指数の連続性についての若干の問題(1)

著者	高木 秀玄
雑誌名	關西大學經済論集
巻	7
号	4
ページ	293-327
発行年	1957-07-01
その他のタイトル	Some Problems of Continuity of Index Number
URL	http://hdl.handle.net/10112/15656

指数の連續性についての若干の問題 (一)

高木秀玄

(一)

経済統計学の理論体系のうちで、指数理論は極めて実際的局面と理論的局面とを有する。すなわち、指数の作成に当つて、いかなる商品、価格、賃銀の如き基礎資料を選ぶか、基準時点もしくは期間をいずれにとるか、加重体系をいかなるものとするか、さらには、いかなる平均方法をとるかという一連の問題が取りあげられるのであるが、そのうちの最後の平均方法の決定以外は、著しく実際的性格を有する。広くいつて、指数の作成方法は次のような諸点に焦点がしぼられる。すなわち㈠指数の種々の作成方法の解明、㈡その比較的評価、㈢連鎖基準法対固定基準法の問題、移動ウェートの問題、連鎖化の問題等の極めて特殊化された諸問題がこれであり、既述の調査対象として取り上げられる商品、価格、賃銀等の問題とともに、ここでの㈠の問題は従来の理論家達によつて可成りの研究が試みられてきたのであるが、㈡と㈢とは比較的、その研究がおくれているようである。なお、㈡の問題は次の二つの特長に依つて解決される。すなわち、第一にそれがどのように理解が容易であり、かつ、その計算がどのように容易であるかという実際的な特長であり、第二に理論的特長とでもいわれるものであつて、フイッシャーによつて提唱された時間逆転テスト、要素逆転テスト及び事実上は時間逆転テストの拡張である循環テストの「希ま

しい」三つの特長をめぐる指数の形式論的な特長であり、いずれの指数もこれを有すること、すなわち、このようなテストに合格することが「希ましい」というだけであつて、それを有することを必然的に要請されざるものである。むしろ、いずれの作成方法、あるいは平均方法をとるかという問題こそ、われわれにとつて最も重要であり、これは、単に便宜上の考慮、もしくは実際的考慮のみで解決されざるものである。

われわれはこの問題をユー・ポー・セン教授の所論を基盤において研究しよう。なお、本稿で明らかにしようとするのは、次の四点である。

㈠ 指数の他の特長の研究結果を規定する。

㈡ このような特長を有することの利益を説明する。

㈢ いかなる条件のもとで、それぞれの指数はこのような特長を有するかを明確にする。

㈣ 連鎖基準の如き指数作成の他の特殊化された諸点の新しい特長へ及ぼす効果を考察する。

以上が本稿の目的であり、なお、ここでの特長というのは次の六つである。(1)

(i) 基準時点の変更を行う場合の指数の連続性の持続。

(ii) すくなくとも一ケ以上の商品が旧指数の項目の等しい個数に代替されるときの連続性の持続。

(iii) すくなくとも一ケ以上の商品が旧指数の項目リストより除去される場合の連続性の持続。

(V) 加重体系の変更を行うときの連続性の持続。

(Vi) 上述の変更のすくなくとも二つ以上が同時に行われるときの連続性の持続。

すなわち、時系列解析あるいは計量経済学的研究で最も基本的条件をなす指数をもつて系列の項をなす場合の各項間の連続性の要求をそれぞれの場合に於て吟味、検討しようとするものである。以上の理由で、われわれの本稿の目的は指数に於ける連続性を研究することであるといいうるのである。すなわち、どのようにして指数の作成の各段階に於て、あらゆる上述の変更を行うことを前提として系列が連続的なものとされるかという問題が提せられ、それには、(a) それが現在の適切な描写図を与えるばかりでなく、比較的に容易に連続的ならしめられる。すなわち、問題に直接にせまるか、(b) 指数が何等かの方法で作成されるとき、それに必要な資料を再蒐集し、かつ、再計算するのに余り労力を要せずして連続的な系列をつくり出すことが可能であるかのいずれかであり、この後者は前者が直接的であるに対して間接的であるといいうるものであり、なお、後者では作成の各段階に於いて生じたそれぞれの変更を考慮に入れなければならない。すなわち、指数の連続性は二つの道によつて確保されるのであるが、その最も普通とられる方法は次の如き単純比率法による。

Iは0時点よりt時点までにわたつての指数であるとしよう。いま、t時点でこの指数作成のある面あるいは全体に変更を加えて新指数I'を作成するとしよう。当然、何等かの変更が生ずる。t時点でIとI'との両者が使用される。しかし、t時点以前の数時点たとえば$(t-q)\cdots(q=1,2,\cdots t)$では$I$だけを使用しうるのである。比率法は次のような形態の比例性を要求する。

$$\frac{I'_{t-q}}{I_{t-q}}=\frac{I'}{I_t}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

これより、t時点以前の数時点については、次のようにI'は容易に求められる。

$$I'_{t-q} = \left(\frac{I'_t}{I_t}\right) I_{t-q} \quad \cdots\cdots(2)$$

このようにして、指数の系列は基準時点を遡のぼるt時点まで連続的なものとすることが可能となる。但し、これは基準時点の変更の場合の連続性の持続の可能性であるが、以下に於てこの新旧指数の比例性の条件を取除いての、しかも過去の資料を出来る限り限定して新旧指数間の連続性の研究へと進まねばならない。

理論の展開の便宜上、指数を物価指数に限り、しかも次の十二の算式について問題の吟味を限定することにしよう。全算式を通じてPは価格、Qは数量、Nは商品の項目、さらにその商品が何番目の項目であるかはプレフィックスで、時点又は期間をサフィックスであらわす。なお、aは任意の時点又は期間とする。

Aグループ（価格比のいずれかの平均をふくむ指数）

1. 単純算術平均。　$I(A.\ M) = \dfrac{100}{N}\sum_i \dfrac{{}_iP_t}{{}_iP_0}$.

2. 単純幾何平均。　$I(G.\ M) = \sqrt[N]{\prod_i \dfrac{{}_iP_t}{{}_iP_0}} \times 100$,

（ウェートとして次の三種のものをとる加重算術平均）

3. 基準時点の価額、　$I(W.A.b) = \dfrac{100}{\sum_i {}_iP_0\ {}_iQ_0} \sum_i \dfrac{{}_iP_t}{{}_iP_0}\cdot {}_iP_0\cdot {}_iQ_0$,

4. 比較時点の価額、　$I(W.A.b) = \dfrac{100}{\sum_i {}_iP_t\cdot {}_iQ_t} \sum \dfrac{{}_iP_t}{{}_iP_0}\cdot {}_iP_t\cdot {}_iQ_t$,

5. 任意の時点の価額、 $I(W.A.a)=\frac{100}{\sum_i {}_iP_a\cdot{}_iQ_a}\sum_i \frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}\cdot{}_iP_a\cdot{}_iQ_a$,

（ウェートとして次の三種のものをとる加重幾何平均）

6. 基準時点の価額 $I(W.G.b)=100\times\sqrt[\sum_i {}_iP_0\,{}_iQ_0]{\prod_i\left(\frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}\right)^{{}_iP_0\,{}_iQ_0}}$,

7. 比較時点の価額、 $I(W.G.c)=100\times\sqrt[\sum_i {}_iP_t\,{}_iQ_t]{\prod_i\left(\frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}\right)^{{}_iP_t\cdot{}_iQ_t}}$,

