



回帰分析における外れ値についての一考察 : 標準世帯の支出行動に関する場合

著者	橋本 紀子
雑誌名	関西大学経済論集
巻	44
号	2
ページ	207-230
発行年	1994-06-30
その他のタイトル	A Note on Outliers in Linear Regression : A Case of Japanese Typical Households Behaviour
URL	http://hdl.handle.net/10112/14061

研究ノート

回帰分析における外れ値についての一考察： 標準世帯の支出行動に関する場合

橋 本 紀 子

1. 問題意識

計量経済学の分野においては、従来、ある定式化されたモデルをいかに有効に推測するかという問題にその重点がおかれてきた。しかしながら、近年、モデルの定式化、診断、比較・選択といった問題にこれまで以上の関心が寄せられるようになってきている[4, 18, 24]。すなわち、モデルに含まれている諸仮定¹⁾が妥当と考えられるか、モデルに何らかの問題がないかを検討する回帰診断、モデルの定式化自身は正しいとした上で観測データのいずれが推定結果に影響をしているかを判断する影響分析といった分析が注目を浴びるようになってきている。

本稿ではモデルを分析していく上での諸問題のうち、外れ値の問題に焦点を当て考察を行う。外れ値の存在は、変数の平均、分散や標準偏差に大きな影響を与え[28]、また回帰分析における誤差項に様々な問題を引き起こす²⁾可能性がある[19]。そこで本稿では、外れ値とはどのような点かについて整理を行い、回帰診断、影響診断により外れ値をいかに検出することができるか、また外れ値の推定結果への影響度をどのようにして測ることができるか検討を行っていき、あわせて日本の家計支出データにそれらの手法を適用した結果について述べる。

本稿の構成は以下の通りである。第2節で、観測値のうちいずれを外れ値と判断するか、その判断規準にはどのようなものがあるか、回帰分析における作用点あるいは影響点

-
- 1) たとえばモデルの定式化、誤差項に関する諸仮定（分散均一性、系列相関が無いこと、正規性）、等があげられる。
 - 2) たとえば外れ値の存在により誤差項が正規分布に従わない場合が生じる。この時最小二乗法による推定値は依然最良不偏線形推定量ではあるものの、有効性は欠如し、また推定量の分布も正規分布に従わなくなるため小標本においては χ^2 検定、 F 検定は妥当性を失ってしまう。

とはどのような点か、それぞれの観測値の作用度、影響度を測る基準にどのようなものがあるか、等の外れ値に関わる様々な指標についての考察を行う。第3節では、これらの手法を先に行った標準世帯の支出行動に関する分析の枠組み [14] に当てはめ、このデータにおける外れ値・作用点の有無、外れ値や作用点と判断された観測値が影響点であったか、それらの存在により回帰分析の結果が影響を受けていなかったか、検討を行っていく。最後に第4節で本稿での分析結果をまとめ、残された課題について述べる。

2. 外れ値に関わる回帰診断・影響分析

外れ値 (outlier) とは、観測値の中で他の観測値が示している一般的傾向とは大きく異なる動きを示す観測値のことを指す。

次のような重回帰モデルを考える。

$$y = X\beta + u \quad \dots\dots(1)$$

$$u \sim N(0, \sigma^2 I)$$

$$\text{ここで } y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & \dots & X_{kn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

この時、残差 (e_i) は現実値 (Y_i) と理論値 (\hat{Y}_i) の差として定義され、

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(2)$$

外れ値は残差の大きな観測値として定義される。ところで、この場合の「外れ値」とは、より正確に表現するならば「Y軸方向に測った外れ値」であり、観測値のX軸方向に測った位置については問題としていない。しかしながら、最小二乗法の推定結果は説明変数の平均値から外れた点(作用点)に大きく影響されることが知られており、この問題についても考慮しておく必要がある³⁾。

3) 説明変数のうちで他と大きくかけ離れた値を取る点を作用点 (leverage) と呼ぶ。回帰直線はこのような点に影響され、誤解をうむような推定結果が得られる可能性がある。

作用点は他とは大きく傾向の違う値であるが、回帰直線自身がその点に引つ張られた結果、関連する残差は小さくなっている場合があり得る。このため残差のみに着目した分析を行うと、作用点による問題は見過ごされてしまうことになる。

このような理由から、外れ値に関する回帰診断は残差 (Y軸方向) および作用点 (X軸方向) の両側面から分析する必要がある [6]。

作用点を検出する指標として、(2)式で表される行列 $\mathbf{H}^{(1)}$ の対角要素 h_{ii} が用いられることが多い [16]。

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \quad \cdots(3)$$

各要素についてみるならば、

$$\mathbf{H} = [h_{ij}] = \mathbf{x}'_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \cdots(4)$$

ここで、 $\mathbf{x}_i = (1, X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki})'$

とりわけ対角要素に着目すると [4]、

$$h_{ii} = \frac{1}{n} + \tilde{\mathbf{x}}_i'(\tilde{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{X}})^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \cdots(5)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{x}}_i = (X_{1i} - \bar{X}_1, X_{2i} - \bar{X}_2, \dots, X_{ki} - \bar{X}_k)'$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} X_{11} - \bar{X}_1 & X_{21} - \bar{X}_2 & \dots & X_{k1} - \bar{X}_k \\ X_{12} - \bar{X}_1 & X_{22} - \bar{X}_2 & \dots & X_{k2} - \bar{X}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1n} - \bar{X}_1 & X_{2n} - \bar{X}_2 & \dots & X_{kn} - \bar{X}_k \end{pmatrix}$$

より、 h_{ii} は説明変数の第 i 番目の観測値 ($X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}$) がどれだけ説明変数空間の中心点 ($\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$) から離れているかを示す指標となっていることがわかる⁵⁾。第 i 観測値が説明変数区間の中心点に位置している場合には h_{ii} はその最小値 $1/n$ をとり、逆に中心から離れて位置するほど 1 に近い大きな値をとる⁶⁾。

さて、残差 \mathbf{e} とハット行列 \mathbf{H} の関係 $\mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{u}$ より、 \mathbf{e}_i の分散は $\sigma^2(1 - h_{ii})$ となる。 σ^2 をその不偏推定量 s^2

4) (1)式の重回帰における最小二乗推定量を $\hat{\beta}$ で表した時、 $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{y}$ となることからハット行列と呼ばれる。

5) ここでは回帰モデルに定数項があるとして議論を進めている。この条件のもとでは $1/n \leq h_{ii} \leq 1$ という制約が成り立っている。また、 $\text{tr}(\mathbf{H}) = \sum h_{ii} = k+1$ である。[24]。

6) ここでは説明変数行列 \mathbf{X} は確率変数ではないとして論議を進めているので、 h_{ii} は確率変数ではない。このため、対応する確率分布を定め臨界点を設けて検定作業を進める、といった所作はできない。

h_{ii} を用いて第 i 観測値が高い作用点であるかどうかを判断する基準としては、その平均値 $(k+1)/n$ の 2 倍を超える h_{ii} に対応する点を高い作用点とする考え方 [4, 16] や、 h_{ii} が全体の観測値のうち第 i 観測値により \hat{Y}_i が決定される割合に対応していることに着目して、 $h_{ii} \leq 0.2$ ならば第 i 観測値を用いても問題はない、 $0.2 < h_{ii} < 0.5$ の場合は危険、 $0.5 \leq h_{ii}$ となった場合には、 \hat{Y} の決定が過度に第 i 観測値に依存しているためできる限りそのような観測値は除く方がよい、との考え方 [17] がある。

$$s^2 = \sum e_i^2 / (n - k - 1) \quad \dots\dots(6)$$

で置き換えると、 e_i の分散の推定値 $s^2(1 - h_{ii})$ が得られる。

残差 e_i をその標準偏差の推定値で規準化することにより、 h_{ii} により表される第 i 観測値の説明変数空間における位置の影響を除去した残差の指標を考えることができる。

$$e_i^s = \frac{e_i}{s(1 - h_{ii})^{1/2}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(7)$$

e_i^s はスチューデント化残差と呼ばれ、説明変数、被説明変数の単位に依存しない、また観測値の位置に影響されない残差である⁷⁾。

残差およびハット行列の対角要素といった指標を用いることにより、外れ値あるいは作用点の検出を行うことができる。これらの観測値は、それを推定の対象から取り除くことで推定結果が大きく変化する影響点である場合が多い。そこで、次に、推定結果への影響力を測る指標について考察を行っていく。

