覚書「エコノメトリックスの基本的性格とその方法」：ホーヴエルモー、コープマンス、ロバートソン、ルービンの系譜をたどりて

著者	高木 秀玄
雑誌名	關西大學經済論集
巻	1
号	1
ページ	32-71
発行年	1950-11-30
その他のタイトル	A Note on the Characteristics and Methods of Econometrics
URL	http://hdl.handle.net/10112/15891

覺書「エコノメトリックスの基本的性格とその方法」

―ホーヴェルモー、コープマンス、ロバートソン、ルービンの系譜をたどりて―

高木秀玄

序

計量経済学はしばしば云われる如く一つの学派ではない。経済学はそれ自体が計量的性格をもつ科学である。註(一)

十九世紀初葉以來、先驗的認識の立場より公理の必然性、確実性を貫き通した幾何学が経驗論の立場より否定されロバチエフスキー幾何学がユークリッド幾何学に代りし如く、現象把握、理論体系の樹立の様式が絶対眞実より確率性へと轉ぜしめられた。理論と現実とは別の岸の存在ではありえない。両者は、もと〳〵一のものである。ただ、理論が標傍する精密性に応ずるには現実は余りにも混沌にすぎる。しかるに、理論と現実との間のギャップを計量するを得るならば、このようなギャップを克服し得るのである。エディントンが、「我々は唯、確率のみを観測する」といひしもこの謂である。

本稿は経済学の理論と現実との間のギャップの分析、かくすることによつて果される理論による予測を課題とする

計量経済学の近時の動向をホーヴェルモー、コープマンス、ロバートソン、ルービンの系譜をたどりつつ、即ち計量経済学の確率論的体系を覚書風に纏めあげたものである。

註(一) リーフマン・カイル・エリザベートは一六五〇年—一七五〇年の間のいはゆる数学的世代より自然科学的世代への変換期に際して、いかなる必然性をもつて経済学が成立せるか、経済生活の問題がどのようにして科学的問題領域に自己の位置を獲保せるかを論じ、コペルニクスに影響されたヘルマン・ゴッセン、確率論の適用を人間行爲にまで拡大せるヤコブ・ベルヌキー、ペッテイーとライプニッツとの交渉を説き、特にライプニッツによる「経済学の対象は元來、半ば数学的なものである」との語の解釋、オーギュスタン・クールノーとその親友オーギュスト・ワルラス、更にその子レオン・ワルラスへと傳承される近代経済学が確率論と共に展開され來つた経過をとく。(Liefmann-Keil, Elisabeth, "Leibniz und Cournot," "Zeitschrift für Nationalökonomie, Bd, IX, 1939, S. 505.)

一

一、「経済学の科学的性格を信奉する経済学者のいだく最高の野望は、彼が適当にわづかの変数で、適当に少数の方程式によつて経済の過程のすべての本質的な諸々の局面を可視的ならしめる單純なモデルを構成することに成功すれば、直ちに達成されるだろう」註(一)というシュムペーターの言葉に経済学の理論の有する課題は述べつくされているようである。即ち理論を樹立するということは変数と方程式によるモデルの形成をいい、モデルは現実との対応性を保つべきことを條件とすることによつて、理論と現実との結合を果すという関係にある。ここで、彼がいう経済学とは「他の知識領域よりも寧しろ精密自然科学と縁が深い」経済学であり、純粋経済学とも称せられるものである。かゝ

る精密自然科学的な経済学の理論は「事実に対するひとつの図式を構成する。この図式の目的は見渡し難き多くの事実を簡潔に表現に齎し、我々が理解と名づけるところの、かの事実の精通を能ふ限り簡潔にして完全なる方法で獲得すること」を課題とするものであつた。註（二）かゝるシュムペーターの基本的態度は理論を事実の変形として把握し、理論の精密化、力学化、数式化という展望の可能性と容易化をもつて理論経済学の本質を規定する態度と考えてもよいだろう。彼のかゝる態度はアメリカ経済学協会一九四八年度大会の席上における会長としての講演「科学とイデオロギー」に於て更に明確に示されている。註（三）即ち、経済学は純粋経済学であらねばならない。ここでいう純粋とは彼によれば経済以外のものを除去して科学的行爲本來の過程たる「一連の現象の認識」に始まり「現象の概念化」、「相互関係の仮説あるいは命題として明確に規定された科学的モデルの構成で終る」順序をとることをいうのである。即ち、現象—理論—科学的モデルの系列と、科学的モデル—理論—現実の系列とは別のものではなく、一つのものを何れの側より見るかによつて区別されるだけのことである。

さて、「理論が正しいかどうか？という問の意味するものが何であるかについて考えてみよう。我々は、ここで、その理論において與えられる記述は完全であるかどうかという問と区別しなければならない。その区別の理由。第一の問、即ち理論の正否の判断の規準は、その與えられたる理論よりの帰結と、我々の現実的事実との間の一致の度合において規定され、ここでの現実的事実は一定の操作による実験と観測とにおいてとらえられる事実である。第二の理論の完全性の規準は、その理論と諸々の事実的要因間の対応性の度合によつて規定せられる」。註（四）ここでは、経済的諸要因の規定が前提となる。いま、もし何等の攪乱なく、故に必然性をもつて、ある経済量の系を予測しうるときは、

かゝる経済量に対応的な経済的実在の一要因が存在するといいうる。計量経済学に於ける理論と現実との間に問いうる関係はその第二のものである。恰も古典物理学で対象となつている系のある物理量が、それぞれの瞬間にこれこれの値をとるというに対して、量子力学に於ては、ある瞬間に与えられた状態にある系に対してその物理量を観測すれば、これこれの値が得られるという表現をとり、ここでは一定の固定値ではなく確率的な値しかが考えられない。即ちある量が得られたる場合に他の量がある値で得られる確率が問題となるのである。ここで確率とは一体、如何なるものをいうかを規定しておかなければならない。けだし確率とは、その量を観測すれば、ある値で見出される確らしさの謂であり、事実は観測と不可分離的に、いわゆる確率的分布をなすといつてもよいであろう。「新物理学に於ては所謂、確率が実在――物理的宇宙の根本的な要素――であることを示す。我々はそれら（確率）に就ての精密な知識を持つ。そして、それら――それに関する我々の知識は常に不確実でなければならぬ。――の背後に他の実在を要請することは逆行と思われであろう」註（五）というエディントンの言葉に我々は近代科学の基調を伺いうるようである。即ち近代科学は理論と現実との対応性に科学的論理の成立地盤を求める。更にいえば、事実の観測において明確ならしめた確率要素を理論と事実との中間項として挿入することにおいて理論は現実にアプローチし、現実は理論によつて展望され、予測されるという関係におかれた。知るべきことは、「理論」そのものではない。さればとて「現実」そのものの直感的、又は直観的把握による態様でもない。むしろ、かゝるものは「理論」又は「現実」の名に値しないものであり、それぞれを媒介する中間項たる確率項にこそ訊ねるべき総てのものがふくまれているのである。計量経済学を貫くものはかゝる態度である。