8. 任意の時点の価額。 $I(W.G.a)=100\times\sqrt[\sum_i {}_iP_a\,{}_iQ_a]{\prod_i\left(\frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}\right)^{{}_iP_a\cdot{}_iQ_a}}$,

Bグループ、（「商品の実際購入量」と次のものをとる総和の比率をふくむ指数、）

9. 基準時点の購入量、 $I(Laspeyres)=\frac{\sum_i {}_iP_t\cdot{}_iQ_0}{\sum_i {}_iP_0\cdot{}_iQ_0}\times100$,

10. 比較時点の購入量、 $I(Paasche)=\frac{\sum_i {}_iP_t\cdot{}_iQ_t}{\sum_i {}_iP_0\cdot{}_iQ_t}\times100$,

11. 任意の時点の購入量、 $I(Agg.\,a)=\frac{\sum_i {}_iP_t\cdot{}_iQ_a}{\sum_i {}_iP_0\cdot{}_iQ_a}\times100$,

12. フイッシァーの理想指数、 $I(F)=\sqrt{I(Las.)\times I(Paa.)}$,

二、一局面だけの変更を行う場合の連続性の持続

指数の作成に当つて、旧指数の作成の場合と異る操作をとる場合が多い。勿論、それはその指数のもつ経済的意味がこれをきめる。すなわち、経済の現実を分析する武器としての指数がその本来の要求に応じない場合、いいかえれば、旧指数で現実の経済を分析することが不可能となる場合、あるいは充分にそれが達成し得ない場合には何等かの変更が必然的に行われなければならない。われわれは既にユー・ポー・セン教授のこれについての各種の場合を列挙しておいた。この節ではそのうち（i）より（V）までについて述べよう。これらは時点の変更、特定の商品の代替、特定の商品の追加もしくは除去、さらに加重体系の変更というような唯一つの局面の変更を行う場合の指数の連続性の持続について述べ、このそれぞれが同時に行われる場合については後程、述べることにしよう。

A、基準時点の変更を行う場合の連続性の持続。

指数 I_{t0} は基準時点（=100）によつて計算される。すなわち、$1,2,\cdots,t$ のそれぞれの時点にそれぞれの指数が成立する。（0=100）．いま、基準時点が 0 時点から t 時点へと変更されるとする。すなわち、t 時点以降は新基準に基づいて計算されるのである。問題は再計算を行わないこと、旧資料を使用しないこと。これだけの要求をみたして、t 時点以前の指数が、t=100 の指数へどのようにして転換することが出来るかということである。

ユー・ポー・セン教授はこの場合にも新旧指数間の比率の存在の必要を強調する。[2] 基準時点(0)によつて計算した（$t-q$）時点（$q=1,2,\cdots t$）の指数の、基準時点(0)による t 時点の指数の比率は、基準時点(t)による（$t-q$）時点の指数を規定する。すなわち、

上述の十二ヶの算式のうち次の三式のみがこの比率連続性の特長を有する。すなわち

$$\frac{I_{(t-q)0}}{I_{t0}}=I_{(t-q)t}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(a) 単純幾何平均指数

$$\frac{I_{(t-q)0}}{I_{t0}}\cdot 100=\frac{\sqrt[N]{\prod_i \frac{{}_iP_{t-q}}{{}_iP_0}}}{\sqrt[N]{\prod_i \frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}}}\cdot 100=\sqrt[N]{\prod_i \frac{{}_iP_{t-q}}{{}_iP_t}}\cdot 100=I_{(t-q)t}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(b) 任意の時点の価額を加重係数として使用する加重幾何平均指数($I(W.G.a)$)

(c) 任意の「商品の実際の購入量」をウェートとして使用する総和指数の比率[$I(Agg.a)$], (b)と(c)との証明は、(a)と同様に行われる。然るとき、いかなる条件のもとで、この比率の連続性の転換が可能であり、又は凡そ可能であるかという問題が生ずる。

算術平均法の場合についてみよう。即ち

$$\frac{I_{(t-q)}}{I_{t0}}\cdot 100=\frac{\sum_i({}_iP_{t-q}/{}_iP_0)}{\sum_i({}_iP_t/{}_iP_0)}\cdot 100 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

この第5式は、あらゆる商品iについて P_0 8 P_t なるときのみ次の第6式に等しくなる。

$$\frac{100}{N}\sum_i \frac{{}_iP_{t-q}}{{}_iP_t}\ (=I_{(t-q)t}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

第　一　表

		商		品							
		A	B	C	D	E	F	$I_{(t-q)0}$	I_{t0}	$\frac{I_{(t-q)0}}{I_{t0}}$	$I_{(t-q)t}$
	P_0	120円	240円	240円	120円	120円	480円	—	—	—	—
	P_{t-q}	180	300	420	120	300	720	—	—	—	—
	P_{t-q}/P_0	150	125	175	100	250	150	$158\frac{1}{3}$	—	—	—
								—	—	—	—
1	P_t	240円	480円	480円	240円	240円	965円	—	—	—	—
	P_t/P_0	200	200	200	200	200	200	—	200	$79\frac{1}{6}$	$79\frac{1}{6}$
	P_{t-q}/P_t	75	$62\frac{1}{2}$	$87\frac{1}{2}$	50	125	75	—	—	—	—
2	P_t	120円	240円	480円	120円	150円	480円	—	—	—	—
	P_t/P_0	100	125	200	100	125	100	—	125	$126\frac{2}{3}$	$131\frac{1}{4}$
	P_{t-q}/P_t	150	100	$87\frac{1}{2}$	100	200	150	—	—	—	—
3	P_t	240円	180円	480円	60円	300円	900円	—	—	—	—
	P_t/P_0	200	75	200	50	250	200	—	$162\frac{1}{2}$	$97\frac{17}{39}$	$117\frac{13}{36}$
	P_{t-q}/P_t	75	$166\frac{2}{3}$	$87\frac{1}{2}$	200	100	75	—	—	—	—
4	P_t	180円	180円	360円	240円	240円	600円	—	—	—	—
	P_t/P_0	150	75	150	200	200	125	—	150	$105\frac{5}{9}$	$113\frac{1}{18}$
	P_{t-q}/P_t	100	$166\frac{2}{3}$	$116\frac{2}{3}$	50	125	120	—	—	—	—
5	P_t	480円	300円	480円	120円	540円	1200円	—	—	—	—
	P_t/P_0	400	125	200	100	450	250	—	$254\frac{1}{6}$	$62\frac{18}{61}$	$73\frac{23}{54}$
	P_{t-q}/P_t	$37\frac{1}{2}$	100	$87\frac{1}{2}$	100	$55\frac{5}{9}$	60	—	—	—	—
6	P_t	480円	180円	480円	60円	540円	600円	—	—	—	—
	P_t/P_0	400	75	200	50	450	126	—	$216\frac{2}{3}$	$73\frac{1}{13}$	$111\frac{11}{54}$
	P_{t-q}/P_t	$37\frac{1}{2}$	$166\frac{2}{3}$	$87\frac{1}{2}$	200	$55\frac{5}{9}$	120	—	—	—	—

いま、第一表に掲げたようにA、B、C、D、E、F、の六種の商品があるとする。それぞれの商品の時点0、t、$t-q$ の単位価格が与えられ、t 時点のそれのみが変化するものとする。以下はそれぞれの場合の説明である。

オ一の場合 P'_{0s} と P'_{ts} との間に比例性が存在するときは、比率連続性の関係が成立する。すなわち次式が成立するのである。

$$\frac{I_{(t-q)}}{I_{t0}} = I_{(t-q)t}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

