商品グループの形式的物価指数論

著者	高木 秀玄
雑誌名	關西大學經済論集
巻	33
号	2
ページ	197-215
発行年	1983-07-15
その他のタイトル	The Formal Theory of Price Index Numbers of Group Commodity
URL	http://hdl.handle.net/10112/14448

論　文

「商品グループの形式的物価指数論」

The Formal Theory of Price Index Numbers of Group Commodity

高　木　秀　玄

1）レオンチェフは合成商品の物価指数の理論の展開に否定的態度をとる。即ちその基本的条件である，効用の可測性を否定する。すなわち，無差別選好の理論が，この問題の解決に利用されないとする[1)]。もし，そうであるならばいわゆる関数論的指数論の立場からではなく，ここでの効用の可測性という基本条件によらない，いわゆる原子論的物価論指数論の立場より，これを検討することが本稿の目的である[2)]。

2）理論的に正しい商品のグループ，すなわちそれぞれの価格が同じ比率で上昇，下落する商品のグループ，別言すれば合成商品の物価指数を決定しうるか？　という一つの問題が提起される。レオンチェフの言のように，関数論的指数論では，それは否定される。フィッシャーによると「絶対的に正しいとされる指数なるものは存在しない」[3)]，理論的には常に疑問の余地が残るという。

1）W. Lontief, Essays in *Essays in Economics, Theories and Theorizing*.1966, p. 126—p. 134. 時子山和彦訳，『経済学の世界』日本経済新聞，242ページ—271ページ。

2）本稿は次の Montgomrey の書よりヒントを得，アメリカ労働統計局の物価・指数研究部の J. S. Greelees 氏との討議メモを基礎にして執筆したものである。J. K. Montgomery, *The Mathematical Problem of the Price Index*, London, 1937.

3）I. Fisher, *Making of Index Number*, 1923, p. 361.

彼は形式的に組立てられ提示された様々の指数算式に彼の発想による各種のテストをほどこして，正しいとされる算式を決定する。従来の関数論者のあるものは，このテストを単に形式論もしくは数理論であるとして，その意味を問わなかった[4)]。しかるに近時，このような態度について反省される状態にある。例えば1976年4月から6月にわたるカールスルーヘ大学における国際シンポジュームの結果をまとめた報告書をみよ[5)]。

われわれはここでフィッシャーの2つのテスト方式，いわゆる「時点逆転テスト」と「要素逆転テスト」を手がかりとする[6)]。ここでの時点逆転テストとは基準時点と比較時点の2時点における価格と数量より成る指数算式において0時点を基準時点とする比率と比較時点を基準にとる比率とは相等しいものであるべきことを内容とする。すなわち，時間的に前向きに計算された指数は，後向きに計算された指数の逆数に相等しくなるべきであることを要請する[7)]。けだし(1)指数計算が一つの方向に限定される理由がないこと，およびかかる逆転性はいかなる個別商品にも適用されること，この2つがいわゆる時点逆転テストの正しさを正当化するものであるとする。ここでいえることはグループ商品の物価指数は個別商品の価格指数と同一の特徴を有すべきである。しかるに

---

4) W. Winkler: Older and Newer Ways of solving the Index Numbers problem, Bulletin De L'institut International De Statistique, Tome XXXIV 2ᶜᵐᶜ-Livraison, 1954. では指数研究を次の三つの期間に分ける。すなわち，(1)一般的方向づけ，又は指数の新しい算式を発見し，その経済的意味を規定せんとする期間，(2)形式論的数学的に処理せんとする中間期間，(3)生計費の変動の関数論的理論の展開期とし，それによると本稿で取扱う問題は第2期間的性格を有するが，近時，これを単なる数理的形式理論的研究より，より経済理論的局面より検討しようとする傾向にある。

5) W. Eichhorn el, *Theory and Applications of Economic Indices,* 1978, 中の H. Funke and J. Voeller 論文, G. Hasenkamp の論文をみよ。

6) L. V. Bortkiewicz: "Zweck and Strutur einer Preisindexzahl,"Nordisk Statistik Tidskrift, Band II, Stockholm, 1923, S. 385 ではこれを「2つの主要逆転テスト」(Beiden Grossen Umkehrbarkeitskriterien) という。

7) I. Fisher, ibid., p. 361.

一つの根本的な相違がみられる。すなわち，単一の商品の個別価格指数は１つのそれ独自の意味を有する確定的な数字であり，その計算には必ずしも数量の項を必要としない。しかるに商品グループの場合には，物価水準が反映されるのであり，数量もしくは支出総額の中で占める各項の重要さをウエイトとして計算されなければならない。

次に要素逆転テストは次のように定義される。すなわち，指数計算式の価格項と数量項を変換しても同一の結果を生ずることを内容とするものである。交換前と交換後の算式結果を乗ずると真の価額比を与えることを意味する。フィッシャーによると「物価指数の問題は数量指数の双生児問題である」[8)]。