確率の科学的解釈と操作技術とを統計的類推の理論と技術とにおきかへ、「計量経済学的研究の目的は橋桁の如く統計的類推の理論と技術とを使用して、経済学の理論と現実の測定との結合的機能を目的とする」註(六)というホーヴェルモーの計量経済学の性格規定にはうなづけうる多くのことがふくまれている。なほ、かゝる彼の規定は "Stochastic Equations Versus Exact Equations" へと発展し、今日の種々の計量経済学的操作は、すべておしなべてこの対立の中に現実アプローチの道を開く鍵を求めんとするものである。

現実的事実の複雑性、即ち観測に伴う不確定性の存在は、精密性、確定性を本質とする理論（既述のシュムペーターの言葉を此処で追想し）が一度び現実的事項の理解と説明とに立ち向うときの無力さを余儀なくせしめる。その総てが無力であるというわけではない。理論は一面では切り得ても、それが切り得ざる他の面をもつ刄である。元來、理論は現実理解のための「仮説」である。この限りで仮説は棄却と認容の二つの運命をもつ。かくして仮説はいわゆる二律背反的な性格をもつといはれる。このように考えることは「理論」と「現実」との間に断絶の斧を打ちこむ態度であつて、我々はこれを執らない。理論又は仮説にある一定の幅を持たせること、又は理論そのものに確率的性格の一要因を附加することにおいて理論は現実をうつし出すことが可能となるのである。ホーヴェルモーが「理論と現実との間に乖離が admissible である」とか、「理論の仮定の下で実際に不可能である」というのは、それ自体が理論的側面より判断せるものであつて、これを確率的にいえば、又そうすることによつてのみ既述せる我々のいう科学的論理に即応するをうるのであるが "Practically inpossible" とは "The Probability is near to zero." の謂であり、なお、"almost true" を "The Probability is near to one" という如く判断の様式を変換することが

必要とされる。[註(七)] 再びいへば、科学的論理とは、確率的判断による論理である。

二、オブザーバブルな現象の群の中に、ある一定の不変的規則性が認められるとき、これを数学的なモデル式で記述する。かゝるモデルは操作的仮説の機能を果すものである。又は「理論化」と称せられる行爲の体化せるものであり、経驗との対応関係を保ちつつ、あくまで、更に検証の操作にかけられるべき、いはば仮説的性格を有するものであつて、これはこれで一応存在理由をもつ。けだし、理論的定理より理論的公理が導かれうるからである。例へば、三角形の内角の和は一八〇度であるという命題より、現実の測定を行わずして他の命題を誘導する基礎となりうるのである。かくして数学的モデルは観念的世界像を描写するものであり、公理の操作により抽象的対象をとりあつかう精密性又は「眞なる」ものをとりあつかうのに対して具体的な三角形の内角の和は必ずしも一八〇度ならずとする非ユークリッド幾何学と対立する。もし、「理論による確証的命題」と「現実的な経驗的事実」とが一致するとき我々は「数学的理論」と「現実的世界の構造」との間に一つの類似性が存するといいうるのである。

かゝる「数学的理論」は一つのイデアルな極限的なモデルであり、現実と対応せしめて眞正なる変数の値を求める規準であり、純粋理論的モデルともいいうるものである。クラメールによれば、数学的理論の通常の適用の多くのものは記述、分析、予測の三区分がなされる。まづ、理論は純粋記述的目的のために用いられる。即ち経驗的資料の複雑性はコンデンスされた形で、その資料で提せられし適切なインフオーメションを示す比較的にわづかの数の固有値へ誘導される。第二に理論の帰結は観察される現象の科学的分析へ対する道具として適用される。ここにクラメールは次ぎの如き一般的原理が存するという。即ち「事実に一致しないような理論はすべて修正されるべし」というのが

これである。註(九) 第三に恰も幾何学や力学の理論をもつて天文学者が日蝕の日を予測する如く、理論と事実との間の一致が將來の事象にも眞なりと期待しうる原理の適用がこれである。註(八)

三、上述せるところは、新しき科学的論理が理論と現実との間の幅、即ち「攪乱項」を科学的に分析することの論理であることの説明である。かゝる「攪乱項」を「確率項」におきかへる。別言せば、これを統計的類推の問題へとおきかえる。

統計的類推とは未知の母域集団の分布の型を規定する平均値、標準偏差（パラメター）をその母域集団より抽出せる標本値の分布の型を規定する平均値、標準偏差より類推することをいい、前者は正規分布型なる理念型をとり、標本値はその母域集団の型を想定し、一定のプランの下で行われる実験操作の一段階と解することによつて、理論と実験、又は、理論と事実との対応性の検定されると考へられる。ここで既述の理論による記述と事実的要因との対応性度のもつ意義が追考されなければならない。即ち一定の分布函数、〔d. f. F(x)〕を有する確率変数の観察値の集合は d. f. F(x) を有する母域集団よりの任意抽出標本とみなされる。ここで数学的確率の意味するところを述べておくことが便利である。観察可能なる間隔に落ちる標本値の個数を考える。個々の間隔は $\frac{V}{nh}$ の高さの矩形の底辺に対応する。但しhは間隔の長さ、Vは間隔に帰する標本値の個数である。部分的な矩形の面積はその階級の度数たる $\frac{V}{n}$ に等しく、分母たるnが大となるにつれて近似的に観察値がその間隔に落ちる確率に近迫する。即ち間隔上の fr. f. f(x)の積分に近迫するといつてもよい。註(九)

かくして、現実に観察せる標本値の分布状態より得たる度数分布図の周囲線は確率函数の統計的インメーヂなりと

考へられる。[註（一〇）] あるいは、nが大なるときは、標本値の分布函数、〔d. f. $F(x)^*$〕は母域集団の分布函数〔d. f. $F(x)$〕に近似的に等しくなる。更に度数分布の段階函数（Step-function）〔$F^*(x)$〕のグラフ $y=F(x)^*$ は標本値の「総和多角形」を示すものであり、その値が大となるときは、$y=F(x)^*$ は曲線 $g=F(x)$ に近迫するという関係にある。このようなnの数が大となるにつれて近迫する理論と事実の関係に統計的類推の根元が存するのである。

