指数の一般均衡理論

指数の一般均衡理論

高木秀玄

一

物価指数、数量指数に関する理論は、それを純粋に統計学的に追求するものと、需要および生産に関する経済理論的に展開するものとに大別され、前者は時間的・場所的に相異なる同種集団間の「相対的増減」の測度としての指数理論であり、指数はいわゆる「統計的比率」の一種であるとされる。これに対して指数の経済理論は消費者と生産者の行動分析、すなわち、家計と企業の行動—効用と利潤の極大化—分析を指数を通じて行なうものであり、貨幣の限界効用の測定、国民所得の実物化（デフレーターとしての指数の機能づけ）等の問題につながる。すなわち、ハーバラーが「指数の意味」（Der Sinn der Indexzahlen）と言った場合のその経済理論的意味を追求するものである。[1] なお、ステーレーの「物価指数の経済理論の発展」（A Development of the Economic Theory of Price Index Numbers, *Review of Economic Studies*, Vol, XI. No. 3, June, 1935）での経済理論は、われわれがここで言うような

ものではない。けだし、ステーレーによれば、無差別曲線あるいは無差別図表を根底におく、したがって、消費者物価指数あるいは生計費指数の代表的算式であるラスパイレス式とパーシェ式が「真の指数」の上限と下限をなすという結論へ到達するための解析幾何学的考察が、そのかかげる経済理論であった。(2)

本稿では、ホフステンが「指数の比較的に近時の理論において、よりたいせつなものは指数の特定の意味とそれがみたすべき目的であり、その二つの発展方向、すなわち、その一つはコニュスによって展開された無差別アプローチであり、他はディビィジアによって与えられた積分解によるものである」と述べた後者を基盤において、その一般均衡論、すなわち未知数の個数と方程式の個数とが相等しい体制に関する理論を取り扱うものである。なお、特に**ディビィジア**式によった理由は、後述するように、それには理論構成において、また分析の方法論という側面よりみて、限界性—微分的処理の可能性・積分可能性—の概念を導入しており、一般的均衡論が具体的には微分方程式によって組立てられておることより、両者は密接に関連するからである。(3)

(1) Haberler, H.: *Der Sinn der Indexzahlen*, Tübingen, 1927.
(2) Stahle, H.: A Development of the Economic Theory of Price Index Numbers, *The Review of Economic Studies*, Vol. II,;1934-35, pp. 163-188.
(3) Hofsten, E.: *Price Indexes and Quality Changes*, Stockholm, 1952, pp. 15.

二

生産過程の最終生産物、すなわち消費者財は、その経済を構成する個人もしくは個人の集団の間にどのように配分されるかを決定する問題は「転置の問題」として経済理論において重要な位置を占めるものである。かかる個人

の集団に対応して財貨のグループが次のように分類される。すなわち

1　資本財あるいは生産者財（他の財貨の生産に用いられるような財貨）。

2　本源的生産要素。すなわち、土地や労働用役のように新たに生産されない生産要素。

3　消費者財

これらの三グループあるいは部門によって一つの経済体系が記述され、しかもこの際に、われわれは厳密な競争、すなわち純粋競争の条件のもとでの均衡状態を前提とする。したがって、「どのような個人（消費者または企業）も直接には諸価格を左右できない」し、「諸価格は、消費者や企業が所与として受けとるパラメータとなる」[1]のである。

このような財貨のグループ分けはエバンスによれば次のようである。[2]すなわち

U_1＝単位時間当りの資本あるいは資本用役の生産高

U_2＝単位時間当りの労働用役

U_3＝直接消費に対する単位時間当りの商品生産高

彼によれば以上の三部門の数量は変数として取り扱われる。勿論、この場合にはストックはゼロであるという想定をたてる。第一部門の資本用役は資本用役自身の生産と消費者財、すなわち第三部門のグループに属する商品の生産に当てられ、第二部門の労働用役は第一部門の資本財または生産者財の生産と第三部門の消費者財の生産に当てられ、更に第三部門の消費者財は第一・二・三部門の用役の所有者による直接消費に供するため第一・二・三部門へとグループ分けされる。この事実は形式的に次の関係式で表現されるのである。

(2.1)　$U_1=U_1^{(1)}+U_1^{(3)}$

$$U_2 = U_2^{(1)} + U_2^{(3)}$$

$$U_3 = U_3^{(1)} + U_3^{(2)} + U_3^{(3)}$$

この際に各項のサフィックスはそれぞれの部門を表現し、右肩の括弧内の数字はいかなる部門へ流れるかを示すものである。式より

(2.2)　$U_3^{(1)} = aU_3,\ U_3^{(2)} = bU_3,\ U_3^{(3)} = cU_3$

となる。なお、経済理論の基礎条件より

$$a+b+c=1$$

となる。したがって、各項はゼロより小であり、次のような函数が成立するをうるのである。

(2.3)　$U_1 = \phi(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}),\ U_3 = \theta(U_1^{(3)}, U_2^{(3)})$.