まず、第 i 観測値を除いたことにより最小二乗推定量にどのような変化が生じるかという観点からの検討を行う [4]。

(1)式の重回帰モデルを考える。今、説明変数行列 X から第 i 観測値に関わる行ベクトル x'_i を除いた $(n-1) \times (k+1)$ 行列を $X(i)$ 、同様に被説明変数ベクトル y から i 観測値 Y_i を除いた $(n-1)$ 次列ベクトルを $y(i)$ とした時、第 i 観測値 (x'_i, Y_i) を除いて得られる β の最小二乗推定量を $\hat{\beta}(i)$ と表すと、

$$\hat{\beta}(i) = [X'(i)X(i)]^{-1}X'(i)y(i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(8)$$

となる。全データを用いた時の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ との差、 $DFBETA_i$ は、

$$DFBETA_i = \hat{\beta} - \hat{\beta}(i) = \frac{(X'X)^{-1}x_i e_i}{1 - h_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(9)$$

となる。 $DFBETA_i$ は、残差 e_i が大きいほど、 h_{ii} が大きく x'_i の位置が説明変数空間の中心から離れているほど、大きくなるのがわかる。

さて $\hat{\beta}$ 、 $\hat{\beta}(i)$ の特定の要素、たとえば第 j 番目の要素 $\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_j(i)$ に着目すると、パラメータ推定値 $\hat{\beta}_j, \hat{\beta}_j(i)$ 間の(規準化された)差 $DFBETAS_j(i)$ は(10)式で表される。この規準化の際には、第 i 観測値を除いた推定の枠組みが考えられているため(11)式で表される

7) e_i^s は平均0、分散1の規準化された変数ではあるが t 分布には従わない。しかしながら、一応のめやすとして e_i^s が絶対値で2を越えた場合には大きな残差であると考えることができる[24]。

$s^2(i)$ を誤差項の分散の推定値⁸⁾として用いる。

$$DFBETAS_j(i) = \frac{\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_j(i)}{s(i)\sqrt{(X'X)_{jj}^{-1}}} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(10)$$

$$s^2(i) = \frac{1}{n-k-2} \sum_{l \neq i} [Y_l - x'_l \hat{\beta}(i)]^2 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(11)$$

ここで、 $(X'X)_{jj}^{-1}$ は $(X'X)^{-1}$ の第 jj 要素。

この第 i 観測値を推定から取り除いた時に推定値に生じる(規準化された)差 $DFBETAS_j(i)$ は、その値が大きいほど、第 j パラメータ 推定値への第 i 観測値による影響が考えられる⁹⁾。

残差を規準化する際に第 i 観測値を取り除いたことを考慮した誤差分散の推定量 (11式) を用いると、 R -スチューデント化残差 e_i^* が得られる¹⁰⁾。

$$e_i^* = \frac{e_i}{s(i)(1-h_{ii})^{1/2}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(12)$$

この値は誤差項が正規性の仮定を満足している時自由度 $(n-k-2)$ の t 分布に従う [5, 30] ため、絶対値で臨界値を超える大きな残差が得られた場合には Y_i が外れ値であることがわかる¹¹⁾。

また、第 i 観測値を除いた推定の枠組みにおける最小二乗推定量 $\hat{\beta}(i)$ を第 i 観測値の予測に用いた場合の予測誤差に基づく残差を考えることもできる。この時予測値 $\hat{Y}_i(i)$ は(13式で、予測誤差 $e_i(i)$ ($PRESS$ 残差¹²⁾と呼ばれる)は(14式で与えられる。

8) $s^2(i)$ もまた σ^2 の不偏推定量である。なお、 s^2 と $s^2(i)$ の間には次式のような関係が成立している： $(n-k-2)s^2(i) = (n-k-1)s^2 - e_i^2 / (1-h_{ii})$ [24]。

9) $DFBETAS_j(i)$ の値は標本数 n が大きくなるほど小さくなると考えられる [4]。そこで、ひとつのめやすとして、標本数の大きさを考慮に入れ、 $DFBETAS_j(i)$ が絶対値で $2/\sqrt{n}$ を超える場合に第 i 観測値は強い影響点であると考えられる [24]。

10) e_i^* と e_i^s の間には、 $e_i^* = e_i^s \left(\frac{n-k-2}{n-k-1-r_i^2} \right)$ という関係がある。なお、 e_i^* の名称については研究者により、外的スチューデント化残差 [9, 24, 29]、交差有効 (cross-validatory) 残差 [3]、ジャックナイフ化残差 [27]、等とも呼ばれている。ここでは [4] に従い R -スチューデント化残差という呼び方をとった。

11) e_i^* ひいては e_i^s に関連して導出される外れ値の検定統計量については [1, 23] 参照のこと。

12) $PRESS$ 残差の二乗和を $PRESS$ と呼ぶ。 $PRESS = \sum e_i^2(i) = \sum \left(\frac{e_i}{1-h_{ii}} \right)^2$ 。
 $PRESS$ 残差およびスチューデント化残差とダミー変数の関係については [22] 参照のこと。

$$\hat{Y}_i(i) = \mathbf{x}'_i \hat{\beta}(i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(13)$$

$$e_i(i) = Y_i - \hat{Y}_i(i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(14)$$

次に、第 i 観測値を推定作業から除いたことにより被説明変数の第 j 観測値の推定値にどのような変化が生じるかを考察するために、次のような指標を考える [32]。

$$DFFITs_j(i) = \hat{Y}_j - \hat{Y}_j(i) = \mathbf{x}'_j \hat{\beta} - \mathbf{x}'_j \hat{\beta}(i) = \frac{h_{ij}e_i}{1-h_{ii}} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(15)$$

この指標を \hat{Y}_j の単位から独立にするために、その標準偏差 $\sigma\sqrt{h_{jj}}$ の未知パラメータ σ を推定値 $s(i)$ で置き換えたもので規準化を行うと、

$$DFFITs_j(i) = \frac{h_{ij}e_i}{s(i)\sqrt{h_{jj}(1-h_{ii})}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(16)$$

以下の分析では第 i 観測値を削除した場合の被説明変数の推定値の効果を測る指標として、(16)式において $i=j$ の値、すなわち $DFFITs_i(i)$ に着目していく¹³⁾。

$$DFFITs_i(i) = \frac{\sqrt{h_{ii}} e_i}{s(i)(1-h_{ii})} = e_i^* \left(\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right)^{1/2} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(17)$$

ある観測値が影響点であるか検出する、すなわち第 i 観測値による推定結果への影響力を測る指標には、この $DFFITs_i(i)$ 以外に、クック [7,8] による指標 D_i 、アトキンソン [3] による T_i 、ウエルシュ [31] による W_i などが知られている。これらの指標をハット行列、スチューデント化残差、 R -スチューデント化残差等との関連を見ることができ形で定式化する¹⁴⁾と、

$$D_i = \left[\frac{e_i}{s(1-h_{ii})^{1/2}} \right]^2 \left[\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right] \frac{1}{(k+1)} = (e_i^*)^2 \left[\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right] \frac{1}{(k+1)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots(18)$$

