残差尤度比のモーメントの近似計算 : Mathematica TMに載る形で

著者	松尾 精彦
雑誌名	關西大學經済論集
巻	43
号	4
ページ	515-529
発行年	1993-10-31
その他のタイトル	An Approximate Calculation of Moments of the Residual Likelihood Ratio Statistics using Mathematica TM
URL	http://hdl.handle.net/10112/13772

論　文

残差尤度比のモーメントの近似計算[1)]

——*Mathematica*$^{TM2)}$に載る形で——

松　尾　精　彦

1.　はじめに

誤差項として二項分布，ポアソン分布，あるいは指数分布といった一母数指数型分布族のどれかを仮定するときには，その統計モデルの全体的な適合度検定を正確に行うことが，少なくとも理論的には，可能である（このことについては松尾（1992）を参照されたい)。しかしながらその適合度検定統計量の分布について調べることは非常に困難であり，実際にはχ自乗分布に近似させて大まかな結論を得ようとするのが普通である。これら2つの方法は正確さを取るか，または簡便さを取るかの両極端であり，2つの要素についてバランスのとれた方法を見いだす必要がある。松尾（1992）では正確な方法からのアプローチを行ったが，反対に，χ自乗検定の修正を行うアプローチも考えられる。この論文では後者のアプローチを行う準備として，適合度検定統計量のモーメントの計算を行う。適合度検定統計量としては残差尤度比を用いることにする。なおここで行われる計算は，可能な限り，数式処理ソフトウェア・*Mathematica*^{TM}に載るようにする。数式がコンピュータのメモリー上にあるということは，3節で述べるように，様々な加工が正確にしかも楽にできることを意味する。

1）本稿は平成5年度科学技術研究費補助金奨励研究(A)（課題番号05780213）による研究の一部である。

2）Wolfram Research 社の登録商標

2.　定義，用語および設定

特に断らない限り，ボールド体の活字はベクトルを表し，大文字は確率変数，小文字は非確率変数を表すことにする。またギリシア文字は分布のパラメータを表すために用いられる。たとえば，$\mathbf{Y}$は確率変数からなるベクトルであり，$\mathbf{y}$ はその観測値ベクトルである。

2.1　一母数指数型分布族

正準パラメータ θ をもつ一母数指数型分布族とは，ルベーグ測度または計数測度に関して，次の密度関数をもつ分布族をいう。

$$f(y|\theta)=\exp\{y\theta-b(\theta)\}h(y) \qquad (2\text{-}1)$$

この分布族のモーメント生成関数 $M_Y(t)=E\exp\{tY\}$ は，

$$M_Y(t)=\exp\{b(\theta+t)-b(\theta)\} \qquad (2\text{-}2)$$

だから，確率変数 Y の平均，分散はそれぞれ，$EY=b'(\theta)$，$VarY=b''(\theta)$ となる。いま $\mu=\mu(\theta)=b'(\theta)$ とおくとき，$d\mu/d\theta=b''(\theta)>0$ だから，θ は μ の関数として表される。特に，$VarY=b''(\theta)$ をμの関数として $V(\mu)$ と表し，分散関数 (*variance function*) と呼ぶことにする。次の定理 (Wedderburn, 1974) は $\{\theta,\ b(\theta)\}$ と $\{\mu,\ V(\mu)\}$ との関係を説明したものである。

定理 1. ある観測値 y が与えられたときの対数尤度関数 l が次の性質，

$$\frac{dl}{d\mu}=\frac{y-\mu}{V(\mu)} \qquad (2\text{-}3)$$

を持つための必要十分条件は，密度関数がある適当な測度に対して
$\exp\{y\theta-b(\theta)\}$ の形に表されることである。

我々は，この分布族を仮定して議論をしてゆくのだが，パラメータとしては μ と θ のうち使いやすい方を，場面に応じて，用いることにする。

2.2　尤度比検定統計量

$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ のパラメータ構造についての統計的検定を行うときには，