かくして，われわれが与えられた時点の物価指数を，計算しようとする年度を，基準時点としてとる年度と比較すると，価格と数量との両方が交換されることになる。ここで集計値は変化し，この変化の大きさは部分的には価格の変動により，かつ，部分的には数量の変化によるここで商品の数量の変化によらないで，グループ内の全商品の斎一的な価格の変動によるものとする。同様に数量の斎一的変化がみられたとする。すなわち，両要素の斎一的変化によるものとする。しかるとき，物価指数と数量指数の「双生児問題」は，同一の集計値を生ずる価格と数量の斎一的変化を発見する問題でもあるということになるのである。

価格と数量の，したがって物価指数と数量指数の普通用いられる記号によると次式をうる。

$$\sum P_{01} \cdot Q_{01} \cdot q_0 = \sum p_1 q_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

あるいは P_{01}，Q_{01} はともに定数であるから

$$P_{01} \cdot Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0} \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

これは既述のフィッシャーの要素逆転テストである。ここで価格と数量とは対称的であるゆえに Q_{01} は逆転される要素について P_{01} と同じ算式である。

8）I. Fisher, ibid., p. 72.

かくして既知のフィッシャーの「理想式」は次のとおりである。

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

および　$$Q_{01}=\sqrt{\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

既述の条件により

$$P_{01}=\sqrt{\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)'$$

$$Q_{01}=\sqrt{\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)'$$

以上の2つの算式は，価格の変動による集計値の変動は数量の変化による集計値の変動に相等しいということを意味するが，これは明らかに不合理な想定というべきである。ゆえに物価指数と数量指数はもう1つ別の条件に従うべきである。かくして物価指数は価格の項の増加による集計値の増加に対応すべきであり，数量指数は数量の増加による集計値の増加に対応すべきである。かくして物価指数を算出する算式を求めるすべての意図は，つねに意識的とはいわなくても価格の変動による集計値の変動比を推定しようとする意図を意味するのである。

価格変動による価額変動と数量変動による価額変動との間の比率が明確に確定されない限り理論的に正しい物価指数あるいは数量指数なるものは存在しえない。これが可能であることを理論的に論証することが本稿の1つの目的である。

3）第一にただ1種の商品のケースを，考えてみることにする。価額増加は $p_1q_1-p_0q_0$ によって表わされる。これがどのようにして価額増（V_{p_1}）と数量増による価額増（V_{q_1}）の間に分割されるか？　について述べよう。最初の考察は，上の分割が対照的であるということである。V_{q_1} を表わす算式は逆転された要素 p と q とによる V_{p_1} を表わす算式と同様でなければならない。

再び，もし価額増加が存在するけれども数量について増加がみられないとき

は，価額増加の全部は価額の増加によるものと断定してさしつかえがない。この場合には $V_{p_1}=p_1q_1-p_0q_0$ および $V_{q_1}=0$ が成立する。さらに数量を確定不変として価格の相対的増加は価格を一定不変として，数量の相等しい相対的増加と同一の価額増加を生ずる。けだし $q_1=q_0$ のときは価額の増加は次式による。

$$=\frac{p_1}{p_0}p_0q_0-p_0q_0=\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)p_0q_0 \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

もし，$p_1=p_0$ のときは価額増加は

$$=p_0\cdot\frac{q_1}{q_0}q_0-p_0q_0=\left(\frac{q_1}{q_0}-1\right)p_0q_0 \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

したがって，もし第1のケースでの$\frac{p_1}{p_0}$が第2のケースの$\frac{q_1}{q_0}$に相等しいときは，両ケースでの価額の増加は同じものである。したがって，もし，相等しい相対的増加が同一の時点に価格と数量に生ずるときは，価格増加による価額の増加は，数量の増加による価額増加に相等しいと想定されるのである。更にもし$\frac{q_1}{q_0}=\frac{1}{p_1}$のときは$\frac{p_1}{p_0}\cdot p_0\cdot\frac{1}{\frac{p_1}{p_0}}$が成立するから価額増加が存在しない。この場合に

$$V_{q_1}=V_{p_1} \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

が成立する。

なお，もし価格の相対的増加の方が，数量の相対的増加よりも大，すなわち $V_{p_1}>V_{q_1}$ のときは，又，逆に数量の相対的増加の方が価格の相対的増加よりも大，すなわち $V_{p_1}>V_{p_1}$ のときも想定される。これにその差が微分小のときでも真であり，V_p と V_q は連続関数である。これより以下の関係が，成立する。すなわち

$\frac{q_1}{q_0}>\frac{p_1}{p_0}$のときは $V_{q_1}>V_{p_1}$ および $\frac{V_{q_1}}{V_{p_1}}>1$

$\frac{q_1}{q_0}=\frac{p_1}{p_0}$のときは $V_{q_1}=V_{p_1}$ および $\frac{V_{q_1}}{V_{p_1}}=1$

$\frac{q_1}{q_0}<\frac{p_1}{p_0}$のときは $V_{q_1}<V_{p_1}$ および $\frac{V_{q_1}}{V_{p_1}}<1$

$$\frac{q_1}{q_0}=1 \quad のときは\quad V_{q_1}=0 \quad および\quad \frac{V_{q_1}}{V_{p_1}}=0$$

$$\frac{q_1}{q_0}=\frac{1}{p_1}, \quad のときは\quad V_{q_1}=-1V_{q_1} \quad および\quad \frac{V_{q_1}}{V_{p_1}}=-1$$