オ二の場合、比例性は存在しないが、P'_{ts} が P'_{0s} と比べて大きなズレなく増大するときは、上式の左右両辺は余り大きなひらきを示さない。表では $126\frac{2}{8}$ と $131\frac{1}{4}$ となっている。

オ三の場合、P'_{ts} の二つ（BとD）が下落し、残りが全部、騰貴する場合、両辺のひらきは大となる。表では $97\frac{13}{89}$ と $117\frac{18}{86}$ となっている。

オ四の場合、唯一つだけ（B）が下落し、他は騰貴する場合は、第三の場合とよく似た結果となる。

オ五の場合、0時点と t 時点との間で、あらゆる商品の単位価格が騰貴するが、その騰貴の仕方が余り比例的でない場合には、何等の均等性も、近似的な均等性も存在しない。

オ六の場合、ある商品の価格はいちじるしく騰貴し、ある商品の価格はいちじるしく下落する場合、左右両辺のひらきは非常に大となる。表では $73\frac{1}{18}$ $111\frac{11}{64}$ となっている。

上述の第一の場合は事実上あり得ないが、第二の場合は非常に事実に近いものである。ユー・ポー・セン教授は以上の諸場合より次の結論を導く。

すなわち、(a) $I_{(t-q)0}/I_{t0}$ と $I_{(t-q)t}$ の間の比例性が近似的に非常に接近するときは、比率連続転換法の使用を妨げないが、両者間のひらきが可成り大なるときは、誤れる結果へと導く故に、その使用は不可能である。(b) 問題の解は新基準時点の価格が旧基準時点の価格に比例的であるが、又は非常に近似的であるという条件に応ずるように新基準時点を規定することによつて果される。[3] しかし、私見によれば、このふたつの結論は別々のものではない。すなわち、(b)は(a)の前提であるにすぎない。

これまでは算術平均に限つて理論を展開してきたのであるが、他の平均法をとる場合はどのようであるか、すなわち、比率連続性の転換法の使用条件はどのようなものであるかが検討されねばならない。既述の十二の算式とそれぞれの転換の適用条件を示すと次のようになる。

$I(A.M)$……………… ${}_tP_0 \propto {}_tP_t$

$I(G.M)$……………… —

$I(W.A.b)$…… …… ${}_tQ_0 \propto {}_tQ_t$,

$I(W.A.c)$…………… ${}_tP_0 \propto {}_tP_t$,

$I(W.A.a)$…………… ${}_tP_0 \propto {}_tP_t$,

$I(W.G.b)$…………… ${}_tP_0 \cdot {}_tQ_0 \propto {}_tP_t \cdot {}_tQ_t$,

$I(W.G.c)$…………… ${}_tP_{t-q} \cdot {}_tQ_{t-q} \propto {}_tP_t \cdot {}_tQ_t$,

$I(W.G.a)$…………… —

$I(Laspeyres)$ …… ${}_tQ_0 \propto {}_tQ_t$,

$$I(Paasche) \cdots\cdots\cdots \quad {}_iQ_{t-q} \infty {}_iQ_t ,$$
$$I(F) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad {}_iQ_0 \infty {}_iQ_{t-q} \infty {}_iQ_t ,$$
$$I(Agg.\,a) \quad \cdots\cdots\cdots \quad — \qquad (4)$$

以上は基準時点の変更の場合の比率連続性の転換の適用条件を示すものであり0は旧基準時点を、tは新基準時点を示すものである。

$I(W.A.b)$, $I(W.G.b.)$, $I(Laspeyres)$ では、基準時点の変更は自動的に加重の変更を伴うことと、$I(W.A.c)$, $I(W.G.c)$, $I(Paasche)$ は比較時点のウェートをとる故に何等の影響を被らないことが指摘される。$I(W.A.a)$, $I(W.G.a)$, $I(Agg.a)$ の三算式は任意のウェートをとる指数である故に加重体系は変更されない。これについては後述する。

B、すくなくとも一種類以上の新しい商品が旧商品の等しい数の種類に代替するときの連続性の持続。

指数によつてとらえる経済の現実は常に変動する。ある時点の商品群を代表する特定の商品は必ずしも他の時点でその代表性を有することは不可能である。故に新旧指数間にとり入れるべき商品間に代替性が見られる。[5] さらにくわしくいえば、㈠旧指数の商品のあるものが代表性を失つた場合、㈡ある特定の商品が市場に登場した場合、しかも、その商品が商品群を代表する性格を有する場合、㈢旧指数では無視してもよかつたが、新しく重要性をもつてきた場合に、その商品を追加する必要が起り、この三つの場合の逆の場合はその商品を除去しなければならない。[6] 勿論、このような追加と除去が行われたとしても指数より成る時系列の連続性は確保されねばならない。なお、追加と除去が同時に行われる場合については後述する。

C、一種以上の商品が旧商品の範囲に追加される場合の連続性の特続。

0時点（=100）による指数Iは、時点TまでNケの商品に基ずいて作成されるとする。いま時点Tでnケの商品が原リストに追加されるとする。nケの商品を記号 $N+1$, $N+2$, …, $N+n$ であらわす。さらに次のように区分する。

$$i=1,2,\ldots,N;\ i=1,2,\ldots,N,N+1,\ldots,N+n;$$
$$j=N+1,N+2,\ldots,N+n;$$
$$t=0,1,2,\ldots,T-1,$$

(1) 単純算術平均法、旧商品範囲での指数は次の第7式による。

$$\frac{100}{N}\sum_{i}\frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}, \quad\cdots\cdots(7)$$

新商品範囲での指数は次の第8式による。

$$\frac{100}{N+n}\sum_{i}\frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}=\frac{1}{N+n}\left(N\cdot I_{t0}+100\sum_{j}\frac{{}_jP_t}{{}_jP_0}\right)\quad\cdots\cdots(8)$$

この式で理解できる通り、時点tの新指数は第二項で示された調節を旧指数に行つて、その時点の旧指数より容易に求めることが可能である。新しく必要とされるのは追加商品に関するものだけである。

(2) 単純幾何平均法、この場合も同様の関係が導びかれる。すなわち、新指数は次の第9式で示されるように新旧の価格比で示される。

$$I'_{t0} = \sqrt[(N+n)]{(I_{t0})^N \cdot \prod_j \frac{{}_jP_t}{{}_jP_0}} \quad \cdots\cdots (9)$$

(3) 比率の加重平坊法、何をもつて加重するかによつて次のように分けられる。

(i) 基準時点のウェートで加重する場合

まず、算術平均法について述べよう。次式が成立する。

$$I_{t0} = \frac{100}{\sum_i {}_iP_0 \cdot {}_iQ_0} \sum_i \frac{{}_iP_t}{{}_iP_0} \cdot {}_iP_0 \cdot {}_iQ_0, \quad \cdots\cdots (10)$$

なお、新指数は

$$I'_{t0} = \frac{100}{\sum_{i,j} {}_{i,j}P_0 \cdot {}_{i,j}Q_0} \sum_{i,j} \frac{{}_{i,j}P_t}{{}_{i,j}P_0} \cdot {}_{i,j}P_0 \cdot {}_{i,j}Q_0$$

$$= \frac{1}{\sum_{i,j} {}_{i,j}P_0 \cdot {}_{i,j}Q_0} \left[I_{t0} \cdot \sum_i {}_iP_0 \cdot {}_iQ_0 + 100 \left(\sum_j \frac{{}_jP_t}{{}_jP_0} \cdot {}_jP_0 \cdot {}_jQ_0 \right) \right] \quad \cdots\cdots (11)$$