既無仮説と対立仮説に対応する統計モデルを明確にしなければならない。既無仮説および対立仮説がともに複合仮説である場合には，この論文ではこの場合のみを考えるのだが，既無仮説のモデルは対立仮説のモデルの特別な場合になっている。既無仮説に対応するモデルを Ω_0，対立仮説に対応するモデルを Ω_1 と書くことにしよう。なお $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ はモデル Ω_0 での θ の最尤推定値 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ は Ω_1 での最尤推定値を表すものとする。母数の値が異なるかもしれないが，同じ一母数指数型分布族に従う観測値からなるベクトル $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ が与えられたときの，この仮説に対する尤度比検定統計量，

$$D(\tilde{\boldsymbol{\mu}};\hat{\boldsymbol{\mu}})=2\{l(\tilde{\boldsymbol{\mu}}|\mathbf{y})-l(\hat{\boldsymbol{\mu}}|\mathbf{y})\} \tag{2-4}$$

は，各母数推定量の漸近正規性が保証されるとき，両モデルの母数の数の差だけの自由度をもつ χ 自乗分布に漸近的に従うことが分っている。しかしながら，この論文で調べたいのは，Ω_1 が飽和モデル，つまり観測の数だけパラメータが与えられる場合であり（この場合の尤度比を残差尤度比と呼び，この統計量をもちいて全体的な適合検定を行うことにする），(1-1) の形の密度関数に対しては，$\tilde{\mu}_i=y_i$ となるので，y_i の正規近似が良好である必要があるのだが，特別な場合を除いて，このことはあまり期待できない。そこで，McCullagh and Nelder (1989) の p. 36 にも書いてあるように，つぎの残差尤度比統計量の性質をできるかぎり調べ上げる必要がある。

$$D(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\mu}})=2\{l(\mathbf{y}|\mathbf{y})-l(\hat{\boldsymbol{\mu}}|\mathbf{y})\} \tag{2-5}$$

この統計量は次の様に書き換えられることに注意しよう。

$$\begin{aligned}D(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\mu}})&=D(\mathbf{y};\boldsymbol{\mu})-D(\hat{\boldsymbol{\mu}};\boldsymbol{\mu})\\&=\sum_{i=1}^{n}\{D(y_i;\mu_i)-D(\hat{\mu}_i;\mu_i)\}\end{aligned} \tag{2-6}$$

この論文では，$\mu_i=\mu$ (for all i) の場合に限って，$D(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\mu}})$ の平均および分散の近似計算をしてゆくことにする。このとき，$\hat{\mu}=\bar{y}$ だから，

$$D(y;\hat{\boldsymbol{\mu}})=\sum_{i=1}^{n}D(y_i;\mu)-nD(\bar{y};\mu) \tag{2-7}$$

となることに注意しよう。なお，μ_i に回帰構造をいれる場合の取り扱いについては，かなり厄介なため，稿をあらためて議論する予定である。

3. 残差尤度比の平均および分散の計算

この節での計算は，数式処理ソフトウェア・*Mathematica*^{TM}を出来る限り活用しながら，行ってゆくことにする。ここで重要なことは，数式処理ソフトウェアは計算の補助的な道具である，ということだ。つまり具体的な指示は手計算のテクニックを持つ人がしなければならない。手計算の手続きを数式処理ソフトウェア上で再現することは，慣れないうちは特に，面倒なことではあるが，一度コンピュータのメモリーに載せてしまえば正確さと共に様々な可能性（好みの精度をもつ計算，設定を変えた時の計算が飛躍的に簡単になる，計算結果を他の式に簡単に代入できる等）をもたらすのである。繰り返しになるが，数式処理ソフトウェアはうっとうしくて機械的な計算から人間を解放するものであって，方針はあくまで人間が与えてやらなければならないことに注意されたい。

3.1 $D(y;\mu)$ の展開

まず手計算の手順を追って行こう。μ_i の最尤推定値は y_i 自身だから，$D(y;\mu)$ をyについてμのまわりに Taylor 展開するとき，一次の項は 0 であることは展開する前から分っている。$(y-\mu)$ という項を残しながら展開すると，