特に第二部門については次式が成立する。

(2.4)　$U_2 = l$, a 定数。

直接消費に関する生産高は極大であるべきであって

(2.1), (2.3), (2.4) とにより

$$U_1^{(1)} + U_1^{(3)} = \phi\ (U_1^{(1)},\ U_2^{(1)})$$

$$U_3 = \theta\ (U_1^{(3)},\ l - U_2^{(1)})$$

この場合、$U_1^{(1)}, U_1^{(3)}, U_2^{(1)}$ は独立変数であり、なお、これを簡単に表現するために、x、y、zを用いることにする。すると

(2.5)　$x+y=\phi(x, z)$

U_3 は (2.5) 式によって最大でなければならない。したがって次の関係式が導かれる。

(2.6)　$U_3=\theta(y, l-z)$

$$\theta_1(y, l-z)=0, \quad \theta_2(y, l-z)=0.$$

上式の θ_1 と θ_2 は (2.3) 式の二つの独立変数のひき数の増加函数であって、それについての θ の偏導函数であり、次の微分方程式が導かれる。

(2.7)　$\theta_1(\alpha, \beta)=\dfrac{\partial\theta(\alpha, \beta)}{\partial\alpha}, \quad \theta_2(\alpha, \beta)=\dfrac{\partial\theta(\alpha, \beta)}{\partial\beta}.$

すなわち、未知数 y、z を決める二個の方程式が存在し、(2.5) 式より x の値が求まるのである。更にこの式より

（i）　$z=0$ であれば $l-z$ の最大値が決まり

$$x+y=\phi(x, 0)$$

（ii）　$y=0$ であれば

$$x+y=x$$

(iii)　$z=l$ であれば

$x+y$ を最大ならしめる。

したがって函数 ϕ および θ に関する仮定は次のような結果へと導く。

$$\phi(x, 0)=x, \quad \phi(0, z)=0, \quad \theta(0, l-z)=0, \quad \theta(y, 0)=0.$$

以上はエバンスのいう単純化経済体系における三部門間の均衡状態に関する諸条件の説明であるが、同様のこと

がランゲによって次のように説明される。(3)

ランゲの前提は、

(一) 企業家の数は十分に大であり、その生産高を自由に変化させて価格を自己の意志で決定することはできない。すなわち、価格は彼にとって与えられたパラメータであり、このことはエバンスと同じである。

(二) 長期均衡において価格と平均費用とが相等しいような産業への新しい企業家の自由参加が可能であること。これはアレンによって「転入の自由」と称せられたものである。(4)

このうちランゲは第一の企業者間の自由競争を根底において、われわれが先に分類したような部門を設定する。たとえば、最終消費者財としての木材は生産設備=生産者財としての斧と労働とを以って切り出す過程の例としてあげる。この際に労働は「生産の本源的要素」であり、その大きさは賃金の函数であり、完成消費者財と生産設備とは相異なる企業者によって生産され、完成消費者財=商品を生産する企業者グループを第一部門、生産設備だけを生産する企業者グループを第二部門とする。すなわち、既述の第一部門はランゲでは第二部門、第二部門はここで特別に掲げられないで、第三部門が第一部門として取られている。いま、この相違はそのままにしてランゲの所論を述べよう。

第一部門に対して

$$x=F(m.\ l) \tag{2.8}$$

第二部門に対して

$$m+m'=\phi(m',\ l') \tag{2.9}$$

これらの函数関係において x＝第一部門の生産高、m＝生産設備高、l＝労働供給量、m'、l'は第二部門の当該量である。

生産設備は単位期間に完全に消耗するから

(2.10)　$l+\iota'=L$　（Lは定数）。

労働供給量は賃金に依存するから次の函数関係で表現される。

(2.10a)　$\iota+\iota'=\Psi(pl)$

ここで、plは単位時間当りの賃金率であり、Ψは労働の供給函数である。

(1) Allen, R. G. D. : *Mathematical Economics*, London 1956, p. 314.
(2) Evans, G. C. : Maximum Production Studied in a Simplified Economic System, *Econometrica*, Vol. II, No. 1, 1934, p. 37.
(3) Lange, O.: The Place of Interest in the Theory of Production, *Review of Economic Studies*, Vol. III, 1936, p. 159.
(4) Allen, R. G. D.: *ibid*, p.314.