13) すべての j について、 $DFFITs_j(i) \leq DFFITs_i(i)$ である [24] ので、被説明変数の推定結果の最大の変化は $DFFITs_i(i)$ によって示される。

14) $DFFITs_i(i)$ を含めた 4 指標において、特に問題となるような大きな影響点を検出する判断基準を考えておく必要がある。 $h_{ii} > (k+1)/n$ 、 $|t_i| > 2$ といった基準を考慮するならば、ひとつのめやすとして、次のような切断点を考えることができる [24]。

$$DFFITs_i(i) \text{ の場合} : 2\sqrt{\frac{k+1}{n-k-1}}$$

$$D_i \text{ の場合} : F_{0.05}(1, n-k-2)/(n-k-2+F_{0.05}(1, n-k-2))$$

$$T_i \text{ の場合} : 2$$

$$W_i \text{ の場合} : \frac{2}{n-k-1} \sqrt{(k+1)n(n-1)}$$

なお、 D_i の切断点としては 1 を使うという意見もある [6]。

$$T_i = |DFFITs_i(i)| \left[\frac{(n-k-1)}{(k+1)} \right]^{1/2} = |e_i^*| \left[\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right]^{1/2} \left[\frac{(n-k-1)}{(k+1)} \right]^{1/2}$$

(i=1, 2, ..., n)(19)

$$W_i = |DFFITs_i(i)| \left[\frac{(n-1)}{1-h_{ii}} \right]^{1/2} = |e_i^*| \left[\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right]^{1/2} \left[\frac{(n-1)}{1-h_{ii}} \right]^{1/2}$$

(i=1, 2, ..., n)(20)

D_i は残差 e_i または作用点 h_{ii} が 0 の時 0 となり、残差あるいは作用点に対応して大きな値をとる。(1)式第 3 項より、 $DFFITs_i(i)$ とクック指標 D_i の違いは対応している残差が e_i^* か e_i^s か、それに応じて規準化を $s(i)$ または s で行うか、および $(k+1)$ で除するか、である。また、アトキンソンの指標 T_i は、クックの指標に比べ規準化に $s(i)$ を用いていることから誤差あるいは作用点の大きな点により強調をおいた定式化になっており、ウェルシュ指標 W_i はさらに作用点の影響が強調された指標となっている。

さて、これらの指標を用いれば観測値のうち高い影響点を検出することができるが、その結果には第 i 観測値が作用点である結果と外れ値である結果の両者が混在してしまっている¹⁵⁾。この時、ハット行列の対角要素 h_{ii} と規準化残差平方 a_i^2 をそれぞれ軸にとり各観測値についてのグラフを描くならば、両者それぞれの状態を明らかにすることができる。この図を作用点 (leverage)、残差 (residual) のそれぞれの頭文字を取り L-R プロットと呼ぶ。

以上、回帰における外れ値、作用点、影響点とはどのような点か、どうすれば検出できるか、推定結果にどのような影響を与えるか、について考察を行った。第 3 節ではこれらの指標を日本の家計の支出データに当てはめ、回帰診断および影響分析を行っていく。

3. 実証例における回帰診断・影響分析

本節では、標準世帯（4人世帯で有業人員が1人である世帯）の消費支出行動に関する回帰分析について、外れ値の問題に焦点を当てて、回帰診断および影響分析を行っていく。

先に、「臨時性収入の家計消費への影響に関する一考察：標準世帯の場合」[14]で『家計調査年報』の標準世帯（勤労者世帯）のデータを用いて、消費支出に対して定期的な収

15) すなわち、影響点の中には、外れ値であるが (e_i が大きい) 作用点ではない (h_{ii} が小さい) 点、外れ値ではない (e_i が小さい) が作用点である (h_{ii} が大きい) 点、外れ値であり (e_i が大きい) しかも作用点である (h_{ii} が大きい) 点の 3 種があると考えられる。

入とボーナスを中心とする臨時性の高い収入の与える影響が異なるかを検討した¹⁶⁾。本稿では、その際用いたデータにおいて外れ値・作用点が存在していなかったか、存在していた場合その観測値が影響点であったか、考察を行っていく。

分析に用いたデータは1963年から1991年までの29年間にわたる年次データであり、各年のデータは家計の年収により階級分けがなされている。

考察対象とするモデルは

$$CS = \beta_0 + \beta_1 YR + \beta_2 YO + \beta_3 YI \quad \dots\dots(21)$$

であり、各年ごとに、階級別データを適用して最小二乗法による推定を行った。

その推定結果より、第2節で考察した外れ値、作用点の有無および影響点を考察するための諸指標を計算、評価した結果を表1に掲げた。表1には、当該年の階級数、様々な残差指標 (e_i , スチューデント化残差 e_i^s , R-スチューデント化残差 e_i^* , PRESS 残差 $e_i(i)$) により外れ値と判断された階級、ハット行列の対角要素 (h_{ii}) により作用点と考えられる階級および4つの影響力統計量 ($DFFITs$, クックの指標 D_i , アトキンソンの指標 T_i , ウェルシュの指標 W_i) により影響点と思われる階級が、各年ごとにまとめられている。なお、複数の指標により検討した項目において一部の指標のみにより外れ値あるいは影響点と判断された場合には、その階級番号に括弧をつけて表した。

今回の分析において用いているデータは、ひとつひとつの枠組みすなわちそれぞれの年について見るならば家計に関するクロスセクションデータであるので、階級の両端またはそれに近い階級に外れ値が存在しやすいのではないかという予想が成り立つ。このことはひとつには最低所得階級あるいは最高所得階級の対象年収が閉区間ではない¹⁷⁾こと、また

16) 各家計の収入を定期収入(YR), 臨時性収入(YI), その他の収入(YO)に三分し, それぞれの消費支出(CS)に与える影響が異なるか, 回帰における係数の違いについて検討を行った。

17) たとえば1991年において, 第1階級の年間収入は2,499,999円以下, 第17階級は1,500万円以上と定義されている。

各階級の対象年収は時期に応じて変化を見せているが, 参考のため, 1991年の階級区分について述べると, 第2階級(250万以上300万未満)以降第12階級(750万以上800万未満)までは50万円ごとのきざみで階級分けがなされ, その後は第13階級(800万以上900万未満), 第14階級(900万以上1,000万未満), 第15階級(1,000万以上1,200万未満), 第16階級(1,200万以上1,500万未満)と続く(単位は円)。なお, 1991年の全サンプルにおける平均年間収入は631万円であった。

回帰分析における外れ値についての一考察：
標準世帯の支出行動に関する場合（橋本）

215

表1 回帰診談・影響分析の結果

年	階級数	外	れ	値	作	用	点	影	響	点
63	16		13	16		11	13	11	13	15 16
64	15	(11)	12 13		10 11	12	14 15	11	12 13	15
65	15		12	15	1	10	13 14 15		12	15
66	15		13 14 15			12	14 15	(12)	13 14 15	15
67	15				1	12	14 15		13	(15)
68	15	1		15	1		14 15	1	12	(14) 15
69	16	1				13 14 15	16	1	15	15 16
70	16			16	1, 2		15 16	1	14 15	15 16
71	15	2			1	14 15		1, 2	14 15	
72	14	1 (2)	14		1, 2	14		1, 2	14 15	
73	16		13 14			13 14 15			13 14 15	16
74	16		14	16	2		15 16		13 14	16
75	16			16	1	13 14 15 16			13 14 16	16
76	16		14	16		13 14 15 16			13 14 16	16
77	16		14	16	1	15 16		2	14 15 16	16
78	16	3		16	1, 2	13 15 16		3	13 16	16
79	17			16 (17)		14 15 16 17			14 (15) 16 17	17
80	17			15		13	16 17		13	15 17
81	17			(15) 16	1	12	16 17	1	14 15 16 17	17
82	17			15 16 (17)	2		14 15 16 17		14 15 16 17	17
83	17	1				14 15	17	1	(15) 17	17
84	17			15		14	16 17		13 15 (16) 17	17
85	17					13 15 16 17		1	13 16 17	17
86	17			17		14 15 16 17			14 16 17	17
87	17		14	17		13 15 16 17			14 16 17	17
88	16	1	(14)		9	12 13	16	1	13 14	17
89	16		14		11	13 15 16			13 14	16
90	16					13 14 15			13 14	16
91	17		13	15 17		13 14 15	16 17		13	15 17