次ぎに便宜上、若干の予備的概念を述べる。第一に同一条件の下で多数回反覆される任意に選ばれし実験Eを行う。毎回の実験結果はレアルな数である $\xi^1\xi^2\cdots\cdots\xi^K$ を与える。（$K\geqq1$）。K次元の空間 R_K にそれに対応する変数点（ヴェクトル・$\xi=\xi_1,\cdots\cdots,\xi_K$）をとる。この場合に、ξをK次元の確率変数という。Sをもつて R_K 空間内の点集合をあらはす。Eの毎回の試行に於て生起するか、又は生起せざる事象を考える。即ちξはSの部分集合である。（$\xi<S$）。このような事象な一定の確率Pを有すると仮定する、しかるとき確率PはSにおいて規定される。$P=P(S)=P(\xi<S)$ は、このことを示す。もし事象が必然的に生起するものであるときは、即ちEの試行に於て常に生起する事象であるときは、$P=1$ となり、逆に $P=1$ なるときは、その事象の生起は確実であるとされる。既述のホーヴェルモーの見解を見よ。これを一般に示せばPは $1-E>P\geqq1$ なる関係にある。但しEは1より小なる数である。

第二に函数 $P(S)$ は $P=(R_K)=1$ の如きK次空間中の正の附加的集合の函数である。$P(S)$ は R_K に於ける分布を規定する。これを確率変数（ξ）の確率分布という。もし $K=1$ なるときは、$P(S)$ に対応する点函数 $F(x)=F(x_1,\cdots\cdots,x_K)$ はξの分布函数である。故に集合函数か点函数において分布は一様に決定される。

第三に本稿で特に重要なものとしての同時的又は結合的変数の場合に進む。確率的実験EとFとが一次元的確率変

数ξ、ηとそれぞれ結合されるとする。然るときEの結果はξなる量でFの結果はηなる量で示される。同時的実験(E, F)を行い、両者の結果を同時的に観察しよう。たとえば、二個の骰子を投下し、その表われた二面の目を同時的に観察しよう。これは、その座標軸が実験EとFとの結果であるξとηである可変点(ξ, η)とを観察することを意味する。更に点(ξ, η)はξとηにおいて決定される結合的変数(Combined variable)と称せられる二次元的変数を示すものと考えられる。これを一般化しよう。

$E_1, \ldots\ldots, E_n$ ——確率的実験

$\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n$ ——$(k_1, \ldots\ldots, k_n)$次元の確率変数

我々は凡てのξの空間の$(k_1+\ldots\ldots+k_n)$次元的積空間内の一点で示される結合的変数$(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$をうる。このことについてクラメールの第三公理は「もし$\xi_1, \ldots\ldots \xi_n$が確率変数なるとき、すべての結合的変数、$(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n)$もまた確率変数である。(註一一)」なお、彼によれば、かゝる結合的変数は$k_1+\ldots\ldots+k_n$次空間内にユニークな確率分布を有し、この分布は変数$\xi_1, \ldots\ldots \xi_n$の「同時的分布」(Simultaneous Distribution)と称せられるものである。k_1とk_2次の確率変数ξとηをとり、P_1とP_2とをξ及びηの確率函数、Pを結合的変数(ξ, η)の確率函数とする。Sをもつてξの空間中の集合の記号とし、$P(\xi<S)$は変数(ξ)がηの値と無関係にSに属する確率を表はす。同様にTをもつてηの空間中の集合の記号とする。然るとき$P(\eta<T)$はηがξの値と無関係にTに属する確率を表はわす。かくして我々は次式をうる。

$$P(\xi<S)=P_1(S), \quad P(\eta<T)=P_2(T), \ldots\ldots(1)$$

上式は（k_1+k_2）次結合的分布の「限界的分布」Marginal Distribution を示すものである。この式は今日の計量経済学で屢々、利用せられるものであり、特に我々が本稿で述べんとするコープマンスの同時方程式法の基礎をなすものである。再びクラメールによれば「結合的分布での質量がその構成的変数のひとつの部分集合の上へ写像されるとき、かくして得られたる限界的分布は常に対応する変数の分布と一致するだろう」註（一二）とされる。給合的変数の確率分布を示すためにP(S)なる記号をとる。か〻る分布には母域集団ではモーメント回帰係数、相関係数が計算され、標本値の分布の場合には標本モーメント回帰係数が計算されるのが常道である。

以上、我々は計量経済学の基礎問題のひとつたる理論と事実との対応性を統計的類推の意味、その中間項たる確率の意義について述べたのであるが、云ひうることは、計量経済学の基本的性格を規定するものを形式的な方法論や從來の認識論に求めるとき、何事をも與へられない。我々はこれに応ずる新しい科学的論理の存すること、しかも、これを量子物理学の方法に求めるとき一つの道が開かれることを信ずるのである。

註（一）J. Schumpeter, The Decade of The Twenties, 1946. P. 3.

註（二）シュムペーター、木村安井訳「理論経済学の本質と主要内容」一九三五年、三九頁

註（三）ditto, "Science and Ideology, American Economic Review, March, 1949.
同講演は雑誌「思想」、一九四九年、九月号に訳出されている。

註（四）アインシュタイン、武谷訳「量子力学に於ける観測に就て」哲学研研究、一九三七年、二五一号、六八頁

註（五）A. Eddington, The Philosophy of physical science, Cambridge, 1939. 大滝武訳、「物理学の哲学」創元科学創書、一九四二年、一二七頁

註(六) T. Haavelmo, The Probability Approach in Econometrics, Econometrica, Vol., 12, Supplement, July, 1944. Introduction.

註(七) Ditto,ibid, Introduction.

註(八) フリッシュ、ホーヴェルモー、コープマンス、マルシャック、スミス等の北欧学派及びシカゴ学派の基本的態度は以下述べる諸点で共通的である。筆者が本稿に述べるところは、英米の統計的類推の科学と佛露の純粋数学としての確率論とを結合し近代統計学の数理的方法の支配的位置を占めるストックホルム大学のハロルド・クラメール (H. Cramèr) に数へられる所大なるものがある。(Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press, 1946.)