必要なものは追加された商品をふくむあらゆる商品の基準時点の価額であり、t 時点では追加商品の価格比だけでよい。加重幾何平均法をとる場合も同様の結果が得られる。すなわち、

$$I_{t0} = \sqrt[\sum_i {}_iP_0 \cdot {}_iQ_0]{\prod_i \left(\frac{{}_iP_t}{{}_iP_0} \right)^{{}_iP_0 \cdot {}_iQ_0}}, \quad \cdots\cdots (12)$$

$$I'_{t0} = \sqrt[\sum_{i,j} {}_{i,j}P_0 \cdot {}_{i,j}Q_0]{(I_{t0})^{\sum_i {}_iP_0 \cdot {}_iQ_0} \prod_j \left(\frac{{}_jP_t}{{}_jP_0} \right)^{{}_jP_0 \cdot {}_jQ_0}} \quad \cdots\cdots (13)$$

(ii) 任意の時点のウェートで加重する場合、

任意の時点の価額をウェートとする算術平均、幾何平均の両方法による関係は、基準時点の価額をウェートとする場合と同じであり、サフィックスは0よりaに変更され、時点tの追加商品の価格比とともに必要とされる資料は、あらゆる商品の任意の時点の価額である。

(iii)　比較時点のウェートで加重する場合、

この場合に必要とされるのは、追加商品の価額および価格比の時点tの資料であり、比較時点のウェートによる加重をとる、あらゆる指数について同様のことがいいうる。

ウェートがパーセントの形式で規定されるときどのようになるかが考察されねばならない。基準時点のウェートであれ、任意の時点のウェートであれ、パーセントの形式で加重される。商品追加の場合は、その追加される商品の相対的重要性を考慮してパーセントが変更される。このことについて述べよう。

原商品i $(i=1,2,\ldots,N)$ は W_i なるウェートをとり、修正された商品i' $(i'=1,2,\ldots,N,N+1,\ldots,N+n)$ は $W'_i=(\sum_{i'} w'_i=\sum_i W_i=100)$ なるウェートをとるとする。もし w_i が W_i と同じように分布するという条件を入れるならば、w_i は W_i よりも小であり、あらゆるiに次の関係が成立する。

$$\frac{w_i}{W_i}=a<1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

かゝる条件のもとで、先きの場合と同様に I'_{t0} は I_{t0} と追加商品の価格比で表現されうる。すなわち、加重算術平均の場合は次の第15式のようになり、加重幾何平均の場合は第16式のようになる。しかも、前の場合と同様に $j=N+1,N+2,\ldots,N+n$ である。

$$I'_{t0}=a\cdot I_{t0}+\sum_j \frac{{}_jP_t}{{}_jP_0}\cdot w_j \qquad\cdots\cdots(15)$$

$$I'_{t0}=(I_{t0})^a\cdot \sqrt[100]{\prod_j\left(\frac{{}_jP_t}{{}_jP_0}\right)^{w_j}},\qquad\cdots\cdots(16)$$

(4) 総和比率法、既述の場合と同様にここでも次のように区分される。すなわち、

(i) 基準時点の数量をふくむ場合、この場合(ラスパイレス算式)、には次式が成立する。

$$I_{t0}=\frac{\sum_i {}_iP_t\cdot {}_iQ_0}{\sum_i {}_iP_0\cdot {}_iQ_0}\cdot 100=\frac{A}{B}\cdot 100 \qquad\cdots\cdots(17)$$

$$I'_{t0}=\frac{\sum_{i'} {}_{i'}P_t\cdot {}_{i'}Q_0}{\sum_{i'} {}_{i'}P_0\cdot {}_{i'}Q_0}\cdot 100=\frac{A+C}{B+D}\cdot 100 \qquad\cdots\cdots(18)$$

上式で $C=\sum_j {}_jP_t\cdot {}_jQ_0$ および $D=\sum_j {}_jP_0\cdot {}_jQ_0$ である。これより

$$I'_{t0}=\left(\frac{\frac{1}{100}\cdot B\cdot I_{t0}+C}{B+C}\right)\cdot 100,\qquad\cdots\cdots(19)$$

この式でCとDとは追加商品をふくみ、Bは基準時点0の資料だけをふくみ、あらゆるt時点について不変である。さらに、この関係は基準時点のウェートを使用する加重算術平均で導いた関係と一致する。

(ii) 任意の時点の数量を用いる場合、Q'_s のサフィックスが0からaに変更して(i)の場合と同じ式が求められる。

(iii) 比較時点の数量を使用する場合、すなわちパーシェ算式の場合、比較時点の価額をウェートとする加重平均

の場合と同様に、その解は非常に複雑である。

D、すくなくとも一種類以上の商品が原リストより除去される場合の連続性の持続。

これはCで述べたと逆の過程であり、その解決も当然、非常に似ている。指数 I_{t0} は N ケの商品の範囲について作成される。$(i=1,2,\cdots,N)$　N ケより n ケだけ除去されるとする。これを k $(k=1,2,\cdots,n)$ で示す。新指数 I'_{t0} は新しい範囲　$i'=n+1,\ n+2,\cdots,N$ によって作成されるとする。当面の目的は旧資料の再蒐集や再計算に余り労力を費すことなく I_{t0} より I'_{t0} を求めることである。以下、そのとられる各種の平均値およびウェートのとり方によってどのようにしてこの目的が達せられるかを明白にすることである。

(1)　価格比の単純算術平均、既述の場合のように出発点は次式である。

$$\frac{100}{N}\sum_i \frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}, \quad \cdots\cdots (7)$$

$$I'_{t0}=\frac{100}{N-n}\sum_{i'}\frac{{}_{i'}P_t}{{}_{i'}P_0}=\frac{1}{N-n}\left[N\cdot I_{t0}-100\sum_k\frac{{}_kP_t}{{}_kP_0}\right] \quad \cdots\cdots (20)$$

必要なのは k ケの商品に関する資料だけである。

(2)　価格比の単純幾何平均法、次の第21式がこれを示す。

$$I'_{t0}=\sqrt[N-n]{(I_{t0})^N/\prod_k\frac{{}_kP_t}{{}_kP_0}}, \quad \cdots\cdots (21)$$

(3)　価格比の加重平均法

基準時点、任意の時点の価額のいずれによるものであれ、あるいはその数量によるものであれ加重平均の場合は

単純平均による場合の方がより多くの資料を必要とする。さらに比較時点で加重する場合はより複雑となる。必要な追加的資料は全商品に関するものであるが、あらゆる時点tについて不変とする。($t=0,1,2,\cdots,T-1$)

(i) 基準時点の価額によつて加重する場合 $I(W.A.b)$ と $I(W.G.b)$ 価格比の加重算術平均の場合、新指数は次の第22式による。

$$\frac{1}{\sum_{i'}{}_{i'}P_0\cdot{}_{i'}Q_0}\left[I_{t0}\cdot\sum_i{}_iP_0\cdot{}_iQ_0-100\cdot\sum_k\frac{{}_kP_t}{{}_kP_0}\cdot{}_kP_0\cdot{}_kQ_0\right]\cdots\cdots\cdots(22)$$

価格比の加重幾何平均の場合には次の第23式

$$I'_{t0}=\sqrt[\sum_{i'}{}_{i'}P_0\cdot{}_{i'}Q_0]{(I_{t0})^{\sum_i{}_iP_0\cdot{}_iQ_0}\Big/\prod_k\left(\frac{{}_kP_t}{{}_kP_0}\right)^{{}_kP_0\cdot{}_kQ_0}},\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