() 内の階級は、一部の指標で問題があると判断されたことを示す。
外れ値、作用点の欄の太字は、その階級が影響点と判断されていることを示す。

そのことに応じて他の家計に見られる一般的な行動とはかなり異なった支出形態をとる家計がそれらの階級に存在している可能性が高いと考えられるからである。

表1より、この予想は高所得者層については概ね成立していたものの、低所得者についてはあまり妥当しなかったと思われる。比較的収入の低い階級(番号の若い階級)は外れ値のみならず、作用点、影響点としても検出されることが少なかった。その一方で高所得者層¹⁸⁾は問題を生じている場合が多かった。各年で所得の高い方から3ないし4階級が外れ値、作用点の両側面で頻繁に観察され、最高収入階級についてはほとんどの年で影響点と判断された¹⁹⁾。

表1を見ると、外れ値と作用点の間には差違はあるもののその傾向には類似性が見られ、作用点と判断された階級の方が多かったことから作用点の階級が外れ値の階級を含み込むような関係が見られた。両者と影響点との関係を見てみると、表において太字で表されている階級が影響点とも判断された点であるが、外れ値と判断された階級は一つの例外を除いてすべて影響点であった。一方、作用点については必ずしもすべてが影響点という結果は得られず、影響点と判断されなかった点は概ね上記の外れ値と重なり合わなかった部分に対応していた。

外れ値においてもスチューデント化残差 e_i^s と R-スチューデント化残差 e_i^* の判断結果に差が見られるケースがいくつかあったが、影響点を検出する4つの指標の中ではクックの指標 D_i およびウェルシュの指標 W_i の結果が他と比較して異なる場合が見られた²⁰⁾。

18) 一般に家計所得の分布は正規分布しておらず右裾が長い分布であることが知られているが、脚注17)にあげた1991年の分布においても、全1万世帯のうち年収が平均以下であった世帯が約65%を占めている。ここでふれた「高所得者層」とは表1に頻繁に数字があがった世帯を指しているが、その全体に占める構成比は、1991年の場合、第13階級7.2%、第14階級4.1%、第15階級5.2%、第16階級1.3%、第17階級1.3%であった。

19) 対象年により階級値の総数が異なっている。詳しくは、表1参照のこと。

20) 養谷[24]は同様の4指標を比較して、4指標に本質的違いはないもののクックの指標 D_i には多少他と異なる検証結果が得られることを報告している。今回の分析では、養谷と同じく、4指標は多くの場合同様の判断を下すこと、クックの指標 D_i は他の3指標と異なる結論を出す場合がみられることが観察され、加えて、ウェルシュの指標 W_i が他の3指標と異なる結論を導く場合がみられた。なお、 D_i と W_i が同時に他の指標と異なる判断を下す場合はなかった。

次に個別のケースについて詳細に分析を行っていく。

図1は1991年におけるL-Rプロットである。L-Rプロットとは縦軸に作用点の指標であるハット行列の対角要素 (h_{ii})、横軸に外れ値の指標として規準化残差平方 ($a_i^2=e_i^2/$

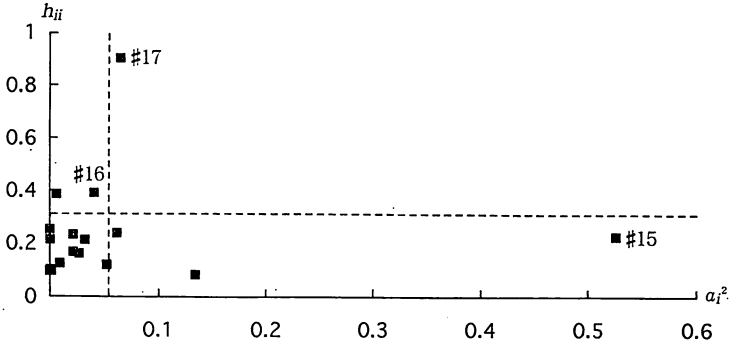


図1 L-Rプロット(1991年)

表2 残差に関する諸指標の結果(1991年)

階級	残差		スチューデント化		PRESS 残差
	残	差	誤差率(%)	残差	
1	-11609.78	-6.312	-0.6000	-0.5696	-15142.43
2	-13042.16	-6.014	-0.6444	-0.6145	-15547.58
3	6270.84	2.706	0.3620	0.3376	10205.93
4	2171.78	0.842	0.1037	0.0958	2415.55
5	1066.54	0.404	0.0544	0.0503	1357.16
6	-7743.24	-2.838	-0.3745	-0.3495	-8844.83
7	-3011.44	-1.051	-0.1434	-0.1325	-3332.50
8	483.45	0.151	0.0230	0.0213	535.47
9	29200.08	8.397	1.3790	1.4910	31801.31
10	-18273.46	-5.395	-0.8813	-0.8652	-20755.90
11	-14285.17	-4.034	-0.7281	-0.7006	-18119.62
12	-653.28	-0.170	-0.0342	-0.0315	-872.37
13	19797.44	4.600	1.0265	1.0311	25991.03
14	-11671.20	-2.806	-0.5785	-0.5481	-14000.64
15	57759.17	11.194	2.9707	8.5380	74610.41
16	-16108.10	-3.327	-0.9330	-0.9231	-26390.88
17	-20351.47	-3.317	-2.9504	-8.2430	-208872.69

$\sum e_i^2$)をとった散布図である。いずれの指標も値が大きいときにそれぞれX軸、Y軸方向の残差が大きいことを示す。図中の点線はそれぞれの指標の平均値を示しており、これらの点線よりL-Rプロットは外れ値の有無、作用点の有無に関して4つの領域に分割されている。

図1より、1991年の観測値は外れ値、作用点とも問題がないと考えられる領域に集中していることがみてとれる。影響点と判断された第15、17階級値はそれぞれ(作用点としてはほとんど問題がないが)大きな外れ値、(外れ値としてはさほどは問題がないが)大きな作用点であることが図より明らかである。このことを指標による結果から再確認しておく。表2は残差に関する諸指標の結果を示したものである。残差(e_i)の欄より絶対的な大きさでは第15階級の残差が他と比較して圧倒的に大きかったことがわかる。このことは誤差率についても第15階級のみが2桁の数値をとっていたことから裏付けられる。他の3指標においても第15階級が外れ値であるとの結論は指示されているが、規準化を行った

表3 影響力統計量の結果(1991年)

階級	DFFITs (1.1094)	クックの指標 (0.2836)	アトキンソンの指標 (2.0000)	ウェルシュの指標 (5.0746)
1	-0.3142	0.0274	0.5665	1.4354
2	-0.2693	0.0199	0.4855	1.1762
3	0.2674	0.0206	0.4821	1.3646
4	0.0321	0.0200	0.0578	0.1353
5	0.0262	0.0002	0.0476	0.1184
6	-0.1318	0.0050	0.2376	0.5635
7	-0.0433	0.0005	0.0780	0.1821
8	0.0070	—	0.0126	0.0294
9	0.4450	0.0424	0.8023	1.8577
10	-0.3189	0.0264	0.5749	1.3595
11	-0.3630	0.0356	0.6544	1.6352
12	-0.0183	0.0001	0.0329	0.0844
13	0.5767	0.0824	1.0397	2.6433
14	-0.2449	0.0167	0.4414	1.0727
15	4.6117	0.0644	8.3139	20.9659
16	-0.7375	0.0139	1.3296	3.7760
17	-25.0882	20.1589	45.2284	321.4936