$$\begin{aligned}D(y;\mu)&=2[\{y\,\theta(y)-b(\theta(y))\}-\{y\,\theta(\mu)-b(\theta(\mu))\}]\\&=2[y\{\theta(y)-\theta(\mu)\}-\{b(\theta(y))-b(\theta(\mu))\}]\\&=2\{(y-\mu)+\mu\}\left\{\frac{d\theta(\mu)}{d\mu}(y-\mu)+\frac{d^2\theta(\mu)}{d\mu^2}\frac{(y-\mu)^2}{2!}\right.\\&\quad\left.+\frac{d^3\theta(\mu)}{d\mu^3}\frac{(y-\mu)}{3!}+\cdots\right\}+\left\{\frac{db(\theta(\mu))}{d\mu}(y-\mu)\right.\\&\quad\left.+\frac{d^2b(\theta(\mu))}{d\mu^2}\frac{(y-\mu)^2}{2!}+\frac{d^3b(\theta(\mu))}{d\mu^3}\frac{(y-\mu)^3}{3!}+\cdots\right\}]\end{aligned}\qquad(3\text{-}1)$$

と展開される。そこで，

$$\frac{db(\theta(\mu))}{d\mu}=\frac{db(\theta}{d\theta}\bigg|_{\theta=\theta(\mu)}\times\frac{d\theta}{d\mu},\ \frac{db(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=\theta(\mu)}=\mu \tag{3-2}$$

という情報を(3-1)に与えることにより，最終的に，

$$D(y;\mu)=2\left\{\frac{d\theta}{d\mu}\frac{(y-\mu)^2}{2!}+\frac{d^2\theta}{d\mu^2}\frac{(y-\mu)^3}{3!}+\frac{d^3\theta}{d\mu^3}\frac{(y-\mu)}{4!}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{d^{(i)}\theta}{d\mu^{(i)}}\frac{(y-\mu)^{i+1}}{(i+1)!}+\cdots\right\} \tag{3-3}$$

を得る。さて，この式展開を $Mathematica^{TM}$ に指示してゆこう。操作手順は $D(y;\mu)$ に具体的な形を与え，テイラー展開を行い，その結果に(3-2)の情報を与えて纏めることである。以後，**Courier bold** で書かれた部分は $Mathematica^{TM}$ に実行させる命令を表すものとする。

```
l[mu_]: =y theta[mu]-btheta[mu]
Dev[y_,mu_]:=2 (l[y]-l[mu])
```

と定義すれば，

```
Dev[y, mu]
```

により，$D(y;\mu)$ が与えられる。次に $D(y;\mu)$ を y について μ のまわりで Taylor 展開するために，例えば10次の項までなら，

```
Series[Dev[y, mu], {y, mu, 10}]
```

とすればよい。最後に(3-2)の情報を与えて(3-3)の形に持って行くために次のような変換ルール (transformation rule) を与える。

```
brule=Derivative[i_][btheta][mu] :>
        D[mu D[theta[mu], mu], {mu, i-1}]
```

ここで，**Derivative[i] [btheta] [mu]** は $d^{(i)}btheta(\mu)/d\mu^{(i)}$ を扱うときの *Mathematica* の内部形式であり，変換ルールは内部形式で与える方が確実である。ここに限らず *Mathematica* についての詳しいことは Wolfram (1991) を参照されたい。この変換ルールは Taylor 展開の命令に繋げて，

```
Series[Dev[y, mu], {y, mu, 10}] /. brule
```

という形で利用される。更に，出てきた結果を整理し，剰余項を取り除いて普

通の式にするために，

Normal[Simplify[%]]

とする。ただし%は直前の出力結果を指すものである。このようにして得られた展開式に，例えば **DevSeries** という名前をつけて，後々の計算で利用してゆく。

DevSeries＝%

なお，展開の次数は自由に設定できるので，必要に応じて高次の展開が利用できることに注意されたい。

こうして得られた展開式は一母数指数型分布族にたいして一様に成り立つものだから，ポアソン分布，二項分布，指数分布といった分布族に対して有効である。なお，具体的な分布族に対する展開を得るには，変換ルールを用いて **DevSeries** を書き換える必要が生じる。扱い方は同じなので，ポアソン分布を例に説明してゆこう。この分布族の場合，

$d^{(i)}\theta/d\mu^{(i)}$ を $(d^{(i-1)}/d\mu^{(i-1)})\ (1/V(\mu))$ で置き換えればよく，ポアソン分布では分散関数が $V(\mu)=\mu$ だから，

```
PoissonDevSeries=DevSeries/.
        Derivative[i_][thtea][mu] :>
                D[1/mu, {mu, i-1}]
```