三

均衡状態の有効方程式を前節で述べた三部門間の関連性において考察し、われわれの目的である指数の経済理論の根拠を組立てることが、ここでの課題である。

$q_1, q_2, \cdots, q_n=n$ の相異なる生産者による n 種の商品の単位期間当りの生産高

$p_1, p_2, \cdots p_n$＝各生産高の販売価格

$q_1, q_2, \cdots, q_n$ は前節で述べた第一部門（生産者財）、第二部門（本源的生産要素である労働・土地の用役）、第三部門（消費者財）に配置され、次式が成立する。

$$q_i = q_i(q_j^i)_{j \cdot 12} \qquad (i.\ 13) \tag{3.1}$$

q_j^i は q_i の生産において単位期間に用いられる q_j の部分であり、単位期間に生産される第一、第三部門の任意の商品の数量 q_i が、それに投入される生産者財量と労働量の技術函数であり、すなわち、q_i は第一あるいは第三部門の任意の i に対する第一、第二部門のあらゆる q_j^i の函数であることを意味する。更に第一あるいは第二部門における任意の q_i の全体は、第一、第三部門の財貨全部の生産者間に分けられる。次の (3.2) 式はこの状態を示すものである。

$$q_i = \sum_{j \cdot 13} q^j{}_i, \qquad (i.\ 12) \tag{3.2}$$

均衡状態成立の条件としてあらゆる時点 t において上述の各部門に商品のストックが存在しないことを明確にしておかなければならない。また、純所得あるいは利潤はすべて第三部門の消費者財に費消されると想定しておく。ここでの均衡は移動均衡であるから、これまで述べたそれぞれの数量は時間的に確定不変であるを要しない。

利潤は次式によって示される。すなわち

$$\pi_i = p_i q_i - \sum_{j \cdot 12} p_j q_j^i, \qquad (i.\ 13)$$

$$\pi_i = p_i q_i \qquad (i.\ 2)$$

この二式は純所得式とも言うことができるのであるが、(3.1) 式によって時点 t においては

$$d\pi_i = q_i dp_i - \sum_{j \cdot 12} q_j^i dp_j + \sum_{j \cdot 12} \left(p_i \frac{\partial q_i}{\partial q_j^i} - p_j\right) dq_j^i, \qquad (i.\ 13) \tag{3.3}$$

が成立する。

既述の通り、価格は生産者に対して与えられた行動決定のパラメータであり、その変動を考慮に入れないでその利潤を極大化するよう計画する。このことが厳密な完全競争の実態である。したがって、この場合に利潤の微分方程式である（3.3）式より、この生産者の観点を表わし、その生産者財を本源的生産要素の使用を規定する次の微分方程式、すなわち、第一、三部門のq_i、第一、二部門のq_jに関する極大利潤の条件式が導かれる。

$$(3.4)\qquad p_i\frac{\partial q_i}{\partial q_j}-p_j=0 \qquad (i.\ 13)\ (j.\ 12),$$

これをランゲは次のように展開する。すなわち

p_x…最終消費者財の単位価格

p_m…生産者財の単位価格

p_l…労働の価格（単位期間当りの賃金率）

π…第一部門（われわれの第三部門）の利潤

π'…第二部門（われわれの第一部門）の利潤

$$(3.5)\qquad \pi=xp_x-mp_m-lp_l$$

$$(3.5')\qquad \pi'=(m+m')p_m-m'p_m-l'p_l$$

あるいは

$$\pi'=mp_m-l'p_l$$

となる。いま、各部門の極大利潤を得るそれぞれの生産方法を導けば次のようになる。

第Ⅰ部門 $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\pi}{\partial m}=F_m p_x-p_m=0\\[2mm]\dfrac{\partial\pi}{\partial l}=F_l p_x-p_l=0\end{array}\right.$

第Ⅱ部門 $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\pi'}{\partial m'}=\phi m' p_m-p_m=0\\[2mm]\dfrac{\partial\pi'}{\partial l'}=\phi l p_m-p_l=0\;,\end{array}\right.$

これらの方程式より次の（3.6）式が導かれる。

（3.6）
(1)　$p_m=F_m p_x$
(2)　$p_l=F_l p_x$
(3)　$1=\phi_m{}'$
(4)　$p_l=\phi_l{}' p_m$

各式はそれぞれの生産要素の価格が、その限界生産物の値に相等しいことを示すものである。(1)

