$

$$= \{\ln y-(\sigma^2k+\mu)\}^2+\mu^2-(\sigma^2k+\mu)^2$$

上式に代入すると，

$$E(y^k)=\int_0^\infty \{1/(y\sqrt{2\pi}\,\sigma)\}$$
$$\times \exp[\{-1/(2\sigma^2)\}$$
$$\times \{\ln y-(\sigma^2k+\mu)\}^2+\mu^2-(\sigma^2k+\mu)^2]$$
$$= [\exp\{1/(2\sigma^2)\}\{(\sigma^2k+\mu)^2-\mu^2\}]$$
$$\times [1/(y\sqrt{2\pi}\,\sigma)$$
$$\times \{\int_0^\infty \exp(-1/2\sigma^2)(\ln y-(\sigma^2k+\mu)^2)dy\}]$$

上式の2番目の[　]内は，平均が $\sigma^2+\mu$ の対数正規分布の全確率であるので，1に等しい。

（なぜならば，$g(x)=\{1/(y\sigma\sqrt{2\pi})\}\exp\{-(\ln y-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$）したがって，

$$E(y^k)=\exp\{1/(2\sigma^2)\}\{(\sigma^2k+\mu)^2-\mu^2\}$$
$$=\exp\{1/(2\sigma^2)\}\{(\sigma^2k)^2+2\sigma^2k\mu+\mu^2-\mu^2\}$$
$$=\exp\{1/(2\sigma^2)\}\{(\sigma^2k)^2+2\sigma^2k\mu\}$$

指数部分は，

$$\{1/(2\sigma^2)\}\{(\sigma^2k)^2+2\sigma^2k\mu\}$$
$$=(1/2)\sigma^2k^2+k\mu$$

よって，

$$E(y^k)=\exp\{(1/2)\sigma^2k^2+k\mu\}$$

となる。

10) 平均についての証明は以下のようになる。

9）の k 次モーメントにおいて，$k=1$ とおくと，

$$E(y)=\exp\{(1/2)\sigma^2+\mu\}$$

11) 分散についての証明は以下のようになる。$E(y)=\bar{y}$ とし，$E(y)$ を k 乗すると，

$$\{E(y)\}^k=(\bar{y})^k$$
$$=\exp\{(1/2)k\sigma^2+k\mu\}$$

k 次のモーメント $E(y^k)$ と上式の $\{E(y)\}^k$ から，

$$E(y^k)=(\bar{y})^k\,[\exp\{(1/2)\sigma^2k^2+k\mu\}]\,[\exp\{(-1/2)k\sigma^2-k\mu\}]$$
$$=(\bar{y})^k\,[\exp\{(1/2)k\,\sigma^2(k-1)\}]$$

ここで，$\mathrm{Var}(y)=E(y^2)-\{E(y)\}^2$ であるから（注13参照），

$$\mathrm{Var}(y)=E(y^2)-\{E(y)\}^2$$
$$=[(\bar{y})^2\{\exp(1/2)2\sigma^2(2-1)\}]-(\bar{y})^2$$
$$=[(\bar{y})^2\{\exp(\sigma^2)\}]-(\bar{y})^2$$
$$=(\bar{y})^2\,[\{\exp(\sigma^2)\}-1]$$

12) 標準偏差についての証明は以下のようになる。

$$\sigma(y)=\sqrt{\mathrm{Var}(y)}$$

より，

$$\sigma(y)=\sqrt{(\bar{y})^2\,[\{\exp(\sigma^2)\}-1]}$$

$$=\bar{y}\sqrt{[\{\exp(\sigma^2)\}-1]}$$

13) 分散 $\mathrm{Var}(y)=E(y^2)-\{E(y)\}^2$ についての証明は以下のようになる。国沢・羽鳥 (1979) 参照。

$$E(y)=\mu$$

とおけば，平均値の性質を用いて，

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(y)&=E\{(y-\mu)^2\}\\&=E(y^2-2\mu y+\mu^2)\\&=E(y^2)-2\mu\{E(y)\}+\mu^2\\&=E(y^2)-2\mu^2+\mu^2\\&=E(y^2)-\mu^2\\&=E(y^2)-\{E(y)\}^2\end{aligned}$$