とすることにより得られる。つまり，分布族の分散関数を与えさえすればよいのである。

3.2　$D(y,\ \mu)$ の平均分散の計算

この分節以降では，具体的な分布族（ここではポアソン分布）をあたえて計算してゆくが，他の分布族でも同様に計算出来ることに注意されたい。さて，(3-1)で得られた **PoissonDevSeries** は，10次まで計算するとき，つぎの展開を持つ。

$$D(y;\mu)=\frac{(y-\mu)^2}{\mu}-\frac{(y-\mu)^3}{3\mu^2}+\frac{(y-\mu)^4}{6\mu^3}-\frac{(y-\mu)^5}{10\mu^4}+\frac{(y-\mu)^6}{15\mu^5}$$
$$-\frac{(y-\mu)^7}{21\mu^6}+\frac{(y-\mu)^8}{28\mu^7}-\frac{(y-\mu)^9}{36\mu^8}+\frac{(y-\mu)^{10}}{45\mu^9}+\cdots \qquad (3\text{-}4)$$

我々は $(y-\mu)^k$ を展開することはないので，$y-\mu$ を **yMINUSmu** で置き換えてやれば不必要な展開を避けることが出来る。そこで，

PoissonDevSeres=PoissonDevSeries /.

Power[y−mu, i_]−>Power[yMINUSmu, i]

とし，$D(y;\mu)$ の自乗の展開を，

PoissonDevSeriesSq=Expand[PoissonDevSeries^2]

により求める。この展開は(3-4)を見れば分るように $(y-\mu)^{12}$ までしか正確ではないので，それ以降の項を除去するために，

PoissonDevSeriesSq

=DeleteCases[PoissonDevSeriesSq,

Times[__, Power[yMINUSmu, i_] /; i>12]]

とする。以上の手順により，$D(y;\mu)$ の自乗の展開が次のように得られる。

$$[D(y;\mu)]^2=\frac{(y-\mu)^4}{\mu^2}-\frac{2(y-\mu)^5}{3\mu^3}+\frac{4(y-\mu)^6}{9\mu^4}-\frac{14(y-\mu)^7}{45\mu^5}$$
$$+\frac{41(y-\mu)^8}{180\mu^6}-\frac{109(y-\mu)^9}{630\mu^7}+\frac{853(y-\mu)^{10}}{6300\mu^8}$$
$$-\frac{19(y-\mu)^{11}}{175\mu^9}+\frac{1679(y-\mu)^{12}}{18900\mu^{10}}+\cdots \qquad (3\text{-}5)$$

これらの展開の平均値を求めるためには，確率変数 Y の平均値 μ のまわりのモーメントの計算を行わなければならない。$Y-\mu$ のモーメント生成関数は(2-2)に $b(\theta)=\exp\{\theta\}$ を代入することにより得られて，

$$M_{Y-\mu}(t)=\exp\{b(\theta+t)-b(\theta)-\mu t\}=\exp\{\mu(e^t-1-t)\} \qquad (3\text{-}6)$$

となる。このモーメント生成関数を k 回微分し，$t=0$ としてやれば k 次モーメントが求められるので，

MoGenPo=Exp[mu(Exp[t]−1−t)]

と定義し，

Do[MoPo[i]=(D[MoGenPo, {t, i}] /. t->0), {i, 1, 10}]

とすれば，ポアソン変量の平均値の回りのモーメントの配列が，次のように，得られる。

$$E(Y-\mu)=0$$

$$E(Y-\mu)^2=\mu$$

$$E(Y-\mu)^3=\mu$$

$$E(Y-\mu)^4=\mu+3\mu^2$$

$$E(Y-\mu)^5=\mu+10\mu^2$$

$$E(Y-\mu)^6=\mu+25\mu^2+15\mu^3$$

$$E(Y-\mu)^7=\mu+56\mu^2+105\mu^3$$

$$E(Y-\mu)^8=\mu+119\mu^2+490\mu^3+105\mu^4$$

$$E(Y-\mu)^9=\mu+246\mu^2+1918\mu^3+1260\mu^4$$

$$E(Y-\mu)^{10}=\mu+501\mu^2+6825\mu^3+9450\mu^4+945\mu^5 \tag{3-7}$$

この結果を(3-4)，(3-5) に代入してゆけばよい。それには，

MeanPoDevSer=PoissonDevSeries /.