なお，次式が成立する。

$$\frac{p_1}{p_0}=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^1,\ 1=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^0 および \frac{1}{\frac{p_1}{p_0}}=\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{-1}.$$

以上は，もし$\frac{q_1}{q_0}=\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^a$，$\frac{V_{q_1}}{V_{p_1}}=a$ が成立するときに次式が成立することを示唆するものであるが，それを証明するものではない。すなわち

$$a=\frac{\log\frac{q_1}{q_0}}{\log\frac{p_1}{p_0}}=\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1-\log p_0} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

$\frac{V_{p_1}}{V_{q_1}}$ についてのこの算式は，他の固有の条件に従うか否か考察しよう。われわれは対称性の原則によって $\frac{V_{p_1}}{V_{q_1}}$ は逆転される要因による $\frac{V_{q_1}}{V_{p_1}}$ についての算式と同じものでなければならない。なお $\frac{V_{p_1}}{V_{q_1}}$ は $\frac{V_{q_1}}{V_{p_1}}$ の逆数であることが明白である。ここで $\frac{V_{p_1}}{V_{q_1}}$ の類似式は $\frac{\log p_1-\log p_0}{\log q_1-\log q_0}$ であり，これは $\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1-\log p_0}$ の逆数である。したがってこの算式は指数のテストを満足するのである。

その証明は決して完全ではないが，次のように展開されうる。すなわち

$$\frac{V_{p_1}}{V_{q_1}}=\frac{\log p_1-\log p_0}{\log q_1-\log q_0} \quad および \quad \frac{V_{q_1}}{V_{p_1}}=\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1-\log p_0}$$

これより次式が求められる。

$$V_{q_1}=V_{p_1}\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1-\log p_0} \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

しかるに

$$V_{p_1}+V_{q_1}=p_1q_1-p_0q_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

したがって次の各式が成立する。

$$\left.\begin{aligned}
&V_{p_1}\left(1+\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1-\log p_0}\right)=p_1q_1-p_0q_0,\\
&V_{p_1}\left(\frac{\log p_1-\log p_0+\log q_1-\log q_0}{\log p_1-\log p_0}\right)=p_1q_1-p_0q_0,\\
&V_{p_1}\left(\frac{\log p_1q_1-\log p_0q_0}{\log p_1-\log p_0}\right)=p_1q_1-p_0q_0,\\
&V_{p_1}=\frac{\log p_1-\log p_0}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}(p_1q_1-p_0q_0)\\
\text{同様に}\quad &V_{q_1}=\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}(p_1q_1-p_0q_0)
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(10)$$

これより，特に最終の式よりいいうることは，V_{q_1} の算式は逆転される要因について V_{p_1} の算式と同一のものであるということである。

$p_1=p_0$ および $q_1=q_0$ のとき，又，$\dfrac{q_1}{q_0}=\dfrac{1}{\dfrac{p_1}{p_0}}$ のとき２式は 0/0 に相等しくなる。しかし第１のケースでは価格増加，数量増加はみられない。すなわち，V_{p_1}，V_{q_1} の両方がゼロに相等しく，第２のケースでは価格は次のように決定される。$\dfrac{p_1}{p_0}=x+\delta$ および $\dfrac{q_1}{q_0}=\dfrac{1}{x}$ としよう。ここで δx は微分小である。したがって次式が誘導される。

$$V_{p_1}=\frac{\log\dfrac{p_1}{p_0}}{\log\dfrac{p_1}{p_0}\cdot\dfrac{q_1}{q_0}}(p_1q_1-p_0q_0)\quad\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$=\frac{\log(x+\delta x)}{\log\dfrac{x+\delta x}{x}}p_0q_0\left(\frac{x+\delta x}{x}-1\right)$$

$$=\frac{\log x+\log\left(1+\dfrac{\delta x}{x}\right)}{\log\left(1+\dfrac{\delta x}{x}\right)}p_0q_0\cdot\frac{\delta x}{x}$$

しかるに δx が微分小のときは

$$\log\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)=\frac{\delta x}{x}\quad\cdots\cdots\cdots(12)$$

が成立し，次のように変形される。

$$V_{p_1}=\frac{\log x+\dfrac{\delta x}{x}}{\dfrac{\delta x}{x}}p_0q_0\frac{\delta x}{x} \qquad \cdots\cdots\cdots(13)$$

$$=\left(\log x+\frac{\delta x}{x}\right)p_0q_0$$

他方 $\delta x=0$ のときは

$$V_{p_1}=(\log x)p_0q_0=\left(\log\frac{p_1}{p_0}\right)p_0p_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(14)$$

これより

$$V_{q_1}=\frac{\log\dfrac{q_1}{q_0}}{\log\dfrac{p_1}{p_0}\cdot\dfrac{q_1}{q_0}}(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(15)$$

$$=\frac{\log\dfrac{1}{x}}{\log\dfrac{x+\delta x}{x}}p_0q_0\left(\frac{x+\delta x}{x}-1\right)$$

$$=\frac{\log\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\delta x}{x}}p_0q_0\frac{\delta x}{x}$$

$$=\left(\log\frac{1}{x}\right)p_0q_0=\left(\log\frac{q_1}{q_0}\right)p_0q_0$$

ここで　$\log\dfrac{q_1}{q_0}=-\log\dfrac{p_1}{p_0}$

ゆえに　$V_{q_1}=-V_{p_1}$ $\qquad \cdots\cdots\cdots(16)$

これよりこの算式は次の場合に条件をみたす。

$$\frac{q_1}{q_0}=\frac{1}{\dfrac{p_1}{p_0}},\qquad V_{q_1}=-V_{p_1} \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