註(九) ここでの確率定義は J. Neyman, M. Fréchet, A. Kolmogoroff 等によつて体系化された直感的、公理主義的アプローチによる。ラプラース的古典的定義における「等しく起り得る」という循環性を排除し他方「等しく起り得るや否や」について何等の主観性をも入れない点でミーゼス流の頻度説とも異る。即ち客体の一定の集合中の一定の属性の相対的度数をもつて確率と考えるのである。

註(一〇) H. Cramér, op. Cit., p. p. 327—328.

註(一一) H. Cramér, op. Cit., p. 155.

註(一二) H. Cramér, op. Cit., p. 156.

二

一、ホーヴェルモーは変数を理論的変数、眞正的変数、観察的変数 (Theoretical Variables, Truely Variables, Observational Variables) に区分する。國民所得、商品生産高、及び輸出入高等は量的なものであり、その限りで

誤差なしに測定しうるものであると観念的には規定しうる。いはば理論的に、又は観念的に規定しうる量である。併るに、同一の観察方法で二人の観察者が同一の経済量を調査しても、得たる結果は相異る。同一の三角形の内角の和を分度器で反覆的に測定せる結果は必ずしも一致しない。観察、観測のかゝる相違は、それに附きまとう小誤差又は攪乱の幅だけ存するとされる。理論は無攪乱的、恒常的なものであり、ニュートン力学、マックスウエル、ローレンツの古典的電磁力学の如くその系は "Completely deterministic" にして "Leave no room for effective choice" なものである。併るに新しき量子物理学ではマイクロな物質の波動性と粒子性による観測の不確定性をもつて理論の「導きの絲」とし因果の道が一義的ならずとし、即ち従來の古典理論の物理的世界の決定論的立場に対して、近代物理学では、我々は「偶然の世界」に住むに至つたのである。註(一) 理論と観察との乖離こそ量的科学の運命であり、これを単なる「偶然」で片附けず科学的(実験的)に処理するところに近代科学の特徴が発見されるのである。

さて、それはそれとして、理論的変数として「眞空中の落体の速力」を、観察的変数として「空氣中の落体の速力」を例としておる。前者は直ちに観測し難きものであり、後者は具体的な観測可能な、しかも、誤差の附着するという意で我々の住む世界に於てある変数である。しかるとき、眞正的変数とは何であるか。ホーヴエルモーによれば、理論的変数と観察的変数とが一致するが如き変数であり、理論的変数がこれの考慮によつて体系づけられる変数である。註(二) いま、もし空氣抵抗なしとせば、この両変数は直ちに等しきものとなる。現実は然らず、空氣抵抗力を観察結果より去し引いて求めたる値が眞の眞空中の落体の速度となりうる。

経済学の理論によつて構成された式、即ち構成的モデル式、例えばある一定時点に於ける経済量間に存すると仮定

される関係を鳥瞰視的にとらえ、かつ、その同時的操作を考察しよう。例えば一商品の需要の法則を論ずる場合に、それだけでは、すべてがつくされない。他方、供給の法則を論ずる場合にも然りである。両者を同時的に考察する時のみ市場の完全なる機構は明らかになる。このことは他の諸々の科学に於ける如く経済学に於て何故に個別的方程式よりも方程式系を取扱うを常とするかについての理由である。註(三) 簡単な例として方程式数は二だけ、しかも直線的なりとする。

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1=0 \cdots\cdots(a) \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \cdots\cdots(b) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(1)$$

yは価格、xは需要量、供給量、a_1 b_1 c_1、a_2 b_2 c_2は適当なる常数（係数）であり、幾何的に、所謂「均衡価格は方程式を示す二直線の交点において確証される」という。未知数x yについて、この同時式を解けばよい。

$$(a_1b_2-a_2b_1)x+b_2c_1-b_1c_2=0 \cdots\cdots(2)$$

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \cdots\cdots(3)$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)y+c_2\alpha_1-c_1a_2=0 \cdots\cdots(4)$$

$$y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1} \cdots\cdots(5)$$

x、yの値の分母は相等しい。その理由。第一式のxの係数にそれぞれ他式のyの係数を乗じ、その積の差が分母となつている。次ぎに分母の、b′s、c′sとa′s、b′sを代置し、c′s、a′sでa′s、b′sを代置し分子をうる。かゝる根拠で、行列に

よつてこれを求めうるのである。即ち方程式の常数（係数）より成る平方陣を行列式（D又は△）で示す。

$$\triangle = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$\triangle_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

$$\triangle_2 = c_1 a_2 - c_2 a_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

この操作を第三、五式に応用しよう。

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\triangle_1}{\triangle} \cdots\cdots\cdots (3)'$$

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\triangle_2}{\triangle} \cdots\cdots\cdots (5)'$$

かくして、その結果はnケの変数のnケの非同次的直線式の総ての系にあてはまる。併るに、これは理論的変数より成る理論的モデル式とその解である。再び云はう。我々の住むのは偶然の支配する世界である。リサーチ・ワーカーにとり理論的モデル式は單なる仮説である。仮説はそれのみでのレーゾン・デートルを有しない。それは現実との対応において棄却されるか、許容されるかの何れかである。ここに実験の登場する「場」が開かれる。リサーチ・ワーカーとは、かゝる場にて現象の再生産をなすものである。まづ、彼の組立てるものは理論的モデル式を確率的に修正

せる実験的モデル式である。

二、実験的モデル式は「予測変数」(Predictant) と「観測変数」(Predictor) との函数式のみでは不充分であり、これに「残差項」を附加することが必要である。ホーヴェルモーは $y^*=f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$ をもつて理論的モデル式、$y=f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)+S$ をもつて実験的モデル式を表わす。n個の家計より成る一集団を考える。その集団内で与えられたる一定の商品Aの消費量（需要量）の大きさと、その変異を〝説明〟するとしよう。元來、「説明する」とはいかなることをいうのであろうか。ホーヴェルモーによれば、「一定の可測的要因を抽出すること」であり、変異は各家計の消費行動に同一の方向で、同一の強度で作用するものと仮定する。故に、ここでの可測的要因は商品價格、家計所得、家計構成員の平均年令等である。消費量をyとする。然るときは次式が成立する。[註(四)] 既述の第二、四式

$$y^*=f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

では、$a_1x=f(b_1\,y_1\,c_1)$ 又は $b_2\,y=f(a_2\,x_1\,c_2)$ となる。現実は、かく簡単なものではない。特定のi番目の家計について考える。それは必ずしも（f）が如何なるものであれ、第九式と一致的な消費量をその集団において消費しない。同一の家計にあつても、時点を異にすれば、y^*と異るyを消費するのである。このことを説明する要因を考えなければならない。即ち、y^*の代りにyを用いる場合、y^*とyとの間の乖離を考慮しなければならない。いま、一般的な変移（S）を導入する。かくして次の式をうる。

$$y=f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)+S.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