Power[yMINUSmu, i_]->MoPo[i]

とすればよい。この展開は $(1/\mu)^4$ の項まで正確に求められるので，

MeanPoDevSer=DeleteCases[MeanPoDevSer,

Times[_, Power[mu, i_] /; i<-4]]

とすることで，$E\,D(y;\mu)$ は（ここから後は，文脈によって，y を確率変数としたり，観測値としたりすることに注意されたい），

$$E\,D(y;\mu)=1+\frac{1}{6\mu}+\frac{1}{6\mu^2}+\frac{19}{60\mu^3}+\frac{9}{10\mu^4}+\cdots \tag{3-8}$$

となる。全く同様に $E[D(y;u)]^2$ は，**MeanPoDevSerSq**として，

MeanPoDevSerSq=PoissonDevSeriesSq /.

Power[yMNUSmu, i_]->MoPo[i]

```
MeanPoDevSerSq=Collect[MeanPoDevSerSq, mu]
MeanPoDevSerSq=DeleteCases[MeanPoDevSerSq,
    Times[__, Power[mu, i_] /; i<-4]]
```

として，

$$E[D(y;\mu)]^2=3+\frac{1}{\mu}+\frac{61}{36\mu^2}+\frac{55}{12\mu^3}+\frac{169}{10\mu^4}+\cdots \tag{3-9}$$

となり，$D(y;\mu)$ の分散は，

```
VarPoDevSer=Expand[MeanPoDevSerSq
          -MeanPoDevSer^2]
VarPoDevSer=DeleteCases[VarPoDevSer,
          Times[__, Power[mu, i_] /; i<-4]]
```

により得られ，

$$Var\ D(y;\mu)=2+\frac{2}{3\mu}+\frac{4}{3\mu^2}+\frac{701}{180\mu^3}+\frac{449}{30\mu^4}+\cdots \tag{3-10}$$

となる。この結果をもとにして，(3-8)を1に(3-10)を2に，つまり自由度1の χ 自乗分布の平均分散に，近づけるための変換を考えることができるが，ここではこれ以上追及しない。これでこの分節の目標は達せられたが，ついでに，次の分節で必要となるため，$D(\bar{y};\mu)$ の平均と分散とを求めることにする。$(\bar{y}-\mu)$ のモーメント (**MoPoMe** という配列に割り当てる) は，モーメント生成関数が，

$$\begin{aligned}M_{\bar{Y}-\mu}(t)&=E\left[\exp\left\{\frac{(Y_1-\mu)+\cdots+(Y_n-\mu)}{n}t\right\}\right]\\&=\prod_{i=1}^{n}M_{Y-\mu}\left(\frac{t}{n}\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\mu\left(\exp\left(\frac{t}{n}\right)-1-\frac{t}{n}\right)\right\}\\&=\exp\left\{n\mu\left(\exp\left(\frac{t}{n}\right)-1-\frac{t}{n}\right)\right\}\end{aligned} \tag{3-11}$$

だから，これを **MoGenPoMe** として，

MoGenPoMe=Exp[n mu(Exp[t/n]−1−t/n)]

で与え，

Do[MoPoMe[i]=(D[MoGenPoMe, {t, i}] /. t−>0), {i, 1, 12}]

により，配列 **MoPoMe** にモーメントを割り当る。この結果，

$$E(\overline{Y}-\mu)=0$$

$$E(\overline{Y}-\mu)^2=\frac{\mu}{n}$$

$$E(\overline{Y}-\mu)^3=\frac{\mu}{n^2}$$

$$E(\overline{Y}-\mu)^4=\frac{\mu}{n^3}+3\frac{\mu^2}{n^2}$$

$$E(\overline{Y}-\mu)^5=\frac{\mu}{n^4}+10\frac{\mu^2}{n^3}$$

$$E(\overline{Y}-\mu)^6=\frac{\mu}{n^5}+25\frac{\mu^2}{n^4}+15\frac{\mu^3}{n^3}$$

$$E(\overline{Y}-\mu)^7=\frac{\mu}{n^6}+56\frac{\mu^2}{n^5}+105\frac{\mu^3}{n^4}$$

$$E(\overline{Y}-\mu)^8=\frac{\mu}{n^7}+119\frac{\mu^2}{n^7}+490\frac{\mu^3}{n^5}+105\frac{\mu^4}{n^4}$$

$$E(\overline{Y}-\mu)^9=\frac{\mu}{n^8}+246\frac{\mu^2}{n^6}+1918\frac{\mu^3}{n^6}+1260\frac{\mu^4}{n^5}$$

$$E(\overline{Y}-\mu)^{10}=\frac{\mu}{n^9}+501\frac{\mu^2}{n^8}+6825\frac{\mu^3}{n^7}+9450\frac{\mu^4}{n^6}+945\frac{\mu^5}{n^5} \qquad (3\text{-}12)$$