この問題の別の接近は次のとおりである。いま次のように仮定する。

$$\frac{p_1}{p_0}=x \text{ および } \frac{q_1}{q_0}=y,$$

すると　$pq=p_0q_0\cdot xy$ $\qquad \cdots\cdots\cdots(18)$

$$pq-p_0q_0=p_0q_0(xy-1)$$

また　$V_p+V_q=pq-p_0q_0=p_0q_0(xy-1)$ $\qquad \cdots\cdots\cdots(19)$

価額の 増分 δpq をもたらす増分 δx と増分 δy が存在するとしよう。すると次式が誘導される。

$$pq+\delta pq=p_0(x+\delta x)\cdot q_0(y+\delta y)$$

$$=p_0q_0(xy+y\delta x+x\delta y+\delta x\cdot\delta y) \qquad \cdots\cdots\cdots(20)$$

しかるに $pq=p_0q_0\cdot xy$ および $p_0q_0\cdot\delta x\cdot\delta y$ は無視しよう。

すると　$\delta pq=p_0q_0(y\delta x+x\delta y) \qquad \cdots\cdots\cdots(21)$

ここで $p_0q_0\cdot y\delta x$ は価格の増分 $p_0\delta x$ による価額の増分であり，$p_0q_0\cdot x\delta y$ は数量の増分である $q_0\delta y$ による価額の増分である。

したがって

$$\delta V_p=p_0q_0\cdot y\delta x$$

および　$\delta V_q=p_0q_0\cdot x\delta y$

$$=pq_0\cdot x\frac{dy}{dx}\cdot\delta x \qquad \cdots\cdots\cdots(21)$$

以上の等式は x と y のあらゆる値について成立するが，y が x の関数であると想定しなければ，積分によって V_{p_1} と V_{q_1} を決定するように利用されえない。ここで既述の示唆によって考察し，$y=x^a$ と想定しよう。ここでの a は $x=\frac{p_1}{p_0}$，$y=\frac{q_1}{q_0}$ のときにこのように想定することによって確定されるのである。$x=1$，$x^a=1$ の場合に a のあらゆる値にとって次の積分が行なわれる。

すなわち

$$V_{p_1}=\int_t^{\frac{p_1}{p_0}}p_0q_0\cdot ydx \qquad \cdots\cdots\cdots(22)'$$

$$=\int_t^{\frac{p_1}{p_0}}p_0q_0\cdot x^a dx$$

$$=p_0q_0\frac{1}{a+1}\left\{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{a+1}-1\right\}$$

$$=p_0q_0\frac{1}{a+1}\left(\frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{q_1}{q_0}-1\right)$$

$$=\frac{1}{a+1}(p_1q_1-p_0q_0)$$

なお　$$V_{q_1}=\int_t^{\frac{p_1}{p_0}} p_0q_0\cdot x\frac{dy}{dx}dx \qquad \cdots\cdots\cdots(22)$$

$$=\int_t^{\frac{p_1}{p_0}} p_0q_0\cdot x\cdot ax^{a-1}dx$$

$$=\int_t^{\frac{p_1}{p_0}} p_0q_0\cdot ax^a\cdot dx$$

$$=p_0q_0\cdot\frac{a}{a+1}\left\{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{a+1}-1\right\}$$

$$=\frac{a}{a+1}(p_1q_1-p_0q_0)$$

しかるに　$$a=\frac{\log\frac{q_1}{q_0}}{\log\frac{p_1}{p_0}}=\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1-\log p_0} \qquad \cdots\cdots\cdots(23)$$

かつ　$$a+1=\frac{\log\frac{p_1}{p_0}+\log\frac{q_1}{q_0}}{\log\frac{p_1}{p_0}} \qquad \cdots\cdots\cdots(24)$$

$$=\frac{\log\frac{p_1q_1}{p_0q_0}}{\log\frac{q_1}{q_0}}=\frac{\log p_1q_1-\log p_0q_0}{\log p_1-\log p_0}$$

したがって

$$V_{p_1}=\frac{\log p_1-\log p_0}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(25)$$

また　$$V_{q_1}=\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(26)$$

以上は異なる方法で既に求めたと同じ算式であり，既に述べたようにすべての既知の条件をみたす。ゆえにそれはその条件に従って V_{p_1} と V_{q1} の決定的な対をなす値を示すものである。