Sは変数xの價値の個々の集合にとつて、零の平均値を有する一定の確率的分布をなす確率変数である。故に実験的

モデル式は「他の変数と直線的関係を保ちつつ変動する部分」たる系変部分（Systematic part）と、上の如き「残差部分」（Resudual part）とより成る。即ち $x'_1, x'_2, \ldots\ldots, x'_n$ をもつて一定の函数的依存関係を充足するn個の理論的変数、$x_1, \ldots\ldots, x_n$ は理論的変数に対応する観察的変数、x_i'' は確率的変数（Stochastical Variable）なる「残差項」とすれば $x_i = x_i' + x_i''$ なる式が成立する。理論的変数間の理論的関係式が観察的変数についても云いうるためには、変数 x'' の分布について一定の附加的な仮定がなされなければならない。x' の間の精密関係式は事実上 x' の代りに $(x_i - x_i'')$ を代入することにおいて観察的変数と残差項との間の確率的関係式となる。かゝる理由より方程式には "if-there-were-no-error equation" と "expected-value-equation" とが存するわけである。

直線的関係にある系変部分には問うべきものはない。しかし、このような系変部分以外に "Residual Phenomenal" が存在するという現象の質的分裂より進んで、それを量的に分析せるところに近代科学の進歩のあとがみられる。[註（五）] さて、実験的モデル式又は理論的モデル式ではなく、「理論によつて構成されし式」たる構造式中の「残差項」はコープマンスによれば「潜在的変数」、即ち「直接に観察し難き推移的変数」であり、[註（六）] 既述のシュムペーターの第一式では右辺は零であつたが、これにおいては零にはならない。即ち非同次的直線式となる。次式を見よ。

$$\left.\begin{array}{ll} q+\alpha p+\varepsilon=U & \cdots\cdots\cdots(a) \\ q+\gamma p+\eta=V & \cdots\cdots\cdots(b) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

qは数量、pは価格、ε、ηは需要線、供給線の勾配係数である。pとqとはそれぞれ同時的反応の関係にあり、同時結合的観察値である。レオンティーフは、この場合、第一條件として需要、供給の伸縮度は曲線の全線に沿うて不

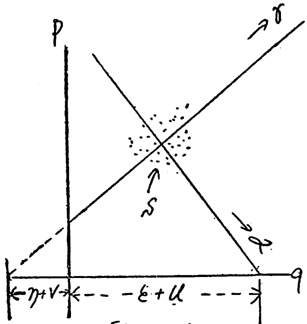

Fig. I. A

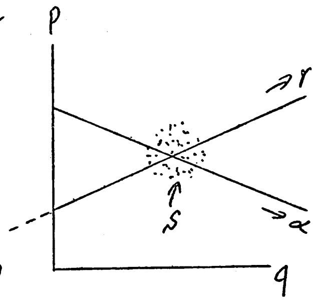

Fig. I. B

変であること、……二重の対数形では直線となること、……第二条件として両伸縮度は時の変化を通じて不変的であること、……両曲線の推移は水準的推移であることを仮定する。註(七) コープマンスは然らずして均衡的水準よりのシフトに独立的であると仮定することによりレオンテイーフの理論的モデル式を実験的モデル式へと修正する。かゝる移動的変数、Vは平均値零なる安定的確率分布よりの任意抽出によるものであつて、$\varphi(U, V)$ $\varepsilon U=0$, $\varepsilon V=0$ なる特徴をもつ上の第十一式は単なる経験的知識だけによるものではなく、記述さるべき経済行動についてのア・プリオリーな知識又は仮説において構成される。例へば需要線は下降的、供給線は上昇的であるとの仮説により$\alpha>0, \gamma<0$と限定され、その基本的性格より眞の需要線、及び眞の供給線は観察的変数より決定し得ない。Fig. I. A. 及び Fig. I. B. は共に数量と價格との同時的観察変数の値によつて決定される同時的反応点が多数存在すること、故に

引きうる需給線も多数存在することを示す。しかるに勾配係数α、βを異なるものと仮定すると原点より$-\varepsilon+U$と$-\eta+V$とでq軸と交叉する一組の直線を引くことが出來る。Fig. I. A. がこれである。この場合には、εとηとの値が、充分に大なる観察値の標本で計算せるその平均値は零に等しいとされる場合に限られるのである。

上のU、Vは「経済主体たる個人の消費、貯蓄決意の如く数量的なタームで表現し難い多くの要因によるもの」であり、これを統計的類推の操作に投ずることにおいて、求める変異的係数の推計に迫るのである。例えば、賃銀單位でデフレートされし所得増加分、消費増加分との間の函数関係たる「限界消費性向」を知ることによつて産出物の次の増加分が消費と投資とに分割される状態を語る、いわゆる「限界投資性向」のパラメターを規定し、これより誘導される「乗数」を國民生産物の水準変動部分と、それを維持するに必要とする貯蓄の補塡部分の水準の変動部分との間の比率としてとらえる。ここで、所得の増大は貯蓄の増大をもたらす。故に、上の補塡部分は貯蓄に等しかるべく、附加的粗國民生産物の單位当りに必要とされし補塡部分に等しからねばならない。ハートはこのことを次式で示す。註（八）

$$\text{乗数} = \frac{d(G.\,N.\,P)}{d(E-T+I)}$$

Eは政府支出高、Tは租税收入高、Iは民間粗資本形成高である。上記の限界消費性向、限界投資性向、乗数等は経済の行動を記述する構造式に於けるパラメターとしての機能を果す。計量経済学で取扱う経済量とは、過去の純然たる現象記述的なパーソンス、ミッチエル的な、いわゆる"National Bureau of Economic Reserch"の場合の如き統計系列より典型的類型と系列相互の関係を分析し、ビヂネス・バロメターを作製する機械的な市場分析に於ける

需要量、供給量、生産高等の如きものではなく、上述せる諸々のパラメターや需要、供給の弾力性の推計を目的とするのである。然らば、ここにいうパラメターとは如何なる性格をもつものであろうか。yがxの函数であるとき、両者の函数関係をyとxだけについて表はすよりも第三の媒介変数tを導入し、yとt、xとtとの函数関係を規定することにおいて間接的にxとyとの関係を表現する方が便利な場合が多い。例えば完全競争の下での市場にありては価格はかゝる役目を果す。けだし、このような市場では、すべての賣手、買手はともに、自己のみの行動で価格を動かすことは不可能である、逆に価格は自己に與えられたものとしてうけとるだけであり、価格は市場での個々の行動を記述するに当り「常数」として処理する。このようなものがパラメターといはれるものである。これを数学的にいえば、tは独立変数、xは従属変数であり、xはtの函数となる。もしtの値を種々にとり、x、yを計算するとx、yの値に対応する点の坐標が定まり一つのグラフとなつて表はれる。この理由でパラメターは函数の型を決定するものともいいうる。

註(一)　A. H. Compton, The Human Meaning of Science, Univ. of North Carolina Press, 1940, P. 46.