(ii) 任意の時点の価額によつて加重する場合、$I(W.A.a)$ と $I(W.G.a)$、この両指数の結果は基準時点の価額の代りに任意の時点の価額に変更されたウェートをとる上述のそれぞれの指数の場合と同じである。すなわち、ウェートは P_0Q_0 の代りに $PaQa$ を以つて加重する場合である。

(iii) 比較時点の価額によつて加重する場合、この場合も先きの場合のように最も複雑である。ここでもウェートがパーセントであらわされる場合の説明にうつることにしよう。原商品iはパーセントでのウェートW_iを、新商品i'はw'_iをとるとする。もとのままの商品のウェートが変更以前のウェートに比例して分布するときは、w_iはW_iよりも大である。すなわち、あらゆるiにとつて

$$\frac{w_i}{W_i}=b>1,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

加重算術平均法の場合は次の第25式が導かれる。

$$I'_t=b\cdot I_{t0}-\sum_k\frac{{}_kP_t}{{}_kP_0}\cdot w_k,\quad\cdots\cdots\cdots(25)$$

加重幾何平均法の場合は

$$I'_{t0}=(I_{t0})^b\Big/\sqrt[100]{\prod_k\left(\frac{{}_kP_t}{{}_kP_0}\right)^{w_k}},\quad\cdots\cdots\cdots(26)$$

(4)　総和比率法の場合、基準時点の数量および任意の時点の数量をウェートとする指数、すなわち、$I(Laspeyres)$ と $I(Agg.\ a)$ とは次の式を決定する。

（i）　基準時点の数量で加重する場合、

$$I'_{t0}=\frac{\frac{I_{t0}}{100}\cdot\sum_i{}_iP_0\cdot{}_iQ_0-\sum_k{}_kP_t\cdot{}_kQ_0}{\sum_i{}_iP_0\cdot{}_iQ_0-\sum_k{}_kP_0\cdot{}_kQ_0},\quad\cdots\cdots\cdots(27)$$

(ii)　任意の時点の数量で加量する場合、

$$\frac{\frac{I_{t0}}{100}\cdot\sum_i{}_iP_0\cdot{}_iQ_a-\sum_k{}_kP_t\cdot{}_kQ_a}{\sum_i{}_iP_0\cdot{}_iQ_a-\sum_k{}_kP_0\cdot{}_kQ_a},\quad\cdots\cdots\cdots(28)$$

この場合には、商品を追加する場合と除去する場合とを区別して理論を展開しなければならない。われわれは理解を容易にするため、ユー・ポー・セン教授の掲げる例を借りることにする。次の第二表においてｔは1から(T−1)

第　二　表　（単位はペンス）

	1 P_0	2 P_t	3 P_t/P_0 $\cdot100$	4 P_a	5 Q_a	6 P_aQ_a	7 P_t/P_aP_a $Q_a\cdot100$	8 P_tQ_a	9 P_0Q_a
A	2/-	2/6	125	2/-	25	50/-	6,250	62.5/-	50/-
B	1/3	2/6	200	1/6	44	66/-	13,200	110/-	55/1
C	2/-	1/6	75	1/6	38	57/-	4,275	57/-	76/-
D	2/-	3/-	150	2/6	60	150/-	22,500	180/-	120/-
E	1/-	2/6	250	1/3	72	90/-	22,500	180/-	72/-
F	3/-	4/6	150	3/6	38	123/-	18,450	171/-	114/-
G	1/-	1/3	125	1/-	32	32/-	4,000	40/-	32/-
H	1/-	2/-	200	2/-	19	38/-	7,600	38/-	19/-
A-Hまでの合計						606/-			
I	2/-	3/6	175	1/6	28	42/-	7,350	98/-	56/-
J	1/-	2/9	275	2/6	62	155/-	42,625	170.5/-	62/-
A-Jまでの合計						803/-	148,750	1,107/-	656/-
IとJとの合計							49,975	268.5/-	118/-
K	1/-	1/3	125	2/-	15	30/-	3,750	18.75/-	15/-
L	1/6	2/3	150	1/6	46	69/-	10,350	103.5/-	69/-
A-Lまでの合計						902/-			
KとLとの合計							14,100	122.25/-	84/-

までの数時点のうちの一時点であり、旧指数はAからJまでの数時点のうちの一時点であり、旧指数はAからJまでの十ケの商品について作成され、新指数はKとLの二商品を追加する場合とIとJとの二商品を除去する二つの場合に作成される。AからHまでの何等の影響をも被らない商品の価格に関する統計資料はt時点に於ても与えられていなければならない。勿論、それはI_{t0}で示される旧指数を作成するのに調達されたものであるし、事実上はこれらの統計資料は入手困難であるか、又は不可能なことが多い。なおP_aQ_aで示される加重価額は一応、既知のものでなければならないし、IからLまでの商品の統計資料は絶対に利用可能でなければならない。すなわち、新指数の作成に求められる統計資料は

(i)　IよりLに至る商品の第一、第二欄（これは時点Oと時点tの各商品の単位価格の資料である。）

(ii) AよりLに至る商品の任意の時点に於ける単位価額、数量、および価額の資料である。

(iii) IよりLに至る商品の価格比、任意の時点の価額で加重した価格比、任意の時点の数量で加重したt時点の価額、0時点の価額に関する資料である。

以下は上述したように、商品の追加と除去の両場合の、そのとられる作成方法の相違による新旧両指数の比例性の説明である。

(1) 商品の追加の場合、旧指数はAよりJまでの十種の商品の範囲で作成され、新指数はKとLとの追加で、故に十二種の商品の範囲で作成される。

(a) 加重算術平均法による場合

(i) 旧指数は次の第10式による。

$$I_{t0}=\frac{100}{\sum_{i}{}_iP_a\cdot{}_iQ_a}\sum_{i}\frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}\cdot{}_iP_a\cdot{}_iQ_a\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$=\frac{148{,}750}{803}=185.2$$

(ii) AよりLまでの十二種の商品の範囲による新指数は次の第11式による。

$$I'_{t0}=\frac{1}{\sum_{i'}{}_{i'}P_a\cdot{}_{i'}Q_a}\left[I_{t0}\cdot\sum_{i}{}_iP_a\cdot{}_iQ_a+\left(\sum_{j}\frac{{}_jP_t}{{}_jP_0}\cdot{}_jP_a\cdot{}_jQ_a\right)100\right]\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{1}{902}[(185.2\times803)+(14{,}100)]=180.5$$

旧指数は 4.7 だけ大である。

(b) 加重幾何平均法による場合

(i) 旧指数は次式による。

$$I_{t0}=\sqrt[\sum_i {}_iP_a\cdot{}_iQ_a]{\prod_i\left(\frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}\right)^{{}_iP_a\cdot{}_iQ_a}}=174.6 \quad\cdots\cdots(12)$$

(ii) 新指数は第二表より次の値となる。

$$I'_{t0}=\sqrt[902]{(174.6)^{803}\cdot(125)^{30}\cdot(150)^{69}}=170.6 \quad\cdots\cdots(13)$$

旧指数は4だけ大であり、この限りで加重算術平均法よりすぐれているといえる。

(c) 総和比率法による場合、既述の $I(Agg.\,a)$ の形態の算式である。

(i) 旧指数は次式による。

$$I_{t0}=\frac{\sum_i {}_iP_t\cdot{}_iQ_a}{\sum_i {}_iP_0\cdot{}_iQ_a}\cdot100=168.75, \quad\cdots\cdots(17)$$