太字はその階級が影響点であると判断されたことを示す。

—はその値が非常に0に近かったことを示す。

2つのスチューデント化残差、予測誤差である PRESS 残差の結果は少し趣きが異なっている。とりわけ結果が大きく変化したのは第17階級についてであり、規準化残差、予測誤差では第17階級は第15階級に匹敵する外れ値として判断される。

表3は1991年における影響力統計量の結果を示したものである。指標名の下括弧内はこの場合の切断点の値である。太字で表されているのが影響点と判断される値であるが、いずれの指標を用いても第15、17階級が影響点であると判断された²¹⁾。

次に第 i 階級を除いたときにどのように推定値に変化が生じるかについて検討を行った。結果は表4に示した。括弧内は DFBETAS 値であり、切断点は0.4851であるので、

表4 第 i 階級を除いたときの推定値の変化および DFBETAS

階級	$\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_0(i)$	$\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_1(i)$	$\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_2(i)$	$\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_3(i)$
1	2652.83 (0.065)	-0.0486 (-0.145)	0.1133 (0.176)	0.0511 (0.050)
2	-5332.92 (-0.130)	0.0248 (0.074)	-0.0230 (-0.036)	-0.1335 (-0.131)
3	8093.53 (0.196)	-0.0568 (-0.168)	0.0828 (0.128)	0.2324 (0.225)
4	379.99 (0.009)	-0.0003 (-0.001)	-0.0013 (-0.002)	0.0028 (0.003)
5	-590.91 (-0.014)	0.0067 (0.020)	-0.0135 (-0.021)	-0.0128 (-0.012)
6	1938.93 (0.047)	-0.0262 (-0.077)	0.0531 (0.082)	0.0537 (0.052)
7	219.30 (0.005)	-0.0050 (-0.015)	0.0122 (0.019)	-0.0019 (-0.002)
8	118.79 (0.003)	-0.0006 (-0.002)	0.0014 (0.002)	-0.0023 (-0.002)
9	5972.27 (0.155)	-0.0303 (-0.096)	0.0333 (0.055)	0.1949 (0.203)
10	-3995.41 (-0.099)	0.0224 (0.068)	-0.0654 (-0.103)	0.1325 (0.132)
11	9096.27 (0.223)	-0.0873 (-0.262)	0.1451 (0.227)	0.3015 (0.296)
12	-656.20 (-0.016)	0.0054 (0.016)	-0.0108 (-0.017)	-0.0081 (-0.008)
13	17286.28 (0.434)	-0.1480 (-0.453)	0.3004 (0.480)	0.2036 (0.204)
14	-5088.67 (-0.124)	0.0444 (0.132)	-0.1020 (-0.158)	-0.0024 (-0.002)
15	-45470.11 (-1.930)	0.3677 (1.905)	-0.6123 (-1.656)	-0.8829 (-1.499)
16	2504.77 (0.062)	-0.0102 (-0.031)	-0.0637 (-0.101)	0.4561 (0.454)
17	119946.73 (5.019)	-0.5719 (-2.922)	1.2773 (3.406)	-3.9077 (-6.542)

() 内は DFBETAS 値を表す。

太字は DFBETAS 値が切断点を超えていたことを示す。

21) 参考のために、被説明変数(CS)、説明変数(YR, YI, YO)の任意の2変数間の散布図を掲げる(図2~7)。これらより影響点である第15・17階級の動きが他の階級とは異なっていることが観察される。なお、YOに関連する図では第16階級の動きも異質性を見せているが、図1、表2~4のいずれの結果からも第16階級により推定結果に大きな問題が生じているとは考えられない。

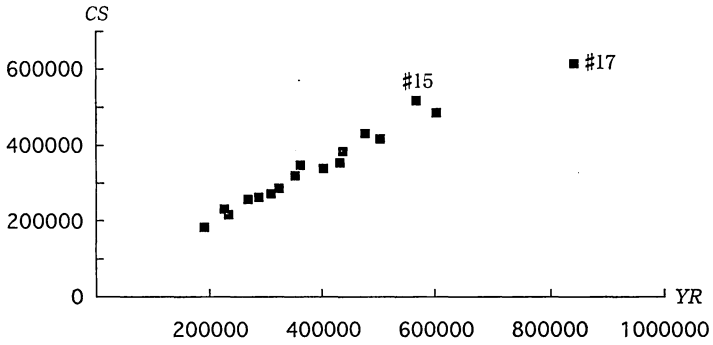


図2 散布図 (CS と YR, 1991年)

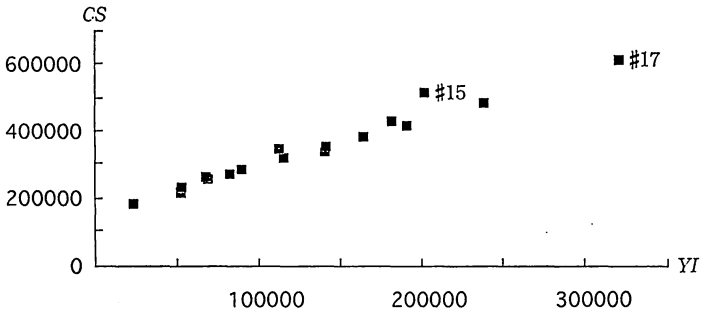


図3 散布図 (CS と YI, 1991年)

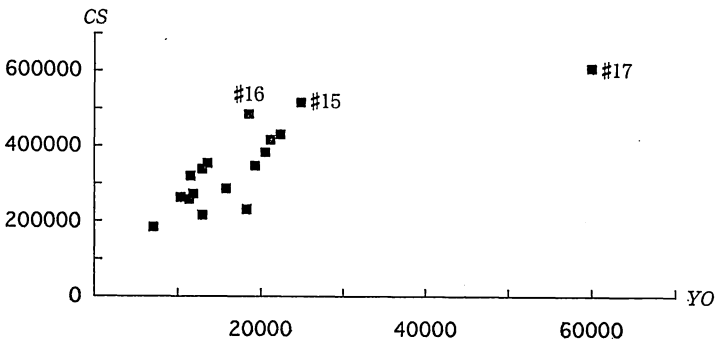


図4 散布図 (CS と YO, 1991年)