が計算される。すこし冗長になるが，整理の都合上，後の計算手順を正確に記録してゆく。平均は，

MeanPoMeDevSer=PoissonDevSeries /.

Power[yMINUSmu, i_]−> MoPoMe[i]

MeanPoMeDevSer=Apart[MeanPoMeDevSer]

で求められるが，この展開は μ については −4 次の項まで，n については −5 次の項までは正確なので，

MeanPoMeDevSer=DeleteCases[MeanPoMeDevSer,

Times[_, Power[n, i_], Power[mu, j_]] /;

```
            (i<-5 || j<-4)]
```

として，

$$ED(\bar{y};\mu)=\frac{1}{n}+\frac{1}{6\mu n^2}+\frac{1}{6\mu^2 n^3}+\frac{19}{60\mu^3 n^4}+\frac{9}{10\mu^4 n^5}+\cdots \tag{3-13}$$

を得る。次に分散は，

```
MeanPoMeDevSerSq=PoissonDevSeriesSq /.
        Power[yMINUSmu, i__]-> MoPoMe[i]
MeanPoMeDevSerSq=Apart[MeanPoMeDevSerSq]
```

で求められるが，この展開は μ については -4 次の項まで，n については -6 次の項までは正確なので，

```
MeanPoMeDevSerSq=DeleteCases[MeanPoMeDevSerSq,
        Times[__, Power[n, i__], Power[mu, j__]] /;
            (i<-6 || j<-4)]
```

として，

$$E[D(\bar{y};\mu)]^2=\frac{3}{n^2}+\frac{1}{\mu n^3}+\frac{61}{36\mu^2 n^4}+\frac{55}{12\mu^3 n^5}+\frac{169}{10\mu^4 n^6}+\cdots \tag{3-14}$$

```
VarPoMeDevSer=DeleteCases[Expand[
        MeanPoMeDevSerSq-MeanPoMeDevSer^2],
            Times[__, Power[n, i__], Power[mu, j__]] /;
            (i<-6 || j<-4)]
```

により，

$$VarD(\bar{y};\mu)=\frac{2}{n^2}+\frac{2}{3\mu n^3}+\frac{4}{3\mu^2 n^4}+\frac{701}{180\mu^3 n^5}+\frac{449}{30\mu^4 n^6}+\cdots \tag{3-15}$$

を得る。(3-8)，(3-9)，(3-10)と(3-13)，(3-14)，(3-15)との関係は非常に興味深い。(この関係についての数学的な裏付けがある筈で，それが分っていれば面倒な手続を踏む必要がないのであるが)

3.3 $D(y;\bar{y})$ の平均と分散の計算

ここまでの結果を利用して，$D(y;\bar{y})$ の平均と分散の近似を行おう。平均の

方は非常に簡単で，

MeanPoResDev＝n*MeanPoDevSer－n*MeanPoMeDevSer

MeanPoResDev＝Collect[Expand[MeanPoResDev], mu]

より，

$$
\begin{aligned}
E\,D(y;\bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n} E\,D(y_i;\mu) - nE\,D(\bar{y};\mu) \\
&= nE\,D(y;\mu) - nE\,D(\bar{y};\mu) \\
&= (n-1) + \frac{1}{6}\left(n-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\mu} + \frac{1}{6}\left(n-\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{\mu^2} \\
&\quad + \frac{19}{60}\left(n-\frac{1}{n^3}\right)\frac{1}{\mu^3} + \frac{9}{10}\left(n-\frac{1}{n^4}\right)\frac{1}{\mu^4} \qquad (3\text{-}16)
\end{aligned}
$$