以上の極大利潤条件を根拠にして既述の（3.4）式は、時点tにおける均衡よりの変位に対応する（3.4a）式に帰納することができる。すなわち、

（3.4a）　$d\pi_i=q_i dp_i-\sum_{j,12} q_j{}^i dp_j$　　（i. 13）

第一・三部門の利潤π_iの総和は$\Pi=\sum_{i,13}\pi_i$であり、上の（3.4a）式は（3.2）式により、その微分は次の形式をとるのである。

(3.4b)　$d\Pi=\sum_{i:3} q_i dp_i-\sum_{i:2} q_i dp_i$

他方、これらの利潤のすべてが消費者財、すなわち、第三部門に属する財貨に費消されるという約束より、

(3.7)　$\Pi=V_3-V_2$

が成立する。ここで既述の（3.2）式よりV_3は第一・二部門の、q_iが第三部門の財貨の生産者に分割されることを意味する $V_3=\sum_{i:3} p_i q_i$ と同様に、第二部門の財貨の生産者に分割されることを意味する $V_2=\sum_{i:2} p_i q_i$ での方程式である。これより、（3.4b）式、（3.7）式より次の（3.8）式を得るのである。

(3.7)　$\sum_{i:3} p_i dq_i=\sum_{i:2} p_i dq_i$

この式より第三部門と第二部門に属する生産者に割り当てられるq_iの数量の総和は相等しくなるのである。特に、制約が本源的要素が完全雇傭の状態であるという想定を述べるため導入されるときは、すなわち、第二部門のq_iが時点tの所与の函数であるとの想定を表わすために導入されるときは、既述の三部門の経済体系に関する「有効転置の原則」として次式が導かれるであろう。

(3.8)　$\sum_{i:3} p_i dq_i=0$

以上の制約条件は生産者の計画を表わす

$$\frac{p_i \partial q_i}{\partial q_j^i}=p_j$$

に予め導入しておく必要はないことに注意しなければならないのである。

（1）Lange, O.: *ibid.* p. 172

四

以上の一般均衡理論を基盤において指数の経済理論を組立てることが本稿の目的であることは既に指摘したところであるが、この際の指数算式は次のディビィジア式である。いわゆる函数論的物価指数論の大部分は無差別曲線・図表を理論構成の足場とするのに対して、彼の理論は限界性の概念、ゆえに微分・積分の概念を手懸りとするものであることによって、独自の性格をもつものであることは既に指摘しておいた。

彼の目的は「貨幣価値」（la valeur de la monnaie）を示す指数に関する精確な解を見いだすことである。[1] 同じ目的を無差別曲線を媒介として指数によって果そうとしたものにフリッシュ、[2] アレン[3]があるが、その方法は全く相異なる。ディビィジアは全体としての経済社会に関して次式が成立するという。

$$(4.1)\qquad I_{01}\cdot Q_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}.$$

いうまでもなく、I_{01}は基準時点（0）、比較時点（1）の物価指数であり、Q_{01}は数量指数であり、その積は価額比に相等しい。これを一般化し数量指数と物価指数を別々に述べると

$$(4.2)\qquad \frac{dQ_r}{Q_r}=\frac{\sum_{i:r}p_idq_i}{\sum_{i:r}p_iq_i},\qquad \frac{dp_R}{p_R}=\frac{\sum_{i:r}q_idp_i}{\sum_{i:r}q_ip_i},\qquad r=1,2,3.$$

なお、この（4.2）式は次のように書くことができる。すなわち

$$(4.2a)\qquad \frac{dQ}{Q}=\frac{\Sigma pdq}{\Sigma pq},\qquad \frac{dI}{I}=\frac{\Sigma qdp}{\Sigma qp}$$ [4]

（4.1）式を対数微分法によって次のような形に変形すると、物価指数と数量指数とを同時に得ることができる

のである。

$$(4.3)\qquad \frac{dI}{I}+\frac{dQ}{Q}=\frac{\Sigma qdp}{\Sigma pq}+\frac{\Sigma pdq}{\Sigma pq}$$

これより、ディビィジア指数は、その微分は価格と数量の微分より成る線型方程式の形をとり、数量だけが変化するとき、価格は変化しない。また、その逆も成立し、物価指数と数量指数の積が貨幣価値指数であるという特徴を有する。いま、価格の変化が無限小あるいは限界単位で生ずると仮定する。すると（4.2a）式を積分し

$$(4.4)\qquad I_p=exp\left(\int_c \frac{\Sigma qdp}{\Sigma qp}\right)$$

あるいは P_D^0 を基準時点の価格 $p^0(p_1{}^0, p_2{}^0, \cdots)$ の指数、c を価格 p が p^0 から p' へ変化する径路であるとすると

$$(4.4a)\qquad P_D=P_D{}^0.\ exp\left(\int_c \frac{\Sigma q_i dp_i}{\Sigma q_i p_i}\right)$$