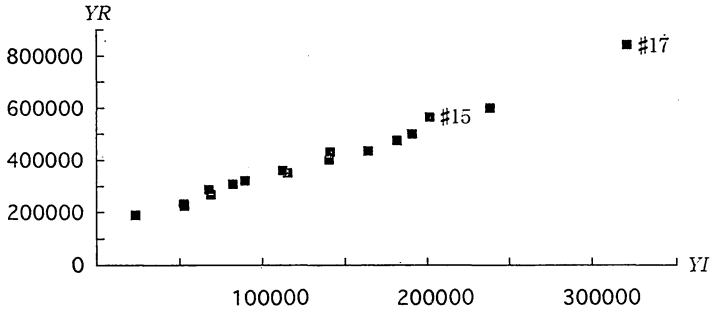


図5 散布図（YR と YI, 1991年）

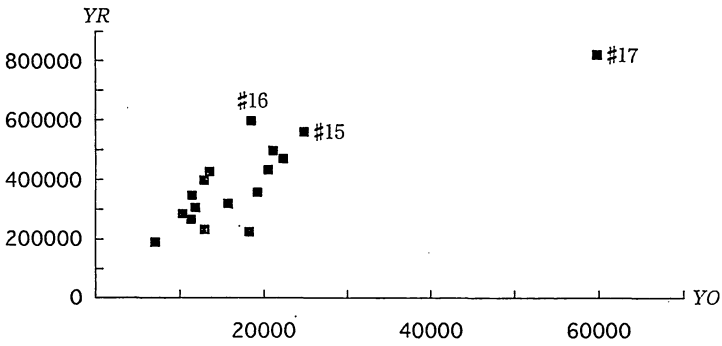


図6 散布図（YR と YO, 1991年）

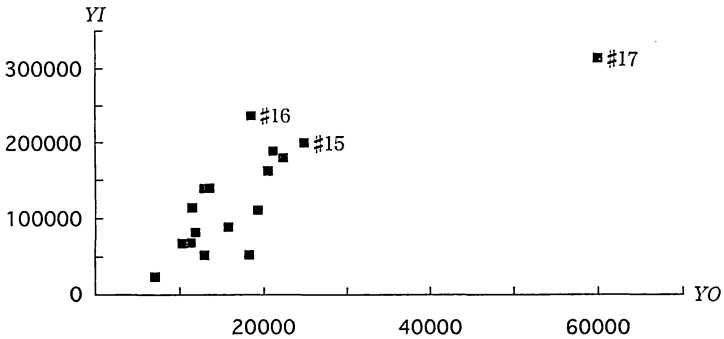


図7 散布図（YI と YO, 1991年）

第15・17階級を除いて推定を行った場合すべての推定値に大きな影響が生じること、その他の階級値を除いた場合には問題となるような変化は生じないことがわかる。第15階級と第17階級の推定値への影響を見ると、絶対値の大きさではすべての場合に第17階級が上回っており、4つのうち3つのパラメータ $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ で変化の方向(符号)が逆であることが見てとれる。

このことを別の側面から見たものが表5である。1991年の17階級のデータのうち、すべてを用いた場合、第15階級のみ除いた場合、第17階級のみ除いた場合、第15・17階級を除いた場合の4通りの最小二乗法による推定結果を示した。影響点と考えられる階級値を除くことにより大きく推定結果は左右され、また修正済み決定係数の大きさもかなり変化することがわかる。第15階級と第17階級の推定値への影響の方向が逆である場合があるため、影響点のうちいずれか一つを除いた場合と全階級あるいは2点ともを除いた場合とはパラメータの符号、大きさといった面でかなり異なる結論が導出されている。

続いて、他の年の結果についても L-R プロットを中心に考察していく²²⁾。

L-Rプロットの4つの領域を外れ値・作用点とも問題のある領域(A)、作用点のみ問題のある領域(B)、外れ値のみ問題のある領域(C)、両者とも問題のない領域(D)と名付けておく。

1991年の結果はほとんどの階級値がD領域に集中し、Aに属す(または非常にAの領域に近い)数個の影響点により推定結果が強く影響されていた。同様の結果を示したものに1963, 64, 72, 82年がある(ケース(A)と分類する)。このうち、1963, 72年ではA領域

表5 影響点に考慮した推定結果(1991年)

推定期間	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	\bar{R}^2
全階級を用いた場合	109946.8 (2.75)	0.3801 (1.16)	0.7159 (1.14)	-0.4224 (-0.42)	0.963
第15階級を除いた場合	155416.00 (6.16)	0.0124 (0.06)	1.1328 (3.41)	0.4605 (0.75)	0.986
第17階級を除いた場合	-10001.20 (-0.29)	0.9521 (4.18)	-0.5614 (-1.23)	3.4853 (3.51)	0.981
第15, 17階級を除いた場合	69507.50 (1.47)	0.4852 (1.65)	0.3598 (0.62)	2.2703 (2.20)	0.982

()内は t 値を表す。

22) 以下の本文で特に説明を加えた年の L-R プロットについては、ケース別に付表に示した。

に影響点が存在しそれらが推定値にも影響を与えていると判断されたが、64年では影響点4つのうち第15階級はDFBETAS値で判断する限り推定値への影響は見られなかった。また、82年ではA領域にある5階級のうち4つが影響点と判断されたが、推定値へは5点ともが影響していると判断された。なお、82年において $\hat{\beta}_3$ に影響したのは第16階級のみであり、他の4階級は $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ にのみ影響を及ぼした。

一方、全くA領域に階級値が含まれなかった年もあった（ケース(I), 67, 71, 75, 80, 83, 84, 90年）。これらの年ではBまたはD領域に影響点が存在しており、それらが推定値に大きく影響するケース（71, 75, 80年）²³⁾、推定値に影響する際に特定のパラメータに特定の影響点の影響を与えるケース（84, 84年）²⁴⁾、影響点に加えそれ以外の階級値が大きく推定値に影響したケース（67, 90年）²⁵⁾に三分された。

最もよく見られたケースはA, B, C, Dいずれの領域にも階級値が点在し、Aに属す点およびB, Cの領域の原点から離れた点により推定結果に影響されるものであった。ほとんどの場合は影響点（のみ）が推定結果に影響を与えていた（66, 68, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 81, 85, 86, 89年）²⁶⁾が、影響点以外の階級値が推定結果に影響したケース（65, 69, 70, 87, 88年）もみられた²⁷⁾。なお、両者どちらの場合にも特定のパラメータ

23) このうち、75, 80年のL-Rプロット図を付表に示した。

24) 83年では影響点のうち第1階級は $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 、第15階級は $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ 、第17階級は $\hat{\beta}_3$ へ影響、84年では、第13階級は $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3$ 、第16階級は $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ 、第17階級は $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_3$ へ影響、第15階級はいずれの推定値へも影響しなかった。

25) 67年では影響点の第13, 15階級は $\hat{\beta}_3$ へ、影響点とは判断されなかった第12階級が $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ へ影響した。90年では影響点の第13階級が $\hat{\beta}_3$ へ、影響点とは判断されなかった第10階級がすべてのパラメータに、第14階級は $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ に影響した。

26) このうち、77年のL-Rプロット図を付表に示した。

27) 65年では、影響点（第12・15階級）に加え第10階級が推定値に影響を与えていた。その際、2つの影響点は $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ に、第10階級は $\hat{\beta}_3$ へ影響を与えた。69年では影響点（第1・15階級）がいくつかのパラメータに影響していると判断されたが、 $\hat{\beta}_2$ に関しては影響点以外の第13階級のみDFBETAS値が切断点を超えていた。70年では影響点以外に第2階級も大きなDFBESTA値をとった。87年、88年の結果は特に着目すべき点を含んでいた。87年では影響点に加え、若干作用点の傾向が見られる4点のうち第15階級が $\hat{\beta}_3$ の結果に大きく影響すると判断された。また88年では、影響点はA領域の2点中1点、B領域の3点中1点、C領域の2点中1点の合計3階級と判断されたが、それらに加えB領域の強い作用点第9階級が $\hat{\beta}_3$ に影響を与えていると考えられる。この年の結果は、L-Rプロット図において各観測値の影響度を判断する際には、グラフ上の点の位置のみならずたとえばDFBETAS値といった別の尺度も利用する必要があることを示唆している。

へのみ影響を与える階級値が見られた。

4. 結語にかえて

本稿では、回帰分析における外れ値の問題について考察を行った。

「外れ値」という言葉はY軸方向に測って他の観測値から離れた値を指すが、X軸方向の乖離である作用点の分析、さらに、影響点という観点から観測値をとらえ、個々の推定値への影響にも配慮して、様々な回帰診断、影響分析の手法について検討した。また、これらの手法を具体的に標準世帯の支出データに適応し、外れ値に関する回帰診断、影響分析を実際に行った²⁸⁾。

回帰診断・影響分析の結果、外れ値の分析に関して単なる予想に頼るのではなく定式化された指標を用いて分析することの重要性が多く面でみられた。また、外れ値、作用点といった影響点に考慮することにより、得られる推定結果が大きく変化することが観察された。