と求められる。次に分散だが，

$$
\begin{aligned}
VarD(y;\bar{y}) &= Var\left[\sum_{i=1}^{n} D(y_i;\mu) - nD(\bar{y};\mu)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} VarD(y_i;\mu) + n^2 VarD(\bar{y};\mu) \\
&\quad - 2n\sum_{i=1}^{n} Cov[D(y_i;\mu), D(\bar{y};\mu)] \\
&= nVarD(y_1;\mu) + n^2 VarD(\bar{y};\mu) \\
&\quad - 2n^2 Cov[D(y_1;\mu), D(\bar{y};\mu)] \qquad (3\text{-}17)
\end{aligned}
$$

となるので，あとは $Cov[D(y_1;\mu),D(\bar{y};\mu)]$ を求めればよい。

$D(\bar{y};\mu)$ の展開は，$\bar{y}-\mu$ について展開されるが，これを $y_1-\mu$ と $y_1-\mu$ とは独立な部分とにわけてやれば都合がよい。つまり，

$$
(\bar{y}-\mu) = \left\{\frac{y_1-\mu}{n} + \frac{n-1}{n}(\bar{y}_{-1}-\mu)\right\} \qquad (3\text{-}18)
$$

とする。ただし，$\bar{y}_{-1}$は y_1 を除く $(n-1)$ 項の算術平均とする。

$$
D(y_1;\mu) = \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i \frac{2}{i(i-1)} \frac{(y_1-\mu)^i}{\mu^{i-1}} \qquad (3\text{-}19)
$$

$$
D(\bar{y};\mu) = \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j \frac{2}{j(j-1)} \frac{\left\{\frac{y_1-\mu}{n} + \frac{n-1}{n}(\bar{y}_{-1}-\mu)\right\}^j}{\mu^{j-1}}
$$

$$=\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j}\frac{2}{j(j-1)}\frac{1}{\mu^{j-1}n^{j}}\times$$
$$\left[\sum_{k=0}^{j}{}_{j}C_{k}(y_{1}-\mu)^{j-k}\{(n-1)(\bar{y}_{-1}-\mu)\}^{k}\right] \tag{3-20}$$

だから，

$$Cov[D(y_1;\mu),D(\bar{y};\mu)]$$
$$=\sum_{i,j=2}^{\infty}(-1)^{i+j}\frac{2}{j(j-1)}\frac{2}{i(i-1)}\frac{1}{\mu^{i+j-2}n^{j}}\times$$
$$[\sum_{k=0}^{j}{}_{j}C_{k}Cov[(y_1-\mu)^{i},(y_1-\mu)^{j-k}]\times$$
$$(n-1)^{k}E[(\bar{y}_{-1}-\mu)^{k}] \tag{3-21}$$

と表される。ここで，これまでに求めた展開と精度を同じにするためには，$(i,\ j)$ についてどこまで加えれば良いかという問題が出てくる。まず，μ について考えよう。(3-21)を構成する各項の μ についての最大オーダーは $[(i+j-k)/2]+[k/2]-i-j+2$ だから，-4 次まで正確に求めるためには，$i+j=12$ まで必要になる（つまり $i,\ j$ ともに10まで求めればよい）。ただし，$[x]$ は x を越えない最大の整数を示すものとする。一方 n についてのオーダーは -6 次まで求める必要がある。各項のオーダーは $-[(k+1)/2]+k-j$ であり，k は $i-1$ までしか取らないとしてよいから，j は11までとれば十分だということが分る。以上より，$i,\ j$ 共に2から10までとって計算を行い，必要な項を集めればよいことがわかる。(3-21)の中で，必要な $\{i,\ j,\ k\}$ の組み合せを取り出すために，

```
SumList={}; Excluded={};
Do[If[(Floor[(i+j-k)/2+Floor[k/2]-i-j+2>-5 &&
      k-j-Floor[(k+1)/2]>-7),
   SumList=Append[SumList, {i, j, k}],
   Excluded=Append[Excluded, {i, j, k,}]],
  {i, 2, 10}, {j, 2, 10}, {k, 0, j-1}]
```