(ii) 新指数は次の値となる。

$$I'_{t0}=\frac{\frac{168.75}{100}\cdot656+122.25}{656+84}=166.1 \quad\cdots\cdots(18)$$

すなわち、旧指数は 2.65 だけ大である。これは許容すべきずれといってもよいだろう。

(2) 商品の除去の場合、(1)と同様に十種の商品の範囲による旧指数とIとJの二種の商品を除去した範囲による新指

数の連続性が問題とされる。記号で示すと $i=A, B, \cdots, J$；$i'=A, B, \cdots, H$；$k=I, J$ で商品の範囲をあらわすものとする。

(a)　加重算術平均法による場合。

(i)　既述の算式によると旧指数は

$$I_{t0}=\frac{148{,}750}{803}=185.2$$

(ii)　IとJとを除去した範囲による新指数は

$$I'_{t0}=\frac{1}{606}\left[(185.2)(803)-(7{,}350+42{,}625)\right]=162.9$$

旧指数は新指数より 22.3 だけ大であり、これは許容し難いずれというべきである。

(b)　加重幾何平均法による場合

(i)　既述の算式により旧指数は

$$I_{t0}=174.6$$

(ii)　新指数は

$$I'_{t0}=\sqrt[606]{(174.6)^{803}/(175)^{42}\cdot(275)^{155}}=155.4$$

その差 19.2 となり(a)の方法による新旧指数の場合よりも小さくおさえられている。

(c)　総和比率法による場合

(i) 旧指数は

$$I_{t0}=\frac{\sum_i {}_iP_t\cdot {}_iQ_a}{\sum_i {}_iP_0\cdot {}_iQ_a}\cdot 100=\frac{1,107}{656}168.75$$

(ii) 新指数は

$$I'_{t0}=\frac{\frac{I_{t0}}{100}\cdot\sum_i {}_iP_0\cdot {}_iQ_a-\sum_k {}_kP_t\cdot {}_kQ_a}{\sum_i {}_iP_0\cdot {}_iQ_a-\sum_k {}_kP_0\cdot {}_kQ_a}=\frac{\frac{168.75}{100}\times 656-268.5}{656-118}=155.9$$

旧指数は 12.85 だけ大であり、上述の三式のうち加重幾何平均法による場合が、もつともずれが小となり、新旧指数間の連続性はもつとも密である。

E、加重体系の変更を行う場合の連続性の持続

この問題は実際の指数による操作の場合にしばしば直面するものであり、統計学の理論より明確にしなければならない問題であるが、ウェートそのものが指数の作成にとり入れられる商品のもつ相対的重要性という極めて曖昧な概念によつて規定される故に、これに確固たる理論づけを、しかも実際の統計的操作の方向を律するような理論づけを行つたものはない、ユー・ポー・セン教授はその第二論文でその理論づけを試みており(7)、本稿の(二)でわれわれはそのあとをたどることにする。

一般に、長期的観察では、ある指数がとる加重体系がそのとる商品の相対的重要性を反映しないことがある。故に新指数の必要が起きてくるのである。この場合に新旧の両指数間の連続性をどのように確保するかを明らかにし

なければならない。勿論、この場合に価格のトレンドが急激な変動を示さないこと、そのとる商品の数が大なること、あるいはウェートの変更と価格差との間の相関関係が小であることなどが条件となるのである。ユー・ポー・セン教授にならい続稿までこの解を残しておく。唯、この問題は単純平均法をとる場合に生じないこと、基準時点の変更が自動的に加重体系の変更を来すという簡単な解釈ですまされないことを指摘しておく。

(二)　すくなくとも二つ以上の変更が同時に行われる場合の連続性の持続の問題。

ここでわれわれはこれまで述べた指数作成の一局面の変更にともなう新旧指数の連続性の持続の条件分析の研究より、より事実に即するものとしての二局面以上の変更にともなう連続性の持続の問題へと進む。但し、ことわっておかなければならないのは、商品の追加と除去とをふくむ代替の問題、しかも基準時点の変更による代替の問題に限り、商品の範の変更、加重体系の変更等との同時的変更の問題は続稿に残しておくことにする。

原商品リストはN項より成る。いま、n種の商品が追加され、原商品リストの末端に追加することにする。追加商品数をkで示す。($k=N+1, N+2, \ldots, N+n$)。除去される商品はN項の原商品の最後のpに影響を与えるものと想定され、hで示される。($h=N-p+1, N-p+2, \ldots, N$)　商品の追加と除去が行われた後ちの新商品リストは$(N+n-p)$の項目より成り、i'で示される。すなわち

$$i'=1,2,\ldots,N-p,\ N+1,\ldots,N+n,$$

前節で述べた商品の代替は等しい数の種類の商品の追加と除去、すなわち$p=n$を基本条件とした。この場合には新商品リストはNとなり、hは$N-n+1$からNまで、kは$N+1$から$N+n$までの範囲にわたる。代替は$N-n+1$は$N+1$で、$N-n+2$は$N+2$で、Nは$N+n$で行われるのである。

A、商品の追加と除去とによる同時的変更、

（代替の問題）

旧指数 I_{t0}（0＝100）は N ケの商品に、新指数 I'_{t0}（0＝100）は $N+n-p$ ケの商品の範囲によつて作成される。既述の場合と同様に各場合に区分して理論を展開することにしよう。

(1) 価格化の単純算術平均法による場合

前節で述べたものの拡張である。

(i) 旧指数は次式による。

$$I_{t0}=\frac{100}{N}\sum_i \frac{{}_iP_t}{{}_iP_0},$$

(ii) 新指数は次式による。

$$I'_{t0}=\frac{100}{N+n-p}\sum_{i'}\frac{{}_{i'}P_t}{{}_{i'}P_0}=\frac{1}{N+n-p}\left\{N\cdot I_{t0}+100\left[\sum_k\frac{{}_kP_t}{{}_kP_0}-\sum_h\frac{{}_hP_t}{{}_hP_0}\right]\right\}\cdots\cdots(29)$$

(2) 価格比の単純幾何平均法による場合、

(i) 旧指数はこれまでのとおり次式によればよい。

$$I_{t0}=\sqrt[N]{\prod_i \frac{{}_iP_t}{{}_iP_0}}\cdot 100,$$

(ii) 新指数は次の第30式による。

$$I'_{t0}=\sqrt[(N+n-p)]{(I_{t0})^{N}\cdot\frac{\prod_{k}({}_{k}P_t/{}_{k}P_0)}{\prod_{h}({}_{h}P_t/{}_{h}P_0)}}\,,\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

上のいずれの場合にも、新指数の計算にとつて必要とされるのは、影響を被つた商品の価格比だけであり、それ以外全体にわたる再計算を行う必要はないのである。

この方法の理解を助けるため具体的に数値を掲げて例示しよう。いま、旧指数は一〇〇ケの商品を範囲として作成され、DとEの二種類の商品が原商品リストより除去され、X、YおよびZが追加されるとする。しかるとき、新指数を作成する商品の範囲は次より構成される。

$$(100+3-2)=101,$$

この追加され、かつ、除去されるD、E、X、YおよびZの時点0、時点tに於ける単位価格は次の第三表のようである。

第三表

商品	P_t	P_0	$P_t/P_0\cdot100$
D	240円	240円	100
B	480	360	75
X	480	600	125
Y	150	180	120
Z	240	480	200