註(二)　T. Haavelmo, Probability Approach in Econometrics. Jnly 1944, pp. 9—
W. A. Shewhart, St. Method from an Engineering Viewpoint, Journal of The American St. Association, Vol. XXVI, 1931. pp. 262—269.

註(三)　J. A. Schumpeter, Rudimentary Mathematics for Economists and Statisticians, N. Y. London, 1946, p. 162.

註(四)　T. Haavelmo, Probobility Approach……, Econometrica, July, 1944. 11

註(五)　寺田寅彦、「量的と質的と統計的」、小宮氏編「寺田寅彦随筆集」第三巻、三〇頁

註(六) T. Koopmans, Idedification Probloms in Econometric Model Constitution, Econometrica, Vol. 17, No. 2, Apri. 1949, P. 127.

註(七) 栗村勇吉教授「経済測定学」、一九四九年、日本評論社、一〇〇頁以下

註(八) A. G. Hart, "Model-Building" and Fiscal Policy, The American Economic Review, Vol. XXXV, Sep. 1945, Appendex.

三 パラメターの推計の問題

一、計量経済学は單なる市場バロメーターによる表面的な分析の操作をこととせず、経済活動の結果たる國民生産物、消費高、実質所得高、支出高、輸入高、民間の固定資本財への投資高、在荷高、建築投資高、租税等の分析を、かかる要因間の相互從属性に於てとらえる。(註一) このような相互從属性の計測の目的とするところは、その経済活動の水準を決定し、当該の経済内の各部門の一般的経済的厚生を決定するメカニズムを明らかにすることにある。いひかへれば計量経済学は理論の検証と政策にその意義をもつ。政策的意義とは、例えば、ティンベルヘンは價格安定、投資抑制対策の如き景氣循環政策効果を実験的に判定するのに方程式中の一又はそれ以上の係数の一定方向の変動と、とられた政策とを結合し、更に一定期間にわたるかゝる変動効果、及び構成された系の中で主要なる循環変動の振幅度を分析した。(註二)

さて、フイヂオクラート以來、レオン・ワラルスを経て、近代経済学者の関心は経済的諸変数間の相互從属性の量的性格にむけられてきた。農業部門と工業部門とを取つてこのことを説明する。農業部門での生産物價格の騰貴は、

その所得の増大を齎す。このことは、又、工業生産物への需要を刺戟し、それは直ちに、工業生産物の價格騰貴、所得の増大へと連る。かくして、両部門は相関的、有機構造的世界像を画く。これを計量的に研究するということの意義はいかなるものか。両部門の上の連繋を鳥瞰視しつつ、両部門間の函数的依存関係をうつしだす構造式のモデルのパラメターを計量し、推計すること、即ち、くはしくいへば、價格、所得の二つの內在的変数の変動に対応する彈力性係数の具体的量的價値を推計することに他ならない。

更に進みて考へる。農業所得を決定する要因は何か。それは、ひとり農業部門のみのものに非ずして、非農業部門の諸々の要因によつて決定される。農産物價格を動かすものは非農業部門の所得水準、工業生産設備費用、原料費、非農業部門より購ひ求められる消費財價格、工業部門の賃銀率、工業労働人口の質的、量的構成、非農業部門に於ける農産物加工品の價格等、農業部門外より自主的に加わる外在的変数が竝べあげられる。

一般的均衡の経済体系の計量を課題とする場合に、もし、一部門のみの経済理論によつて構成されし部分均衡モデル式のパラメターの推計に終るならば、鋏の片刄にて布を截断せんとするにひとしい。

三、上述せる総体観的な経済理論による実験的モデル式に採られる操作には、今日まで幾多のものがある。

その一、フイッシャーによる註（八）"**Discriminant Analysis**"法である。Xit $(i=1, 2, \cdots, p.\ t=1, 2, \cdots, N)$ で示されるp個の変数**Xi**上にN個の正常分布型の観察値をとり、Xitを二分する。即ち $t=1, 2, \cdots\cdots, N_1$ と $t=N_1+1, N_1+2, \cdots, N_1+N_2=N$ に分類し、両集合よりそれぞれ平均値を求める。

$$Xi^* = \sum_{t=1}^{N1} Xit/N_1, \qquad Xi^{**} = \sum_{t=N1+1}^{N} Xit, N_2, \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

両平均値の差の直線的函数のパラメターを推計するのがこの方法の中核点である。

その三。“**Principal Components法**”。ホテリング[註(四)]により心理学の要因分析に適用され、近時、ウイルクス[註(五)]、ガーシック[註(六)]、フリッシュ[註(六)]、カレッキー[註(八)]等によつて発展せしめられた方法である。平均値よりの個々の変数の差（変差）の集合を系変部分と残差部分とに別つ。残差部分にもつともすくなく従属する変差の直線的函数のパラメターを求める方法であつて、確率変数の集合 $x_1, \cdots\cdots, x_m$ は次の式で示される。

$$x_1 = a_{11} U_1 + \cdots\cdots + a_{1n} U_n + V_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$x_m = a_m U_1 + \cdots\cdots + a_{mn} U_n + V_m, \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