しかしながら、今回用いた指標は未だ完全に確立されたものとは言えず、また指標間で異なる結論が導き出される場合も観察された²⁹⁾。このことは、これらの指標に関する今後の研究が一層すすめられる必要を示唆するとともに、実証分析における結論を導き出す際には多角的な側面からの分析を行うよう留意すべきであることを意味していよう³⁰⁾。

外れ値あるいは作用点、影響点に関する検出という面からしても³¹⁾、本稿の分析は非常に初歩的、試験的な段階のものであったが、外れ値の存在によりどのような問題が生じて

28) なお、今回の実証分析の結果を解釈する際には、今回用いたデータが外れ値以外にも様々な問題(たとえば、多重共線性)を抱えている[14, 15]点にも配慮すべきである。

29) たとえば、残差を用いた分析で絶対水準で見るか規準化したレベルで見るか、またどのようにして規準化するかにより得られる結論が異なった点、影響力統計量の間で異なる判断が見られた点、等があげられる。

30) たとえば、L-Rプロットの解釈の際にはグラフのみならず、DFBETAS値にも留意して分析すべきである。脚注27)参照のこと。

31) たとえば、残差分析ではグラフを重視して分析を行うべきであるとの議論がある[2, 11, 12, 13, 20]が、本稿では充分な扱いをし得なかった。なお、これらのグラフのうちでもとりわけ偏回帰プロットの重要性が強調されている[21, 24]。

また、本稿では外れ値が多数ある場合(multiple row diagnostics)[26]についても扱っていない。記して、今後の課題としたい。

いるか、すなわち誤差項の分散が不均一でないか、またその分布が正規性を失っているのではないかといった点についての検討は行っていない。さらには、外れ値が存在した場合の処理という面³¹⁾について、頑健な (robust) 推定手法 [10, 25] についても今回は扱いきれなかった。あわせて、記して今後の課題としたい。

参 考 文 献

- [1] Andrews, D. F. and D. Pregibon (1978) Finding the outliers that matter, *Journal of the Royal Statistical Society* (Series B) 40, pp. 85-93.
- [2] Anscombe, F. J. (1973) Graphs in statistical analysis *The American Statistician* 27, pp. 17-21.
- [3] Atkinson, A. C. (1981) Two graphical displays for outlying and influential observations in regression, *Biometrika* 68, pp. 13-20.
- [4] Belsley, D. A., E. Kuh and R. E. Welsch (1980) *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*, John Wiley and Sons.
- [5] Beckman, R. J. and H. J. Trussell (1974) The Distribution of an arbitrary Studentized residual and the effects of updating in multiple regression, *Journal of the American Statistical Association* 69, pp. 199-201.
- [6] Chatterjee, S. and B. Price (1991) *Regression Analysis by Example* (2nd ed.), John Wiley and Sons.
- [7] Cook, R. D. (1977) Detection of influential observation in linear regression, *Technometrics* 19, pp. 15-18.
- [8] Cook, R. D. (1977) Detection of influential observations in linear regression, *Journal of the American Statistical Association* 74, pp. 169-174.
- [9] Cook, R. D. and S. Weisberg (1982) *Residuals and Influence in Regression*, Chapman and Hall.
- [10] David, H. A. (1979) Robust estimation in the presence of outliers, pp. 61-74 of Launer, R. L. and G. N. Wilkinson (eds.) *Robustness in Statistics*, Academic Press.
- [11] Denby, L. and D. Pregibon (1987) An example of the use of graphs in regression, *The American Statistician* 41, pp. 33-38.
- [12] Goodall, C. (1983) Examining residuals, pp. 211-246 of Hoaglin, D. C., Mosteller, F. and J. W. Tukey (eds.) *Understanding Robust and Exploratory*

31) 推定手法として最小二乗法を用いることは、外れ値がないと明らかな場合には問題はないが、存在している場合には頑健な推定手法を試みる必要がある。

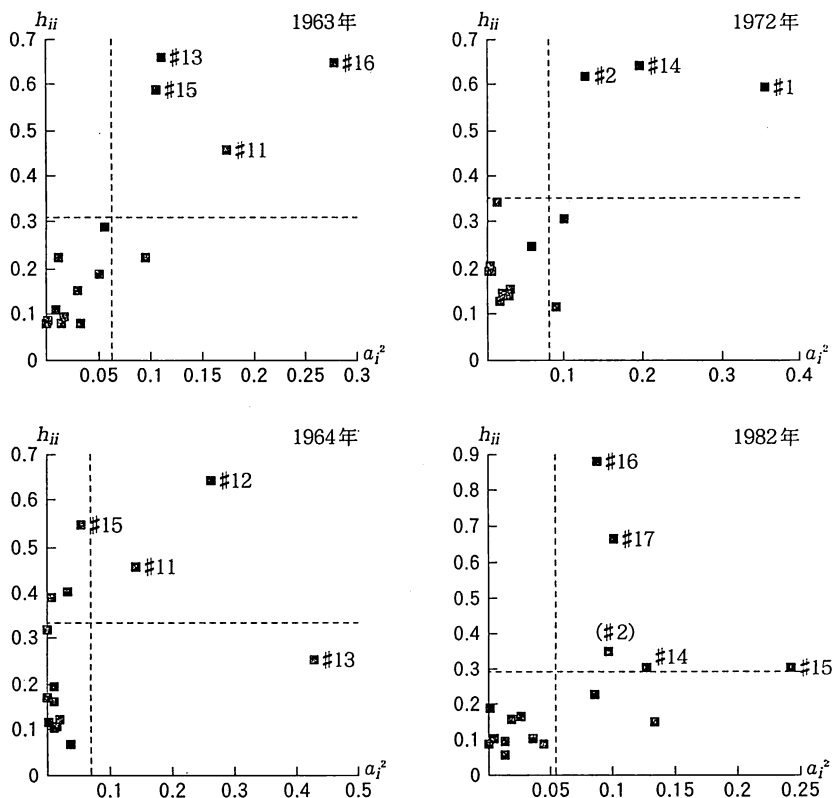
Data Analysis, John Wiley and Sons.

- [13] Hartwig, F. and B. E. Dearing (1979) *Explanatory Data Analysis*, Sage Publications.
- [14] 橋本紀子(1993)「臨時性収入の家計消費への影響に関する一考察：標準世帯の場合」関西大学『經濟論集』43, pp. 613-626.
- [15] 橋本紀子(1994)「回帰分析における多重共線性の検出と処理：標準世帯の支出行動に関する実証の場合」, 関西大学『經濟論集』44, pp. 59-79.
- [16] Hoaglin, D. C. and R. E. Welsch (1978) The hat matrix in regression and ANOVA, *The American Statistician* 32, pp. 17-22.
- [17] Huber, P. J. (1981) *Robust Statistics*, John Wiley and Sons.
- [18] Judge, G. G., Griffiths, W. E., Hill, R. C., Lütkepohl, H. and T. C. Lee (1985) *The Theory and Practice of Econometrics* (2nd ed.), John Wiley and Sons.
- [19] Judge, G. G., Hill, R. C., Griffiths, W. E., Lütkepohl, H. and T. C. Lee (1988) *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics* (2nd ed.), John Wiley and Sons.
- [20] Kennedy, P. (1992) *A Guide to Econometrics* (3rd ed.), Blackwell.
- [21] Larsen, W. A. and S. J. McCleary (1972) The use of partial residual plots in regression analysis, *Technometrics* 14, 781-790.
- [22] Maddala, G. S. (1988) *Introduction to Econometrics*, Macmillan.
- [23] Micky, M. R., Dunn, O. J. and V. Clark (1967) Note on use of stepwise regression in detecting outliers, *Computers and Biomedical Research* 1, pp. 105-109.
- [24] 養谷千風彦(1992)『計量経済学の新しい展開』多賀出版。
- [25] 養谷千風彦(1992)『計量経済学における頑健推定』多賀出版。
- [26] Rosner, B. (1975) On the detection of many outliers, *Technometrics* 17, pp. 221-227.
- [27] Rousseeuw, P. J, and A. M. Leroy (1987) *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley and Sons.
- [28] Siegel, A. F. (1988) *Statistics and Data Analysis*, John Wiley and Sons.
- [29] Velleman, P. F. and R. E. Welsch (1981) Efficient computing of regression diagnostics, *The American Statistician* 35, pp. 234-242.
- [30] Welsch, R. E. (1980) Regression sensitivity analysis and bounded-influence estimation, pp. 153-167 of Kmenta, J. and J. B. Ramsey (eds.) *Evaluation of Econometric Models*, Academic Press.
- [31] Welsch, R. E. (1982) Influence functions and regression diagnostics, pp. 149