ここで１つの問題が提示される。すなわち，$y=x^a$ が条件によって確定値を与えるという上の想定の外に何らか他の想定が存在するか？　ということである。もし，y が x の関数であると仮定するときは 対照的な結果が他のように不可能であると 同様のタイプの y の関数であるという 結果にならなければならない。しかるに実際には関数 y が x の関数であるときはつねにその逆転された要因について y の同じ 関数でなければならない。 ここで再び確定的な結果を与えるために y は $x=1$，$y=1$ のとき， また $x=\frac{p_1}{p_0}$，$y=\frac{q_1}{q_0}$ が２個以上の定数を決定するのは不十分であるゆえ，高々被決定定数が２個をふくむ，その関数で なければならないということになる。$y=bx^a$ による想定は $b=1$ と $a=\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1-\log p_0}$ を与え，これに対して $g=x^{\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1-\log p_0}}$ および $x=y^{\frac{\log p_1-\log p^0}{\log q_1-\log q_0}}$ とおく。これは対照的な結果であり，先きに行なった想定である。

ここで $y=ax+b$ という形式の想定について試みることにする。すると $1=a+b$ である。

なお
$$\frac{q_1}{q_0}=a+\left(\frac{p_1}{p_0}+(1-a)\right. \tag{27}$$

これより
$$a\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)=\frac{q_1}{p_0}-1$$

なお
$$a=\frac{\frac{q_1}{q_0}-1}{\frac{p_1}{p_0}-1}$$

なお
$$b=1-a=\frac{\frac{p_1}{p_0}-\frac{q_1}{q_0}}{\frac{p_1}{p_0}-1} \tag{28}$$

ここで
$$\delta V_p=p_0q_0(ax+b)\delta x \tag{29}$$

これより
$$V_{p_1}=\int_1^{\frac{p_1}{p_0}}p_0q_0(ax+b)\delta x$$
$$=p_0q_0\left\{\frac{1}{2}a\left(\frac{p_1{}^2}{p_0{}^2}-1\right)+b\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)\right\}$$

$$=p_0q_0\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)\left\{\frac{1}{2}a\left(\frac{p_1}{p_0}+1\right)+b\right\}$$

$$=p_0q_0\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)\left\{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{q_1}{q_0}-1\right)\left(\frac{p_1}{p_0}+1\right)}{\frac{p_1}{p_0}-1}+\frac{\frac{p_1}{p_0}-\frac{q_1}{q_0}}{\frac{p_1}{p_0}-1}\right\}$$

$$=p_0q_0\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{q_1}{q_0}-\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{q_1}{q_0}-\frac{1}{2}+\frac{p_1}{p_0}-\frac{q_1}{q_0}\right)$$

$$=p_0q_0\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{p_1}{p_0}\cdot\frac{q_1}{q_0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p_1}{p_0}-\frac{1}{2}\cdot\frac{q_1}{q_0}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}p_0q_0\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)\left(\frac{q_1}{q_0}+1\right)$$

同様に

$$V_{q_1}=\int_1^{\frac{p_1}{p_0}}p_0q_0\cdot x\frac{dy}{dx}dx \qquad \cdots\cdots\cdots(30)$$

$$=\int_1^{\frac{p_1}{p_0}}p_0q_0\cdot axdx$$

$$=\frac{1}{2}p_0q_0a\left(\frac{p_1^2}{p_0^2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}p_0q_0\frac{\left(\frac{q_1}{q_0}-1\right)}{\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)}\left(\frac{p_1^2}{p_0^2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}p_0q_0\left(\frac{q_1}{q_0}-1\right)\left(\frac{p_1}{p_0}+1\right)$$

ここで　$\frac{p_1}{p_0}=1$ であれば

$$V_{p_1}=0,\ V_{q_1}=p_0q_0\left(\frac{q_1}{q_0}-1\right)=p_0q_1-p_0q_0=p_1q_1-p_0q_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(31)$$

$\frac{q_1}{q_0}=1$ であれば

$$V_{q_1}=0,\ V_{p_1}=p_0q_0\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)=p_1q_0-p_0q_0=p_1q_1-p_0q_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(32)$$

$\frac{q_1}{q_0}=\frac{1}{\frac{p_1}{p_0}}$ のときは

$$V_{p_1}=\frac{1}{2}p_0q_0\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)\left(\frac{p_0}{p_1}+1\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(32)$$

$$=\frac{1}{2}p_0q_0\left(\frac{p_1}{p_0}-\frac{p_0}{p_1}\right)$$

かつ

$$V_{q_1}=\frac{1}{2}p_0q_0\left(\frac{p_0}{p_1}-1\right)\left(\frac{p_1}{p_0}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}p_0q_0\left(\frac{p_0}{p_1}-\frac{p_1}{p_0}\right)=-V_{p_1} \qquad \cdots\cdots\cdots(33)$$

再び

$$V_{p_1}-V_{q_1}=\frac{1}{2}p_0q_0\left\{\frac{p_1q_1}{p_0q_0}-\frac{q_1}{q_0}+\frac{p_1}{p_0}-1-\frac{p_1q_1}{p_0q_0}+\frac{p_1}{p_0}-\frac{q_1}{q_0}+1\right\}$$

$$=p_0q_0\left(\frac{p_1}{p_0}-\frac{q_1}{q_0}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(34)$$