となる。再び本稿で用いられる形で表現する必要がある。上述の径路に沿って積分すると

$$(4.5)\qquad Q_2(\lambda)=Q_2(\lambda)exp\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda}\left(\sum_{i.2} p_i dq_i/V_2\right)\right],\quad V_2=\sum_{i.2} p_i q_i\,.$$

となる。ここでλは「変形のパラメータ」であり、（3.7）式は次式で述べられる。

$$(4.6)\qquad dQ_3=O.$$

すなわち、完全雇傭の状態での第二部門での厳密な競争の仮定のもとで、消費者財指数は既述の有効変位について極値となるのである。これを更に精確にするには既述の技術函数 $q_i=q_i(q_j{}^i)$ の二次微分を考察し、その導函数の追加的な仮説を取り入れる必要がある。

以上より部門指数は

$$(4.7)\qquad (dQ_3)_1=\frac{Q_3}{V_3}\sum_{i:3}\sum_{j:1} p_i\frac{\partial q_i}{\partial q_j{}^i}dq_j{}^i\,,$$

が導かれる。これは生産者財の使用量の変化による消費者財の数量の変化を表わすものであり、消費者財の数量Q_3の製造に加わる生産者財の部分量を示す次式とともに相互に関連し合うのである。すなわち

(4.8) $$dQ_1{}^3=\frac{Q_1}{V_1}\sum_{i:1}\sum_{j:3} p_i dq_i{}^j .$$

したがって、次の微分方程式は両部門間の部分変化率、すなわち生産者財の帰与についての消費者財指数の部分変化率を示すものである。すなわち

(4.9) $$\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1{}^3}=\frac{(dQ_3)_1}{dQ_1{}^3} .$$

均衡状態において、(4.9) 式および$Q_1\cdot Q_3$の偏導函数は次の各式を満足しなければならない。

(4.10) $$\frac{\partial Q_1}{\partial Q_1{}^1}=1, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial Q_2{}^1}=\frac{V_2}{Q_2}\Big/\frac{V_1}{Q_1},$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1{}^3}=\frac{V_1}{Q_1}\Big/\frac{V_3}{Q_3}, \qquad \frac{\partial Q_3}{\partial Q_2{}^3}=\frac{V_2}{Q_2}\Big/\frac{V_3}{Q_3},$$

消去法により上式より（$\frac{V_1}{Q_1}$を消去すると）

(4.10a) $$\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1{}^3}\,\frac{\partial Q_1}{\partial Q_2{}^1}=\frac{\partial Q_3}{\partial Q_2{}^3}$$

を導くことができる。

指数の定義より

$$\frac{P_3Q_3}{P_{30}Q_{30}}=\frac{V_3}{V_{30}},$$

言うまでもなく添字0は基準時点の状態を表わすものであり、左辺の分母 P_{30} Q_{30} は基準時点の物価指数と数量

指数の積を表わし、右辺の分母V_{30}は基準時点の貨幣価値指数を意味するものである。いま、基準時点の各指数が1に相等しいときは、$V_3/Q_3=V_{30}P_3$ となる。別言すれば、物価は数量が変化するに従って変化する次元をもつものであるから、数量 V_3/Q_3 は第三部門の数量指数と貨幣価値指数の比率であって価格に直接の関係はない。しかし、本稿の出発点をなす単純化体系そのものが生産者財、労働、消費者財を三種類の商品として取り扱っており、次の各方程式に関連する体系を手懸りとしているのである。

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2{}^1}=\frac{p_2}{p_1}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial q_1{}^3}=\frac{p_1}{p_3}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial q_2{}^3}=\frac{p_2}{p_3},$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_1{}^1}=I, \quad \frac{\partial q_3}{\partial q_1{}^3}\frac{\partial q_1}{\partial q_2{}^1}=\frac{\partial q_3}{\partial q_2{}^3}, \quad dq_3=O.$$

以上の各方程式を解いて部門間の転入・出の問題を解決することができるのである。

ある観点よりすると、dQ_1^3 のような個別指数の部分を定義により、次のような真の個別指数で置換することができる。すなわち

$$\frac{dQ_1{}^3}{Q_1{}^3}=\frac{I}{V_1{}^3}\sum_{i:1}\sum_{j:s} p_i dq_i{}^j, \qquad V_1{}^3=\sum_{i:1}\sum_{j:3}\Sigma\, p_i q_i{}^j.$$

この方程式は（4.10）式と同じ方程式へと導く。

（1）Divisia, F.: L'indice monétaire et la théorie de la monnaie, Revue d' économie politique, 39, pp. 842-861, 980-1008, 1121-1151, 40, pp. 49-87. 999-1004.

: *Economique Rationnelle*, Paris, 1928, p. 268.

Kendall, M. and Buckland, W.: *A Dictionary of Statistical Terms*, London, 1957, p. 88.