とする。ここで，**SumList, Excluded** は，それぞれ，考慮にいれる組と入れない組のリストである。**SumList** は，

{{2, 2, 0}，{2, 2, 1}，{2, 3, 0}，{2, 3, 1}，……, {10, 2, 0}} という155組の組からなる。このリストの各成分を(3-21)の各要素に変形させる関数 f を以下のように決めてゆく。まず準備として，$(n-1)^k E[(\bar{y}_{-1}-\mu)^k]$ を，

```
Do[MoPoSum[i]==Expand[n^i * MoPoMe[i]], {i, 1, 12}]
MoPoSumT[0]=1;
    Do[MoPoSumT[i]=(MoPoSum[i] /. n->n-1), {i, 1, 12}]
```

として，**MoPoSumT[k]** に割り当てた上で，

```
f[i_, j_, k_]: =4 * (-1)^(i+j)/j/(j-1)/i/(i-1) *
      j!/k!/(j-k)! * mu^(2-i-j) * n^(-j) *
      (MoPo[i+j-k]-MoPo[i]*MoPo[j-k]) *
      MoPoSumT[k]
```

として f を与える。この f を **SumList** の各成分に被せるよう，

```
SumListf=Map[Apply[f, #]&, Sumlist]
```

とし，このリストの和をとり，整理し，不要な部分を取り除くために，

```
Cov=Apply[Plus,SumListf]
Cov=Expand[Cov]
Cov=DeleteCases[Cov, Times[_, Power[mu, i_] /; i<-4]]
Cov=DeleteCases[Cov, Times[_, Power[n, i_] /; i<-6]
```

とすることにより，

$$
\begin{aligned}
&Cov[D(y_1;\mu),D(\bar{y};\mu)]\\
&=\frac{1}{n^2}\left\{2+\frac{1}{3\mu^2}+\frac{1}{\mu^3}+\frac{19}{5\mu^4}\right\}+\frac{1}{n^3}\left\{\frac{2}{3\mu}+\frac{13}{36\mu^3}+\frac{25}{18\mu^4}\right\}\\
&\quad+\frac{1}{n^4}\left\{\frac{1}{\mu^2}+\frac{7}{9\mu^4}\right\}+\frac{38}{15}\frac{1}{n^5}\frac{1}{\mu^3}+9\frac{1}{n^6}\frac{1}{\mu^4} \qquad (3\text{-}22)
\end{aligned}
$$

を得る。この結果を(3-17)式に代入することにより，最終的な結果を得る。つ

まり，

VarPoResDev＝n VarPoDevSer＋n^2 VarPoMeDevSer

−2 n^2 Cov

により，

$$VarD(y;\bar{y})=n\left\{2+\frac{2}{3\mu}+\frac{4}{3\mu^2}+\frac{701}{180\mu^3}+\frac{449}{30\mu^4}\right\}$$
$$-\left\{2+\frac{2}{3\mu^2}+\frac{2}{\mu^3}+\frac{38}{5\mu^4}\right\}-\frac{1}{n}\left\{\frac{2}{3\mu}+\frac{13}{18\mu^3}+\frac{25}{9\mu^4}\right\}$$
$$-\frac{1}{n^2}\left\{\frac{2}{3\mu^2}+\frac{14}{9\mu^4}\right\}-\frac{211}{80n^3\mu^3}-\frac{91}{30n^4\mu^4} \quad (3\text{-}23)$$

が得られた。

4. おわりに

この論文では，最も単純な場合ではあるが，残差尤度比の平均，分散の近似計算を，かなり高次まで求めることに成功した。この結果よりも更に高次の近似も，ここに示している方法を用いれば，展開の次数を上げるだけで，得ることができる。今後の課題としては，この論文の結果をもとにした残差尤度比の修正の方法の考案，その効果を確かめるためのシミュレーションの実行，更に，平均パラメータに回帰構造をあたえる一般化線形モデルの枠組みのなかでの同様の近似，修正，シミュレーションの実行等があげられる。

参考文献

McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989) *Generalized Linear Models, 2nd Edition,* Chapman and Hall.

Wedderburn, R. W. N. (1974). Quasi-likelihood functions, generalized linear models, and the Gauss-Newton method, Biometrika, 61, 3, 439-447.

Wolfram, S. (1991) *Mathematica,* A system for doing mathematics by computer, 2nd edition, Addison Wesley.

松尾精彦（1992）一般化線形モデルでの条件付き検定，関西大学経済論集，42，4，73-85.