これより，$\frac{p_1}{p_0}>\frac{q_1}{q_0}$ のときは $V_{p_1}>V_{q_1}$，$\frac{p_1}{p_0}<\frac{q_1}{q_0}$ のときは $V_{p_1}<V_{q_1}$ の関係が成立する。これより $y=ax+b$ の仮定が指摘されたあらゆる条件に従う V_{p_1} と V_{q_1} の決定的な値の対を与える。ところがある他の仮定がこのような値を与えることは明らかでない。もし仮定 $y=ax^a+bx^b$ を想定するときは a と b の両方を確定するには不十分であり，また $y=ax^m+bx^n$，$y=\frac{a}{(x+b)^m}$，$y=\frac{1}{(x+a)^m}+\frac{1}{(x+b)^n}$ のような形式をとる仮定は必要とする対称的な結果を与えない。したがって，これまで指摘した条件に従う V_{p_1} を V_{q_1} の確定的な値の2つの対を有するわけである。ここで再び，一つの疑問が掲げられる。すなわち，この2つの対は他の対より正しい。もしくはより適切であるとする何らかの理由があるかどうかということである。

いま，もし $x=0$，$y=0$ のとき $y=x^a$ と想定し，この想定をそのままにとって p_0q_0 のどれだけの部分もしくは割合が0から p_0 までの価格増加により，かつ，どの部分又は割合が0から q_0 までの数量の増加に依るものであるか決定しうることを指摘しうるのである。ここでの2つの割合を $V(0,0)p_0$ および $V(0,0)q_0$ で表わす。

すると

$$V(0,0)p_0=\int_0^t p_0q_0\cdot ydx, \qquad \cdots\cdots\cdots(35)$$

$$=\int_0^t p_0q_0\cdot x^a dx,$$

$$=\frac{1}{a+1}\cdot p_0q_0,$$

$$=\frac{\log p_1-\log p_0}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}\cdot p_0q_0.$$

他方，もし $y=ax+b$ と想定すると，$x=0$ のときは $y\neq 0$ が成立する。ゆえに，この想定が変更されない限り $V(0,0)p_0$，$V(0,0)q_0$ 又は $V(0,0)p_1$ および $V(0,0)q_1$ の値を計算しえない。なお $V(0,0)p_0$ と $V(0,0)q_0$ を決定するのに必要とされる想定から $V(0,0)p_1$ と $V(0,0)q_1$ を確定するのに別箇の想定が必要となる。

ここで $a_0=\dfrac{q_0}{p_0}$，$a_1=\dfrac{q_1}{p_1}$ は相似の想定を表わすものであるゆえに $y=a_0x, y=a_1x$ の形式をとる。これより次式が成立する。

$$V(0,0)p_0=V(0,0)q_0=\frac{1}{2}p_0q_0, \qquad \cdots\cdots\cdots(36)$$

および $$V(0,0)p_1=V(0,0)q_1=\frac{1}{2}p_1q_1. \qquad \cdots\cdots\cdots(37)$$

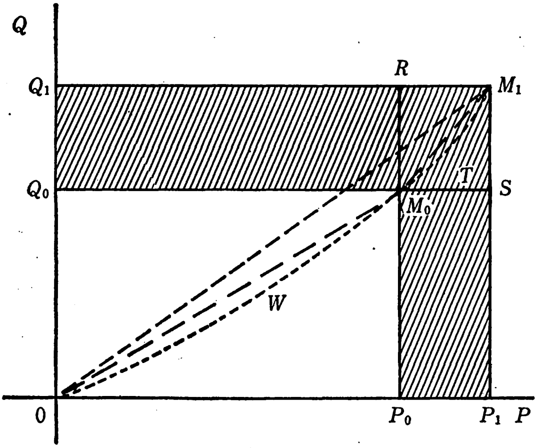
上式より理解されることは，V_{p_1} は $V(0,0)p_1$ と $V(0,0)p_0$ との間の差と相等しくなく，また V_{q_1} は $V(0,0)q_1$ と $V(0,0)q_0$ との間の差と相等しくない。むしろ次の関係式（既述の(25),(26)式）は正しい数値を与える。

$$V_{p_1}=\frac{\log p_1-\log p_0}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(25)$$

および $$V_{q_1}=\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(26)$$

ここで数値の2つの対の間の差を幾何的に表現しよう。

次の第1図において OP と OQ とは直交座標軸であり，p は OP 上に，Qq は OQ 上にとられる。$OP_0=p_0$，$OP_1=p_1$，$OQ_0=q_0$，$OQ_1=q_1$ とする。なお



$OP_1 > OP_0$ とする。これは実際にはもっとも生起の確率は小であるがもっとも簡単な例である。P_0 から OQ に平行に，Q_0 から OP に平行線を引く。この2本の平行線は M_0 で交わる。いま P_0M_0 を R で Q_1M_1 に交わるまで，かつ Q_0M_0 を S で P_1M で交わるまで延長する。すると長方形 $OP_0M_0Q_0$ の面積は p_0q_0 に，長方形 $OP_1M_1Q_1$ の面積は p_1q_1 に相等しく，斜線をほどこした部分の面積 $P_0M_0Q_0Q_1M_1P_1$ は $p_1q_1 - p_0q_0$ に相等しく，これは価額の純増加分である。すなわち，長方形 $P_0M_0SP_1$ は明らかに価格増加による価額増加分であり，長方形 $Q_0M_0RQ_1$ は数量増加による，価額増加分である。なお，長方形 M_0RMS の分割の作業が残されているわけである。