14) 2乗の部分の指数部分は，

$$\begin{aligned}E(y^2)&=\exp\{(1/2)\sigma^2 2^2+2\mu\}\\&=\exp(2\sigma^2+2\mu)\end{aligned}$$

15) クロスの部分は，第 s 期と第 t 期の y（y_s と y_t とおく）の2変数の積率母関数となる。ここでの確率変数は y_s，y_t であり，パラメータを t_s，t_t，積率母関数を $M(\cdot)$ とすると，

$$M(t_s, t_t)=\exp(t_s y_s+t_t y_t)$$

パラメータを1とおくと，

$$M(t_s, t_t)=\exp(y_s+y_t)$$

したがって，2変量正規分布の積率母関数は（国沢（1996），竹内（1963）参照），2変量正規分布の積率母関数のパラメータを ρ とすると，

$$\begin{aligned}M(t_s, t_t)=&(\mu_s t_s+\mu_t t_t)\\&+\{(1/2)(\sigma_s^2 t_s^2+2\sigma_s\sigma_t\rho t_s t_t+\sigma_t^2 t_t^2)\}\end{aligned}$$

となる。

16) 上式の $\mu_s t_s+\mu_t t_t$ の部分を μ_{st}，そして $\sigma_s^2 t_s^2+2\sigma_s\sigma_t\rho t_s t_t+\sigma_t^2 t_t^2$ の部分を σ_{st}^2 と書くと，(3.24)式の形になる。

17) 労働省『賃金センサス』における所定内給与額とは，月間決まって支給する現金給与額のうち，超過労働給与額以外のものをいう。超過労働給与額とは，時間外勤務給・深夜勤務給・休日出勤給・宿日直給・臨時の交替勤務給を指す。

18) 10分位分散係数については守谷（1995）参照。

19) パラメータの値については，一部を除いて Tachibanaki-Takata (1991) にしたがった。遺産動機パラメータ（k）は100を0.5に変更した。税率（τ），p はパラメータとして新たに設定した。また，変数のうち，年金変数（z）を新たに設定した。退職年齢（R）は，60歳を65歳に変更した。最終期（T）は，95歳を100歳に変更した。退職時の資産（A_{R+1}）は，特に指定されていなかったため，3000万円に設定した。遺産相続年齢は，20歳を25歳に変更した。また，算定の都合上，第 $T+1$ 期の遺産（B_T）を1,000万円に仮に設定した。

参考文献

Bellman, R. (1957), *Dynamic Programming,* Princeton Univ. Press.

Hall, R. E. (1978), "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis : Theory and Evidence," *Journal of Political Economy,* 86, pp. 971-987.

国沢清典編（1996），『確率統計演習 1 』，培風館.

――――・羽鳥裕久（1979），『数理統計演習』，サイエンス社.

守谷栄一（1995），『数理統計』，日本理工出版会.

村田安雄（1993），「現代ライフ・サイクル消費仮説の理論展望」，關西大学『經濟論集』，第42巻第 6 号，pp. 99-128.

―――― (1995)，「離散時間 Dynamic Programming の方法と消費計画への応用：展望」，關西大学『經濟論集』，第44巻第5号，pp. 219-251.

Richardson, D. H. (1995), "A Long-Run Simulation Model for Analysing Social Security Retirement Policies," *Economic Modelling,* 12, pp. 415-424.

Skinner, J. (1988), "Risky Income, Life Cycle Consumption, and Precautionary Savings," *Journal of Monetary Economics,* 22, pp. 237-255.

Tachibanaki, T. and S. Takata (1991), "Wealth Accumulation under Uncertainty in Income and Bequest Motive," Institute for Posts and Telecommunications Policy *Discussion Paper.*

竹内啓（1963），『数理統計学』，東洋経済新報社.