上式で $m>n$、他方 $U_1, \cdots\cdots, U_n$, $V_1, \cdots\cdots, V_m$ は $m+n$ 個の非相関的確率変数であり、$A = A_{mn} = \{Aij\}$ は n 階の行列である。変数 $x_1, \cdots\cdots, x_m$ はある事象の m 個の相異る特性の測度、$U_1, \cdots\cdots, U_n$ は、選ばれし上の変数中の特性の「一般的要因、」$V_1, \cdots\cdots, V_m$ は特定の x と関連のある「特定要因」なりとする。然るとき、問題は変数 xi の所与の集合が上の両式で示しうるや否や、及び「一般的要因」Uj が存するや、否や、もし存するとすれば、その個数いくばくかということにつきるのである。あらゆる経済量を示す変数三種のものがあること、しかも現実の観察値には誤差又は攪乱が附き纒うことは既に述べた。いや、むしろ、これあるが故に直接的観察は不可能となるのである。上の変数 xi、即ち、その間に $m-n$ 個の直線式が存する、$(x'_i = a_1 U_1 + \cdots\cdots + a_{in} U_n)$ の系変的部分の代りに、Vi が

〃残差〃を表示する場合に、上の第三式によつて自己を規定する変数 x_i のみを観察しうるのである。ここでの主たる問題は x_i の諸系変的部分間の直線的諸関係式の係数の推計についてである。この方法は例えば、フリッシュの「合流分析」(Confluence analysis)(註九) 更にコープンマンス、(註一〇) ライエルゼルにより(註一一) 標本調査論との結合へと発展させられた。我々は、ここでは、唯、第四式の形で表示されうる変数 $x_1, \cdots, x_m$ の集合のモーメント・マトリックス Λ の単純なる性格を導くことで止める。あくまでも一般的にいつて、すべての変数 x^i, U_j, V_i は、その平均値より測定をすること、及びすべての j にとつて $E(U_j)^2 = 1$ なることが仮定される。更に $E(U_i)^2 = \delta_i^2$ なりとし、Σ をもつて、その対角線上の元素として $\delta_1, \cdots\cdots, \delta_m$ で構成されたる対角行列を示す。しかるとき $\Lambda = AA' + \Sigma^2$ をうる。もし δ_i が正の値をとるときはモーメント・マトリックス Λ は m 階であり、変数 $x_1, \cdots\cdots, x_m$ の分布は "non-singular" であり、モーメント・マトリックスは次式で表示される。

$$M = \begin{Bmatrix} M_{20} & M_{11} \\ M_{11} & M_{02} \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ここで "non-singular" とは何か。ウオルドによればn次空間中の分布の階はモーメント・マトリックス Λ の共通階 r と称せられ、$r > n$ なるときは分布は singular、$r = n$ なるときは non-sigular と称せられる。

他方では、行列 AA' は n 階だけしかない。主座対角のある元素をふくまざるモーメント・マトリックスの Ⅳn+1 次の小行列は零にひとしい。同様のことが変数 $x_1, \cdots, x_m$ の相関マトリックス $P = \{Q_{ij}\}$ にも成立しうる。(註一三)

その三 "Canonical Correlatons" の方法。p 個の変数 X_i と個々の変数の N 個の観察値の二つの集合を考える。

これを集合内に得られる正経的変異（Canonical Variates）の直線的結合に置換し、かゝる二つの正経的変異間の相関関係を極大ならしめ、上の集合を二分し、$i=1, 2, \cdots\cdots, p'$ と $i=p'+1, p'+2, \cdots, p$ の二つの直線的函数を求める。

$$\left.\begin{aligned} U &= k_1X_1+k_2X_2+\cdots\cdots+k_{p'}X_{p'} \\ V &= k_{p'+1}X_{p'+1}+X_{p'+2}X_{p'+2}+\cdots+k_pX_p. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

U、Vそれぞれの分散度は一であると仮定する。即ち平均値は零である。UとVとの間の相関関係は次式で示される。

$$R=\sum_{i=1}^{p'}\sum_{j=p'+1}^{P}\alpha_{ij}K_iK_j\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

仮定により分散度が共に一である故に極大となる。即ち直線函数の系へ誘導しうる双一次形式である。註（一四） なほ、分散度は共に零に非る故、正規的であり、普通の多元相関関係の回帰式の正規式となる。ここで回帰式について簡述しておこう。n個の変数 $x_1, \cdots\cdots, x_n$ あり、その二次モーメントは一定とする。$x_2\cdots\cdots, x_n$ についての x_1 の「平均平方回帰面」はn次元分布の状態に最もよくあてはまる曲面をあらわす。

$$X_1=\beta_{12.34\cdots\cdots n}X_2+\beta_{13.24\cdots\cdots n}X_3+\cdots\cdots\beta_{1n.23\cdots\cdots n-1}X_n.\cdots\cdots\cdots(7)$$

この場合での条件は平均値を出來るだけ小とすることである。

$$E(X_1-\beta_{12.34\cdots\cdots n}X_2-\cdots\cdots-\beta_{1n.23\cdots\cdots n-1}X_n)^2\cdots\cdots\cdots(8)$$

第七式の右辺は第八式を極小ならしめる意味で $X_2, \cdots\cdots, X_n$ の項での X_1 の「最善の直線的推計式」The best Linear estimate) であり、X_1 は諸独立変数の直線的結合で示される近似的な従属変数なりとされる。回帰係数 β は一点に於て二個の第一サブスクリプと n−2 個の第二サブスクリプトをもつ。第一サブスクリプトの最初のものは、従属変数、二番目のものは、それに係数が附せられる独立変数を示す。第二サブスクリプストは残りの独立変数であり省略してもよい。これだけの條件の下で β を決定するには、n−1 個の個々の未知数について第八式を微分すると次の n−1 個の方程式が得られる。

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_{22}\ \beta_{12}+\lambda_{23}\ \beta_{13}+\cdots\cdots\cdots+\lambda_{2n}\ \beta_{1n}=\lambda_{21}, \\
\lambda_{32}\ \beta_{12}+\lambda_{33}\ \beta_{13}+\cdots\cdots\cdots+\lambda_{3n}\ \beta_{1n}=\lambda_{31}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_{n2}\ \beta_{12}+\lambda_{n3}\ \beta_{13}+\cdots\cdots\cdots+\lambda_{nn}\beta_{1n}=\lambda_{n1},
\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

正式には $\beta_{1k.23\cdots\cdots k-1,\ k+1\cdots n.}$ とするべきであるが第二サブスクリプトを省き β_{1K} とする。上の方程式系の行列式は Λ であり、行列式 $\Lambda=|\lambda_{iK}|$ の λ_{11} の余因子である。X 分布を non-singular なりとすると、モーメント・マトリックス Λ 相関マトリックス P は正の有限的なものとなる。 $\Lambda_{11}>0$ となり X_1 へ対する回帰面の係数 β_{iK} は次式で求められる。

$$\beta_{iK}=-\frac{\Lambda_{iK}}{\Lambda^{ii}}=-\frac{\delta_i}{\delta_K}\cdot\frac{P_{iK}}{P_{ii}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