$y=x^a$ は M_1 と M_0 をよぎり，しかも，もし延長され M_0WO が原点0を通るならば曲線 M_1TM_0 によって長方形を分割することになる。この場合に，V_{p_1} は図形 $P_0P_1M_1TM_0$ の面積に，また V_{q_1} は図形 $Q_0Q_1M_1TM_0$ の面積に相等しい。図形 OWM_0P_0 は $V(0,0)p_0$ を表わし，図形 $OWM_0TM_1P_1$ は $V(0,0)p_1$ を表わす。$V_{p_1}=V(0,0)p_1-V(0,0)p_2$ が成立することが明白である。同様に $V_{q_1}=V(0,0)q_1-V(0,0)q_0$ が成立する。

$y=ax+b$ は，延長しても原点をよぎらない直線である M_1M_0 による長方形 M_0RM_1S を分割することに相等しい。同様の仮定による $V(0,0)p_0$ と $V(0,0)$

q_0 を得るために $OP_0M_0O_0$ を二等分する 直線 M_0O によって 分割しなければならない。同様に $V(0,0)p_1$ と $V(0,0)q_1$ を得るために $OP_1M_1Q_1$ をそれで二等分する直線 M_1O によって，分割される。この場合に V_{p_1} は $V(0,0)p_1-V(0,0)p_0$ に，V_{q_1} は $V(0,0)q_1-V(0,0)q_0$ に相等しくない。

したがって，$y=x^a$ は，より正しく，かつそれに与えられる V_{p_1} と V_{q_1} の算式に適用するのに正しい算式であるといいうるのである。

4）これまでは単一の商品について考察してきた。ここでは商品のグループにおける各商品のケースへ展開しよう。

ここで

$$\sum V_{p_1}=\sum\frac{\log p_1-\log p_0}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(27)$$

かつ

$$\sum V_{q_1}=\sum\frac{\log q_1-\log q_0}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(28)$$

なお　$$\sum V_{p_1}+\sum V_{q_1}=\sum(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(29)$$

ここで P_{01} を物価指数，Q_{01} を数量指数とする。すると

$$\sum p_1q_1=\sum P_{01}\cdot p_0\cdot O_{01}\cdot q_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(30)$$

ここで P_{01} と Q_{01} の概念をより明白にするためにこの式を展開しよう。各項を転換すると次式をうる。

$$P_{01}p_0'\cdot Q_{01}\cdot q_0'+P_{01}p_0''\cdot Q_{01}p_0''+P_{01}p_0'''\cdot Q_{01}q_0'''+\cdots\cdots$$
$$=p_1'q_1'+p_1''q_1''+p_1'''q_1'''+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots(31)$$

もし，p_0'，p_0''，p_0'''…に P_{01} で表わされる 斎一的な 増加を適用し，q_0'，q_0''，q_0'''，…に Q_{01} で示される斎一的な 増加を適用すると，この集計的結果は，実際に生じた増加によって生じたと同じである。しかるに，これは P_{01} と Q_{01} を決定するには不十分である。価格の増加による集計値の増加は，現実のケースにおけると仮説的なケースとは同一であり，ゆえに数量増加による価額の集計値増加は何れの場合においても同じである。

ここで仮説的なケースにおける単一の商品を考察するから V_{p_1} と V_{q_1} につ

いての算式に $\frac{p_1}{p_0}$ に P_{01}, $\frac{q_1}{q_0}$ に Q_{01} を代入して次式を誘導する。すなわち

$$V_{p_1}=\frac{\log P_{01}}{\log P_{01}+\log Q_{01}}(P_{01}\cdot p_0\cdot Q_{01}q_0-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(32)$$

かつ

$$V_{q_1}=\frac{\log Q_{01}}{\log P_{01}+\log Q_{01}}(P_{01}p_0\cdot Q_{01}q_0-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(33)$$

ゆえに，仮説的なケースには

$$\sum V_{p_1}=\frac{\log P_{01}}{\log P_{01}+\log Q_{01}}\sum(P_{01}p_0\cdot Q_{01}q_0-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(34)$$

なお

$$\sum V_{q_1}=\frac{\log Q_{01}}{\log P_{01}+\log Q_{01}}\sum(P_{01}p_0\cdot Q_{01}q_0-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(35)$$

しかるに $\sum P_{01}p_0\cdot Q_{01}q_0=\sum p_1q_1$

ゆえに仮説的なケースでは

$$\sum V_{p_1}=\frac{\log P_{01}\log}{P_{01}+\log Q_{01}}\sum(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(34)'$$

かつ

$$\sum V_{p_1}=\frac{\log Q_{01}}{\log P_{01}+\log Q_{01}}\sum(p_1q_1-p_0q_0) \qquad \cdots\cdots\cdots(35)'$$

ここで上の各式を実際のケースに $\sum V_{p_1}+\sum V_{q_1}$ の値に相等しくとられる。ゆえに

$$\frac{\log P_{01}}{\log P_{01}+\log Q_{01}}\sum(p_1q_1-p_0q_0)=\sum\frac{(\log p_1-\log p_0)(p_1q_1-p_0q_0)}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}\cdots\cdots\cdots(34)''$$