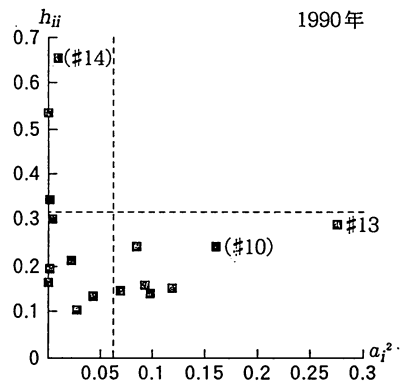
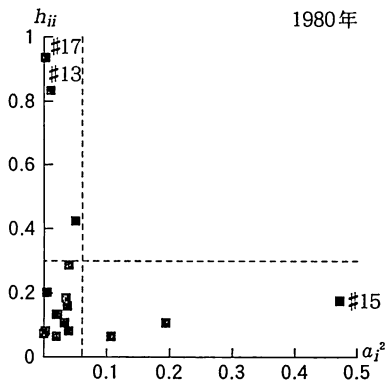
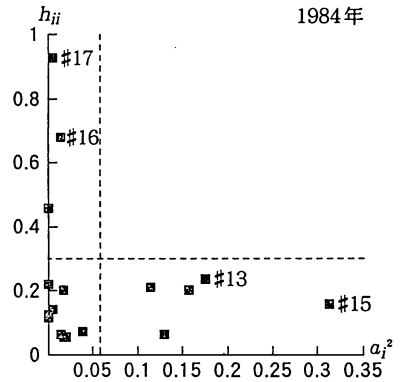
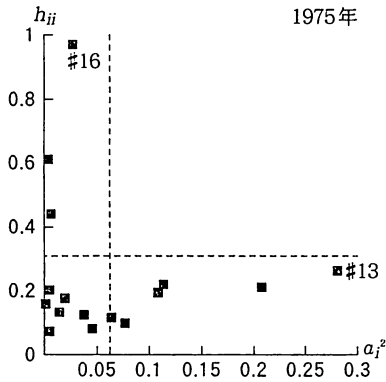
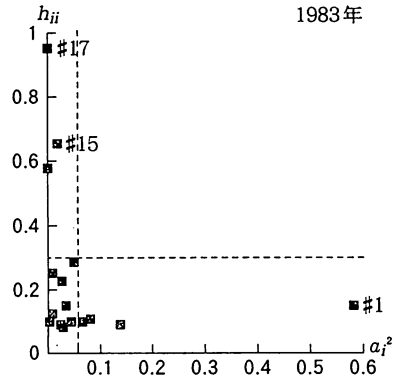
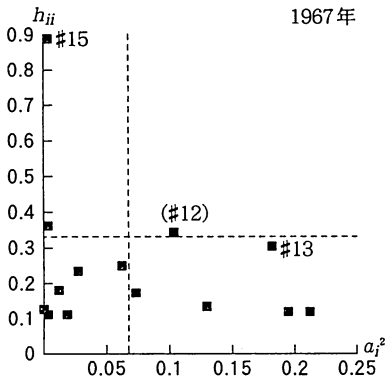
- 169 of Launer, R. L. and A. F. Sieger (eds.) *Modern Data Analysis*, Academic Press.
- [32] Welsch, R. E. and E. Kuh (1977) Linear regression diagnostics, Sloan School of Management Working Paper, 923-77, M. I. T., Cambridge, Mass.

付表 各年のL-Rプロット（1963年～1990年）

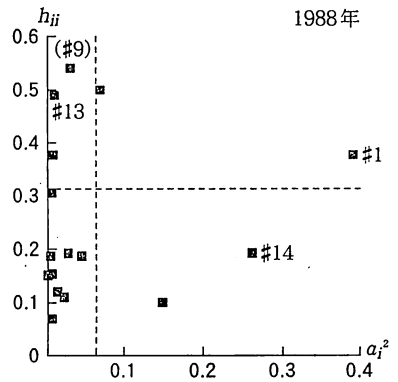
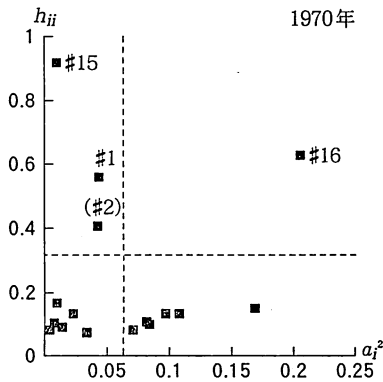
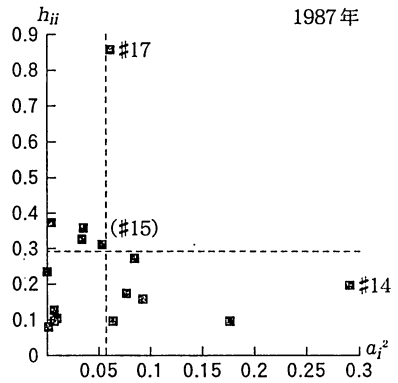
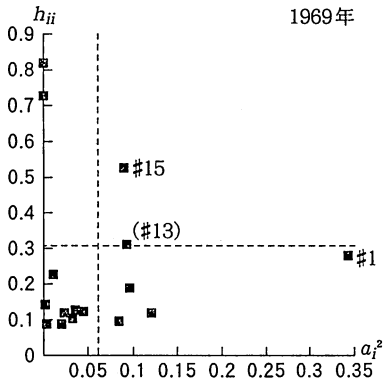
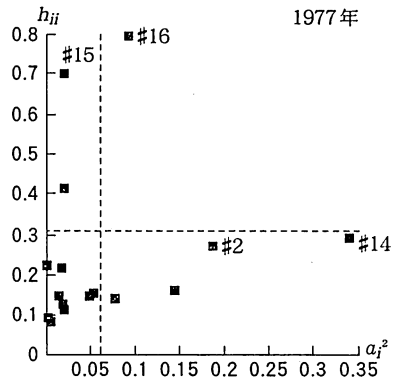
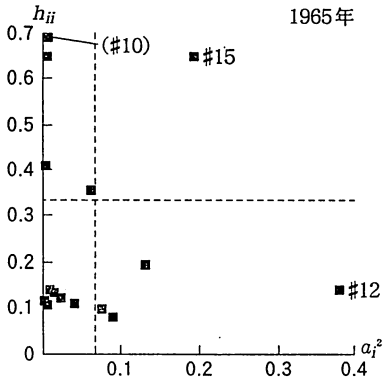
図中の階級番号はその階級が影響点であったことを示す。また、階級番号が括弧内にある時は、影響点ではないが推定値へ影響を与えた階級であることを示す。



付表（ケース（ア））



付表（ケース（イ））



付表(ケース(ウ))