（2）Frisch, R.; *New Methods of Measuring Marginal Utility*, Tübingen, 1932.

（3）Allen, R. G. D.: On the marginal utility of money and its application, *Economica*, Vol. XIII, 1933,

（4）Allen, R. G. D.: *Mathematical Analysis for Economists*, London, 1962, pp. 246-8, 300, 331.
高木訳「経済研究者のための数学解析」上巻、第十章

五

これまで、われわれは完全競争あるいは厳密な競争を前提として理論を展開してきた。本節では不完全競争あるいは制限的競争のもとで既述の有効な転置がどのようにして行なわれるかを分析してみよう。

いま、本源的生産要素の数量が与えられている場合に（3.7）、（3,8）式による有効転置方程式は不完全競争あるいは独占形態がこれらの方程式の修正形式で表現される均衡状態を期待しうるのである。生産者がその生産物へ対する需要の価格に対する関係に関して何らかの仮説を試みるとき、上の二方程式は成立する。その理由は、その価格がこの生産者の行動決定の範囲外にあるとは想定しないからである。特に独占企業はその利潤を極大化しようと計画するとき $dp_i=0$ とは想定しないで、その生産物の需要の弾力性 e_i が（次の方程式のなかの）どのようなものであるかを知ると仮定する。すなわち

$$p_i dq_i = e_i q_i dp_i \qquad (i.\ 13) \tag{5.1}$$

これより、この独占企業が価格は与えられたその費用函数のなかに含まれると考えるとき、その価格と生産との間の関係について、この独占企業の計画を支配する次式へと導くのである。すなわち

$$p_i \frac{\partial q_i}{\partial q_i} = r_i p_i \qquad r_i = \frac{e_i}{e_i - 1}, \qquad (i.\ 13)\ (j.\ 12), \tag{5.1a}$$

したがって、dp_i, (j. 12) を含まない $d\pi_i$ の部分が消去されるようにすると

$$p_i dq_i + q_i dp_i - \sum_{j.12} p_j dq_j^{\,i} = O, \qquad (i.\ 13)$$

が成立し、(5.1) 式で (5.1a) が生ずるのである。この和を求めると

$$(5.2) \qquad \sum_{i.13} (p_i dq_i + q_i dp_i) = \sum_{j.12} p_j dq_j$$

が導かれる。

上述のこの独占企業の仮定が正しければ、(5.1) 式は本稿のはしがきで述べた三部門の経済体系の追加的制約条件式となり、(5.2) 式はわれわれのいう有効転置の原則となるのである。なお、この制約条件式は r_i を1に等しいとおいて了解されるように、形式的には (3.7) 式を含んでおり、同様の変形は (4.10) 式においても生ずるのである。したがって、1と相異なる次の形の方程式

$$\frac{\partial Q_u}{\partial Q_w^{\,u}} = R_w^{\,u} \frac{V_w}{Q_w} \Big/ \frac{V_u}{Q_u}$$

のなかの係数 R_w^u は完全競争よりの解離の幅を測るものである。なおこの方程式のなかの u および w は三部門のなかの細分部門に関連する添字と考えなければならない。

これまで取り扱ってきた諸関係式は、方程式の個数が示す座標 q_i^j、p_i を十分に決定することを必要としないで求められた。均衡状態の描写図を完全なものとするために、一般に需要関係が与えられる。たとえば、q_i, (i. 3) に費消される π_i の部分、すなわち、既に約束したとおり、利潤は第三部門の消費者財に費消されるが、その一部分を示す f_{ij} の大きさは統計的に確定されるのである。エバンスが「多数個の変数より成る多数個の連立方程式は、それぞれ正しいこともあるし間違っていることもあり、経済体系に関して余り情報を提供しない」と指摘し、[1] 必要と

する情報をしだいに増大する二つの可能性として統計的操作と経験によって示唆される関係に従うと言う場合の前者がこれに対応するのである。ゆえに、前節まで述べた完全競争あるいはフリッシュのいう純粋競争の想定だけでは経済体系の全般にわたる説明は不十分であり、むしろ独占企業の存在を考慮に入れることこそ、より必要な方法と言わなければならない。

（1） Evans, G.: *ibid*, P. 37.