(1) 単純算平均法による場合。

(i) 旧指数は先きの場合と同様に

$$I_{t0}=150.7$$

(ii) 第三表に掲げられた数値を利用して新指数を求めると次の値となる。

$$I'_{t0}=\frac{1}{100}[(150.7\times100)+(125+120+2000)-(100-75)]=151.9$$

新指数は 1.2 だけ大であり、両指数のずれは極めて小であり、その連続性は極めて大で

ある。

(2) 単純幾何平均法による場合

(i) 旧指数の値は次のようであるとする。

$$I_{t0}=138.6$$

(ii) 旧指数は上式と第三表とより

$$I'_{t0}=\sqrt[101]{(138.6)^{100}\cdot\frac{125\times120\times200}{100\times75}}=140.1$$

この場合も両指数のずれは、わずかに1.5であるにすぎない。連続性に持続されているというべきであろう。

(3) 価格比の加重平均法による場合

既述のように比較時点でのウェートで加重する場合は連続性を持続するよう転換することは非常に困難である。しかし、単純平均値法による指数の場合に必要とされる以外に必要とされる資料は、影響を被る各商品の基準時点の価額をウェートとするか、もしくは任意の時点の価額をウェートとするのであるから、基準時点加重指数と任意の時点の加重指数は転換が可能である。これより、基準時点の価額で加重する指数と任意の時点の価額で加重する加重算術法による指数——われわれの表現では、$I(W.A.b)$ と $I(W.A.a)$ である——類似の式が成立する。

(i) 基準時点の価額で加重した算術平均法による場合の新指数は次式で求められる。

$$I'_{t0}=\frac{1}{\sum_{i'}{}_{i'}P_0\cdot{}_{i'}Q_0}\left[I_{t0}\cdot\sum_i{}_iP_0\cdot{}_iQ_0+100\left(\sum_k\frac{{}_kP_t}{{}_kP_0}\cdot{}_kP_0\cdot{}_kQ_0-\sum_h\frac{{}_hP_t}{{}_hP_0}\cdot{}_hP_0\cdot{}_hQ_0\right)\right]\quad\cdots\cdots(31)$$

任意の時点の価額で加重する場合は、P_aQ_a で入れ換えるだけで同じ算式が成立する。

(ii)　価格比の加重幾何平均法による場合の基準時点の価額で加重する場合の新指数の算式は次式である。この場合には、基準時点を示すサフィックス0をaに入れ換えればよい。

$$I'_{t0}=\sum_{i'}{}_{i'}P_0\cdot{}_{i'}Q_0\bigg/(I_{t0})\sum_{i}{}_{i}P_0\cdot{}_{i}Q_0\cdot\frac{\prod\limits_{k}({}_kP_t/{}_kP_0)^{{}_kP_0\cdot{}_kQ_0}}{\prod\limits_{h}({}_hP_t/{}_hP_0)^{{}_hP_0\cdot{}_hQ_0}},\quad\cdots\cdots(32)$$

(4)　総和比率法による場合

この場合も比較時点の「実際の購入量」による指数では転換は不可能である。基準時点の「購入量」に基づく指数については次式が用いられる。

$$I'_{t0}=\frac{100\left[\frac{I_{t0}}{100}\sum\limits_{i}{}_iP_0\cdot{}_iQ_0+\sum\limits_{k}{}_kP_t\cdot{}_kQ_0-\sum\limits_{h}{}_hP_t\cdot{}_hQ_0\right.}{\sum\limits_{i}{}_iP_0\cdot{}_iQ_0+\sum\limits_{k}{}_kP_0\cdot{}_kQ_0-\sum\limits_{h}{}_hP_0\cdot{}_hQ_0},\quad\cdots\cdots(33)$$

任意の時点の数量で加重する場合は Q_0 がQ_a に変更する以外は同じ式が役立つ。

第二表を利用して例示しよう。

(i)　加重算術平均法による場合

(i')　旧指数の値は次のようである。

$$I_{t0}=185.2$$

(i'')　新指数の値は次のようである。

$$I'_{t0}=\frac{1}{747}[185.2(803)+(3750+10350-42625)]=160.9$$

そのずれは 24.3 であり、著しく連続性を欠く。

(ii) 加重幾何平均法による場合

(ii)' 旧指数の値は次のようになる。

$$I_{t0}=174.6$$

(ii)" 新指数の値は既述の第32式より

$$I'_{t0}=\sqrt[747]{(174.6)^{803}\cdot\frac{125^{30}\cdot150^{69}}{275^{155}}}=154.5$$

そのずれは 19.5 であり(i)によるよりも連続性の程度は大である。

(iii) 総和比率法による場合

(iii)' 旧指数の値は次のとおりである。

$$I_{t0}=168.75$$

(iii)" 新指数の値は既述の第33式より

$$I'_{t0}=\frac{100\left(\frac{168.75}{100}\cdot656+18.75+103.5-170.5\right)}{656+15+69-62}=156.2$$

この場合は最も連続性の程度は高く、ずれはわずか1.7であるにすぎない。

B、基準時点の変更と商品の代替（すなわち、追加と除去）とが同時に行われる場合の連続性持続の問題。

指数Iは㈠基準時点 $0=100$ と㈡Nケの商品の範囲（$i=1,2,\dots,N$）によって作成される。いま、時点tに於て、次の諸点でこの二条件は変更されるとする。すなわち

(i) 基準時点が0からtへと変更される。（$t=100$）

(ii) Nケの商品のうちmケが、これと類似の商品の等しい種類で代替され、Nケの商品の最終のpが除去され、他の商品が追加されるとする。前節のように新しい商品リストは（$N+n-p$）ケの商品より構成される。（$i=1',2',\dots,m',m'+1,\dots,N-p,N+1,\dots,N+n$）この場合に $1',2',\dots,m'$ がそれぞれ $1,2,\dots,m$ で代替されるとする。

問題は次のように提出される。

新しい基準時点 $t=100$ で、しかも、新しい変更をうけた商品の範囲で、0時点よりt時点を超えて指数の系列の連続性をどのように持続するかということである。(8)

基準時点だけの変更については既に述べた。すなわち、($t=q$)時点の指数を考察し、さらに基準時点0によるこの時点の指数を、tによると同じ時点の指数へどのようにして転換するかを研究しなければならないのである。言葉を換えて述べれば、指数 $I'_{(t-q)0}$ より $I'_{(t-q)t}$ への転換を研究しなければならない。唯、これにとり入れる商品の範囲が新しい条件として加わってくるのである。

問題を二つに区別して考察しよう。すなわち、

(a) 基準時点のみが変更されるとき、単なる比率転換の手続によって連続的な系列が得られる指数を作成する問題。

(b) 基準時点が変更されるとき、単なる比率転換によつて、しかもある一定の諸条件のもとで連続性を持続する指数を作成する問題。

以下そのおのおのについて述べよう。

(a) 既述の価格比の単純幾何平均法による指数、ウェートとして任意の時点の価額を使用する幾何平均法による指数および任意の時点の「実際の購入量」でウェートとした総和比率法による指数がこの場合の指数である。

この三様の指数では、商品iについて既述の次式で示される比例性が成立するときは

$$\frac{I_{(t-q)0}}{I_{t0}}=I_{(t-q)t},$$

商品i'については次のようになる。

$$\frac{I'_{(t-q)0}}{I'_{t0}}=I'_{(t-q)t},$$

すなわち、

(i) 価格比の単純幾何平均法による場合の指数

$$I'_{(t-q)t}=\sqrt[(N+n-q)]{\left(\frac{I_{(t-q)0}}{I_{t0}}\right)^{N}\cdot\frac{\prod\limits_{j'}({}_{j'}P_{t-q}/{}_{j'}P_{t})}{\prod\limits_{j}({}_{j}P_{t-q}/{}_{j}P_{t})}\cdot\frac{\prod\limits_{k}({}_{k}P_{t-q}/{}_{k}P_{t})}{\prod\limits_{h}{}_{h}P_{t-q}/{}_{h}P_{t})}},\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