かつ

$$\frac{\log Q_{01}}{\log Q_{01}+\log P_{01}}\sum(p_1q_1-p_0q_0)=\sum\frac{(\log q_1-\log q_0)(p_1q_1-p_0q_0)}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}\cdots\cdots\cdots(35)''$$

しかし $P_{01}Q_{01}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$ なることは，先きに述べたとおりである。これより次式が導かれる。

$$\log P_{01}+\log Q_{01}=\log\sum p_1q_1-\log\sum p_0q_0 \qquad \cdots\cdots\cdots(36)$$

これより

$$\frac{\log P_{01}}{\log\sum p_1q_1-\log\sum p_0q_0}\sum(p_1q_1-p_0q_0)=\sum\frac{(\log p_1-\log p_0)(p_1q_1-p_0q_0)}{\log p_1q_1-\log p_0q_0} \qquad \cdots\cdots\cdots(37)$$

なお　$$\frac{\log Q_{01}}{\log\sum p_1q_1-\log\sum p_0q_0}\sum(p_1q_1-p_0q_0)=\sum\frac{(\log q_1-\log q_0)(p_1q_1-p_0q_0)}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}$$

………(38)

上の(37), (38)式より

$$\log P_{01}=\frac{\log\sum p_1q_1-\log\sum p_0q_0}{\sum(p_1q_1-p_0q_0)}\sum\frac{(\log p_1-\log p_0)(p_1q_1-p_0q_0)}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}$$

………(37)′

かつ　$$\log Q_{01}=\frac{\log\sum p_1q_1-\log\sum p_0q_0}{\sum(p_1q_1-p_0q_0)}\cdot\sum\frac{(\log q_1-\log q_0)(p_1q_1-p_0q_0)}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}$$

……(38)′

あるいは　$$P_{01}=\log^{-1}\frac{\log\sum p_1q_1-\log\sum p_0q_0}{\sum(p_1q_1-p_0p_0)}\cdot\sum\frac{(\log p_1-\log p_0)(p_1q_1-p_0q_0)}{\log p_1q_1-\log p^0q_0}$$

………(39)

かつ　$$Q_{01}=\log^{-1}\frac{\log\sum p_1q_1-\log\sum p_0q_0}{\sum(p_1q_1-p_0q_0)}\cdot\sum\frac{(\log q_1-\log q_0)(p_1q_1-{}_0qp_0)}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}$$

………(40)

が応立する。以上の各算式が「時点逆転テスト」に合格するか否か，このことが当面の問題であったし，そのことの証明のための準備的展開が本稿のこれまでの作業内容であった。すなわち $P_{10}=P_{01}$ が成立するか否かが，問題である。次の式の展開こそがこれを証明するものである。

すなわち

$$\log P_{10}=\frac{\log\sum p_0q_0-\log\sum p_1q_1}{\sum(p_0q_0-p_1q_1)}\cdot\sum\frac{(\log p_0-\log p_1)(p_0q_0-p_1q_1)}{\log p_0q_0-\log p_1q_1}$$

……(41)

$$=\frac{\log\sum p_1q_1-\sum p_0q_0}{\sum(p_1q_1-p_0q_0)}\cdot\sum\frac{(\log p_1-\log p_0)(p_1q_1-p_0q_0)}{\log p_1q_1-\log p_0q_0}$$

$$=-\log P_{01}$$

上の(41)式より P_{10} は P_{01} の逆数であることが明らかであり，同様に Q_{10} は Q_{01} の逆数である。これより上式より確証されることは，理論的に物価指数お

よび基準時点と比べて比較時点における商品グループの数量指数を表わすということである。

しかるに上記の算式によって計算される物価指数は一定の物価水準を表わすというには程遠いものというべきである。単一の商品の個別価格指数は明らかに物価水準の変動を測定することが不可能である。すなわち，その基準年度が変更されるときは，新しく設定される基準年度と比べてある年度における単一商品の個別価格指数は旧基準年度に比べて新基準年度の物価指数を乗じて旧基準に比べてその年度の物価指数に相等しい。すなわち，これは$\frac{p_2}{p_1}\times\frac{p_1}{p_0}=\frac{p_2}{p_0}$の関係より生ずる。しかるに，それを理論的に決定したように商品グループの物価指数は $P_{01}Q_{01}\cdot P_{12}Q_{12}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_0q_2}{\sum p_1q_1}=\frac{\sum p_2q_2}{\sum p_1p_1}=P_{02}Q_{02}$ が成立するゆえに $P_{01}P_{12}\fallingdotseq P_{02}$ が成立したが同一の特徴を有しない。なお，フィッシャーの理想式により計算される。物価指数は，このような特徴を欠く[9]。けだし，商品グループの物価変動を表示する物価指数は，基準時点と比較時点における諸価格と数量との合成関数であり，その基準時点が変更されるとき新しく求められる指数値は旧指数に対して確定不変の比率を有せず，したがって物価指数の理念を物価水準の理念から区別することが希ましいと考えられる。実はここにこそ原子論的物価指数論の特徴がうかがわれるのである。

5）以上，述べたことは，効用の可測性の否定，したがって従来の物価指数の経済理論の基礎のぜい弱さ，便宜性を原子論的指数論を展開することによって，むしろそれに関連する研究の余地のあることを例証するものである。

9）I. Fisher, ibid., p. 358.