六

ここで利子率の要素を取り入れて問題の解決へと進もう。すなわち、従来の指数理論の欠けるところの一つともいうべき面であり、あるいは本稿の目的は指数の経済理論に利子率の要素を取り入れることによって、経済分析の手段としての指数の意味を内容豊かにしようとするのである。

生産に使用される貨幣、すなわち、貨幣資本は特別の部門に属するその所有者より第二部門の本源的生産要素である土地、労働の用役と同様に他の部門に貸付けられ、地代、賃金と同様に利子率として均衡方程式に入ってくる。利子率の導入は、総生産費が生産者によって次式で示されるように限られた大きさで取りあげられると仮定して可能となるのである。すなわち

$$\sum_{j.12} p_j q_j^{\,i} = K_i \qquad (i.\ 13) \tag{6.1}$$

第一・三部門の q_i の総和が第一・二部門の財貨の生産者間に分割される場合の総生産費額を示すものであり、この場合も利潤の極大化は生産者の行動目的であり、その限界生産物の価値がその価格に相等しいところでそれが実現

されるという命題が取りあげられる。この場合の生産要素の結合は最適結合であり、最適生産要素量である。Kを貨幣資本額とする。しかるとき

(6.2)　$mp_m + lp_l = k$,　（kは定数）

(6.2a)　$m'p_m + l'p_l = k'$.

この方程式に従って極大利潤の条件を決める必要がある。通常、このような場合に取られる方法としてのラグランヂュの乗数を用いると

(6.3)　$\pi - \lambda k = xp_x - mp_m - lp_l - \lambda(mp_m + lp_l)$

が成立し、λはラグランヂュの乗数であり、[1] 次の（6.3a）式に変形することができる。

(6.3a)　$\pi - \lambda k = xp_x - mp_m(1+\lambda) - lp_l(1+\lambda)$.

この方程式より利潤極大生産方法は次のように導かれる。すなわち

$$\frac{\partial(\pi-\lambda k)}{\partial m} = F_m p_x - p_m(1+\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial(\pi-\lambda k)}{\partial l} = F_l p_x - p_l(1+\lambda) = 0 .$$

これより

(6.4)　$p_m = \dfrac{F_m p_x}{1+\lambda}$

(6.5)　$p_l = \dfrac{F_l p_x}{1+\lambda}$

(6.6)　$1 = \dfrac{\phi_m{}'}{1+\lambda}$

$$(6.7)\qquad pl=\frac{\phi_i p_m}{1+\lambda}.$$

(6.4—6.5) 式は完成消費財部門（われわれの第三部門・ランゲの第一部門）、(6.6—6.7) 式は生産者財部門（われわれの第一部門・ランゲの第二部門）に関する貨幣資本以外の生産要素価格であり、(6.4)—(6.7) 式と第一部門の生産函数

$$(6.8)\qquad x=F(m,l)$$

第三部門の生産函数

$$(6.9)\qquad m+m'=\phi(m',l')$$

両部門の労働供給量

$$(6.10)\qquad l+l'=L$$

および既述の各部門の生産要素の購入のために投下される貨幣資本額を示す (6.2)—(6.2a) 式の九個の方程式は七個の未知数 m, l, m', l', x, p_m および p_l を含み、ラグランヂュの乗数λとλ'を決めるに際して方程式の方が二個だけ超過している。

したがって、二個のラグランヂュの乗数の経済理論的解釈を更に追求しなければならない。そのために、λに関して考察し、λ'に類推しなければならない。

第一部門の生産者財を生産する企業の貨幣資本額の変化の、この企業によって得られる利潤に及ぼす効果を分析する。そのため次の一連の方程式を述べておかなければならない。既に指摘したようにわれわれの問題は純利潤極大化の生産方法を決めることであったが (3.5) 式より

(6.11)　$d\pi=p_xd_x-p_md_m-p_ldl$

を得る。なお、（2.8）式より商品の生産高の変化は

(6.12)　$d_x=F_md_m+F_ldl$

で示される。これを（6.11）式へ代入すると

$$d\pi=(F_mp_x-p_m)d_m+(F_lp_x-p_l)dl$$

となり、更に（6.4），（6.5）式より

$$F_mp_x=(1+\lambda)p_m$$

$$F_lp_x=(1+\lambda)pl$$

を得る。これを$d\pi$に関する微分方程式に入れると次の結果を得ることができる。

$$d\pi=[(1+\lambda)p_m-p_m]d_m-[(1+\lambda)pl-pl]dl$$

あるいは

$$d\pi=\lambda(p_mdm+pldl).$$

なお、既述の（6.2）式より（但しこの場合Kは変数であると想定して）

(6.13)　$p_md_m+p_ldl=dk$

したがって

(6.14)　$\lambda=\dfrac{d\pi}{dk}$

が導かれるが、この式の右辺は貨幣資本の増大による利潤の限界増加率を示すものであり、貨幣資本の限界利潤性

と称せられるものである。いま、Δkを企業の貨幣資本の増分とすれば

$$\frac{d\pi}{dk}\Delta k$$

に当るものが利子として支払われなければならない。ゆえに $d\pi/dk$ は利子率を示すものであり、上述の（6.4）式よりλ＝ラグランヂュの乗数は利子率に相等しい。このことは第三部門のλ'に関しても同様である。したがってλは費用の要素ではなく、（6.1）式で示される均衡条件において利子率として現われるのである。なお、（6.1）式においてq_j^iの選択に関して次の表現を極大化するのであるが、それはまたラグランヂュの乗数、すなわち利子率が加わる制約式である。