(ii) 任意の時点の価額で加重される加重幾何平均法による場合の指数

$$I'_{(t-q)t}=\sqrt[\sum_{i}{}_{i'}P_a\cdot{}_{i'}Q_a]{\left(\frac{I_{(t-q)0}}{I_{t0}}\right)^{\sum\limits_{i}{}_iP_a\cdot{}_iQ_a}\cdot\frac{\prod\limits_{j'}\left(\frac{{}_{j'}P_{t-q}}{{}_{j'}P_t}\right)^{{}_{j'}P_a\cdot{}_{j'}Q_a}}{\prod\left(\frac{{}_jP_{t-q}}{{}_jP_t}\right)^{{}_jP_a\cdot{}_jQ_a}}\cdot\frac{\prod\limits_{k}\left(\frac{{}_kP_{t-q}}{{}_kP_t}\right)^{{}_kP_a\cdot{}_kQ_a}}{\prod\limits_{h}\left(\frac{{}_hP_{t-q}}{{}_hP_t}\right)^{{}_hP_a\cdot{}_hQ_a}}}\quad\cdots(35)$$

(iii)　任意の時点の「実際の購入量」で加重した総和比率法による指数の場合

$$I'_{(t-q)0}=\frac{\frac{I_{t-q)0}}{100}\cdot\sum\limits_{i}{}_iP_a\cdot{}_iQ_a+(\sum\limits_{j'}{}_{j'}P_{t-q}\cdot{}_{j'}Q_a-\sum\limits_{j}{}_jP_{t-q}\cdot{}_jQ_a)+\sum\limits_{k}{}_kP_{t-q}\cdot{}_kQ_a-\sum\limits_{h}{}_hP_{t-q}\cdot{}_hQ_a}{\frac{I_{t0}}{100}\cdot\sum\limits_{i}{}_iP_a\cdot{}_iQ_a+(\sum\limits_{j'}{}_{j'}P_t\cdot{}_{j'}Q_a-\sum\limits_{j}{}_jP_t\cdot{}_jQ_a)+\sum\limits_{k}{}_kP_t\cdot{}_kQ_a-\sum\limits_{h}{}_hP_t\cdot{}_hQ_a}\quad\cdots\cdots(36)$$

ここでも、われわれは第三表に掲げる数値によつて、しかも便宜上、単純幾何平均法の場合を明らかにしよう。一〇〇ケの商品より成る原商品リスト、0時点を基準時点として（0=100）、$(t-q)$ 時点と t 時点の指数はそれぞれ $I_{(t-q)0}=125.6$; $I_{t0}=138.6$ となる。t 時点に於いて、もしくはそれ以後の時点に於て、基準時点が0より t へと変更され、A′、B′ および C′ の新商品で旧商品A、B、Cを代替し、PとEの旧商品を除去し、Z を追加するとしよう。$I_{(t-q)0}$ から $I'_{(t-q)t}$ へと転換することが与えられた目的である。勿論、この場合、上の除去と追加の二条件を考慮に入れなければならない。上述の(i)の式より

第三表

商品	P_{t-q}	P_t	$P_{t-q}/P_t\cdot 100$
A	120円	120円	100
B	270	360	75
C	420	480	87.5
A′	120	150	80
B′	120	240	50
C′	720	900	80
D	240	240	100
E	360	480	75
Z	270	300	90

$$I'_{(t-q)}=\sqrt[90]{\left(\frac{125.6}{138.6}\right)^{100}\cdot\left(\frac{80\times50\times80}{100\times75\times87.5}\right)}\cdot\frac{90}{100\times75}=85.9$$

(b) 上述の各算式にとつて、その条件は基準時点だけを変更し、それ以外の何等の変更を加えない場合に必要とされる条件に類似している。単純算術平均法の場合には、連続性のための比率転換に求められる条件は次のとおりである。

$$_{i}P_0\propto{}_{i}P_t \text{ の代りに } {}_{i'}P_0\propto{}_{i'}P_t$$

もし、この条件が満足されるときは、次の式が成立する。

$$I'_{(t-q)t}=\frac{I'_{(t-q)0}}{I'_{t0}},$$

すなわち、新旧指数間の比例性は確定されるのである。

これより、次の二つの操作が必要とされる。

(i) 原基準時点に於ける新商品リストの価格が新しい基準時点に於ける新商品リストの価格が比例的であるかどうか、あるいは近似的であれ比例的であるかどうかの決定、すなわち変更の前後の時点に於ける新商品の価格の比例性の検討。

(ii) 商品の追加と除去より成る代替による変更をとり入れての指数 $I'_{(t-q)0}$ と I'_{t0} との計算、そらに $I'_{(t-q)t}$ を求めるための比率転換の操作の適用。すなわち、(i)の時点の変更とともに本稿での重点をなした商品の同数の代替が

行われた場合の新指数の計算と比例性の検討の手続である。

(c)、基準時点の変更と商品の追加と除去より成る代替による変更を同時に行われる場合の加重体系の変更。

単純平均法および比較時点の価額で加重する指数算式はその本来の性格上、ここでは問題とならない。

既にB節の(a)で、われわれは任意の時点に於ける加重を行う幾何平均法と任意の時点に於ける加重による総和比率法による両指数が商品の同数の代替による変更を同時に行う基準時点の変更との連関に於て述べた。そこでは新旧指数の間の連続性の存在を規定する関係の成立することを指摘した。さらに、そこでは任意の時点の加重体系が一定不変であるという想定は表面に持ち出されなかつた。

なお、同じ節に於て、基準時点のウェートをふくむ数ケの指数が同一の変更が行われるときどのようになるかが考察された。ある条件がみたされたとしても、比率転換法の手続が商品の変更にわたるように行われたのちに基準時点の変更を処理するよう適用されるとの結論へ達したのでである。これらの条件は原基準時点の加重体系の新基準時点の加重体系の間の比例性の存在を意味し、事実、加重体系はこのような新旧の基準時点の加重体系の間の比例性そのものが適用不可能な故にこそ変更されることを必要とするのである。勿論、これは加重体系の変更だけに限られる。そこへとり入れられる商品の範囲の変更をも加えるとき問題はさらに復雑とならざるを得ない。又、これを解く道は本稿でこれまで述べてきたものを自から異ならざるを得ない。

次稿はそのことについての一連の考察を述べるものである。

註(1) You Poh Seng, Some Theory of Index Numbers, Journal of the Royal Statistical Society, Series A. Vol. 119, Part 3, 1956, p. 312

(2) ditto ibid a. a. o. p. 315

(3) ditto ibid a. a. o. p. 317

(4) ditto ibid a. a. o. p. 318

(5) W. C. Mitchell, The Making and Using of Index Numbers, Bulletin No. 656 of the Bureru of Labour Statistics, U. S. Department of Labour. 五十五頁

(6) Peter Deneffe, Zur Problematik eines Einzelhandelspreis~und Lebenshaltungskostenindex, Allgemeines Statistiches Archiv, 34. 1950. p. 21

デネフエによれば指数作成に於ける商品の代表性は㈠市場での継続的な供給の存在すること。㈡その商品の質が容易に認識しうること。㈢購入条件が統一的な格性を有すること。㈣出来るだけ価格変動のないことを列挙している。

(7) You Poh Seng, ibid. a. a. o. p. 446

(8) ditto, idid. a. a. o. p. 330