$$I_i = p_i q_i - \sum_{j.12} p_j q_j^i = p_i q_i - \sum_{j.12} p_j q_j^i + \lambda_i \left[K_i - \sum_{j.12} p_j q_j^i\right].$$

これより次の（6.15）式を得ることができる。

$$(6.15)\qquad p_i \frac{\partial q_i}{\partial q_j^i} - (1+\lambda_i) p_j = 0, \qquad (i.\ 13)\quad (j.\ 12).$$

なお、この式より利潤を定義すると

$$\pi_i = I_i - \lambda_i K_i.$$

となる。貨幣資本の借手の側、貸手の側において完全競争の状態を想定するから $\lambda_i=\lambda$ の関係が成立するものと考えられる。

同様の形式的結果はこの数量を極値として求められるのである。すなわち

$$I = \sum_{i.13} p_i q_i - \sum_{j.12} p_j q_j.$$

ただし、この場合の制約式は

$$\sum_{j.1,2} p_j q_j = K = K(t_0)$$

であり、上式が任意の時点において成立することを意味する。Iと総利潤 $\Pi=\sum_{i.1,3}\pi_i$ との間に $I=\Pi+\lambda K$ が成立する。

以上述べてきた各関係式を基礎にあいて、問題としてとられた指数の経済理論へと進む。その最も重要なものは本稿第四節の（4.10）式である。これを物価指数・数量指数の形で表現すると次のようになる。

$$\frac{V_u}{Q_u}\frac{\partial Q_u}{\partial Q_u^{u}}=(1+\lambda)\frac{V_w}{Q_w}.$$

したがって第四節ではV^v・V^wを消去したのであるが、それらを入れて三つの基礎的部門に関して次の関係式を得る。すなわち

$$\frac{\partial Q_1}{\partial Q_1^{1}}=1+\lambda,$$

$$\lambda=\frac{\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1^{3}}\frac{\partial Q_1}{\partial Q_2^{1}}-\frac{\partial Q_3}{\partial Q_2^{3}}}{\frac{\partial Q_3}{\partial Q_2^{3}}}.$$

以上の三式の第二の式の右辺$1+\lambda$は間接的生産要素の限界生産力（すなわち、生産者財の生産を通じて間接に消費者財の生産に加わる）の直接的生産要素の限界生産力へ対する比率に相等しいことを示すものである。これはウィクセルが「利子は節約された労働および土地の限界生産力と現在の労働と土地の限界生産力の間の差である」[1]という場合の「節約された労備」はわれわれでは間接的労働というのである。その理由は実物資本が労働だけで生産され実物資本そのもの、すなわち生産設備、したがって第一部門に属する財貨との協力なくして生産されるかの如き誤り

を避けるためである。

以上より、指数関係式は利子率の導入あるいは変化によるある経済体系より他の経済体系への継起的変化を論ずるとき、特に理論的に重要なものとなる。与えられた本源的生産要素の指数、すなわち、与えられたQ_2の指数の場合には、極めて小さい値をとる利子率λの導入は一次微分の限りではQ_3（消費者財数量）を何ら変更する必要はないのである。すなわち

$$\delta Q_3=0$$

が導かれ、更に次の二次微分方程式が導かれる。

$$\delta^2 Q_3=\lambda\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1{}^3}\delta Q_1$$

この方程式は$Q_3\cdot Q_1$の差分と$Q_1{}^3$の差分、利子率λより組立てられ、われわれの求める指数の経済理論のすべてを内容として持つものであり指数計算式、特に本稿の場合はディビィジア算式との関係で述べてきたのである。これが実際の指数計算にどのような根拠をなすか、また、その結果たる指数値がどのようなものとなるかは、具体的投入・産出に関する統計資料が与えられれば当然、計算可能なものと考えられる。ここでは、今日まで指数の経済理論というとき、ことごとくといってよい程、コニユス的方向によっていたのを、ディビィジア的な微分可能な、したがって一般均衡論との結合が比較的容易な方向に従って一応体系づけてみたのである。

（1）Wicksell, K.: *Lectures on Political Economy*, Vol. I, p. 154.

（本稿は慶応大学における三十九年度第三十三回日本統計学会での報告論文に補筆したものである。）