その四、"**Weighted Regressions Methd.**"（**加重回帰法**）。理論的にも、政策的にも、もつとも重要なものであり、

既述せるフリッシュ、コープマンスの"Statistical Confluence Analysis"はこれに属するともいへる。我々が本稿の前節に於て述べしところも、これを明らかにせんとする意図のもとでなされた。ことほどさように、今日の計量経済学はこの方法によるのである。

既述せる如く、通常とられる多元回帰係数の推計では独立変数と従属変数の集合間に於て、後者を予測するに当り前者を観測する。即ち、両者間の関係の強度と方向とを意味する係数を推計するのである。ここでは、独立変数の固定的な値との直線的結合よりの偏差の平方の和が極小化される。(最小自乗法の原理)。ホーヴェルモーにならひ、上の操作は「観測変数」=独立変数の固定値にとり、もつとも適応的な従属変数を予測することを仮定するものといひうる。併るにこれにあつては、独立変数の固定値にとつて従属変数の値を予測するのではない。既述せる確率的図式で表現せられる、即ち系の中にある変数の残差をも考慮に入れての構造的モデル式=加重的回帰式の回帰係数を推計することを目的とする。

この方法の説明。いまp個の経済的変数M_iの間に次の如き直線的関係ありとする。K_0, K_1, …は構造係数、ωは残差項。

$$K_0+K_1M_1+K_2M_2+\cdots\cdots+K_pM_p=\omega_1\cdots\cdots\cdots(11)$$

前節で述べし如くωは系外の諸変数より生ずるものである。我々が観察するものは、眞正変数(M_1, …, M_p)ではない。それは経験的なる変数X_{it} ($t=1, 2, \ldots\ldots, N$) である。故に、さしあたり有するは個々の変数についてのN個の観察値である。以上のことは次の第十二式で表示しうる。次式において、M_i=系変的部分、Y_{it}=確率的残差部分。

$$\left.\begin{array}{l} X_{1t}=M_{1t}+Y_{1t}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{pt}=M_{pt}+Y_{pt}. \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(12) \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,N)$$

Yitは相互に独立的にして正規分布的であることは既に述べた。ソリューションへ到達するにはYit＝変数中の誤差、ω＝方程式中の誤差の何れかを無視すべきである。ホーヴェルモー、ワルド、マルシャック等[一五]においてはYitを無視し、これをインプリシットリーにとりあつかい、コープマンスにおいては、フリッシュの基本的図式の根拠に立つて、ωをインプリシットリーにとりあつかつている。更にティントナー、アンダーソン、ガーシック等は、Yit、ωの両者を共にとり入れ定差方程式によつて解く。上記の人々の個々の方法についての紹介と筆者の研究は他日にゆづり本稿ではコープマンスの同時方程式の統計的推計の方法、及びアンダーソン、ルービンの単純方程式の統計的推計の方法だけについて述べよう。

まづ、一九四九年一二月のアメリカ計量経済学会冬季総会第二日目、“Cross-section Data and Problems of Aggregation”の共通テーマのもとでなされたクラインの「クロス・セクションと時系列資料の結合」についてのレヂューメを引用しよう。「クロス・セクション研究におけるパラメターの推計を行うに当つてとられる適切な手続は、とられる全部の変数の結合的分布函数を構成することと、それから最尤推計値を得ることより成る。結合的分布函数は條件的分布函数と限界的分布函数の積へと区分されうる。もし後者が推計さるべきパラメターと独立的なるときは、最尤推計値を求める手続は時としては、通常の最小自乗法的接近へ單純化され、かつ誘導される。限界的分布が推計さるべきパラメターに従属的である場合には、最小自乗法による推計値は大標本での最大推計値と一致する」[一七]

という。ここで「条件的分布函数」、「限界的分布函数」とは何か。クラメールによれば二つの一次元的確率変数ξとηとについて、両者の結合的確率分布は$\mathbf{R}_2$中の一つの分布であり、$\mathbf{P}(S)$で示される。これは$(\xi, \eta)<S$によってか、あるいは、$\mathbf{F}(x, y)=\mathbf{P}(\xi \leqq x, \eta \leqq y)$によって与えられる分布函数$\mathbf{F}(x, y)$によって示される。$(\xi, \eta)$平面上の集合の単位の分布で確率分布を解釈すると、二次的分布での集合を座軸の一方へ写像すると、対応値の限界的分布をうる。次式のaはξの限界分布函数を、bはηへ対する対応値を示す。

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}_1(x)&=\mathbf{P}(\xi \leqq x)=\mathbf{F}(x, \infty)\cdots\cdots\cdots(a) \\ \mathbf{F}_2(y)&=\mathbf{P}(\eta \leqq y)=\mathbf{F}(\infty, y)\cdots\cdots\cdots(b) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

これに対して「条件的分布函数」とは、ξ、ηをしてk_1、k_2次の確率変数とし、確率実験$\mathbf{E}$、$\mathbf{F}$に於て生ずるものとし、更に$\mathbf{P}$は(ξ, η)…結合的変数…の確率分布、S、はTξ及びηの平面内の集合とする。然るとき、$\mathbf{P}(\xi<S, \eta>T)$は結合的関係式$\xi<S, \eta<T$で定まる事象の確率である。$\mathbf{P}(\xi<S)>0$、及び、$\mathbf{P}(\eta<T)$とする。しかるとき次式を得る。

$$P(\eta<T \mid \xi<S)=\frac{P(\xi<S, \eta<T)}{P(\xi<S)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$P(\xi<S, \eta<T)=\frac{(P\eta<T, \zeta<S)}{P(\eta<T)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

上の第一四、一五式のTを固定的集合とする、なほ、Sは変数ξの空間$\mathbf{R}_{K1}$内の変数とする。然るとき、$\eta<T$はSの正の附加的函数となる。即ち固定的Tの場合$P(\xi<S \mid \eta<T)$は$S=\mathbf{R}_K$にとり一なりとする集合Sの正の附加的函

数であるか、又はR_{K2}内の一定の分布の確率函数である。ここでの$P(\eta<T \mid \xi<S)$を$\xi<S$なる仮定に対して事象$\eta<T$の條件的確率と称す。

これだけの準備で理論を進める。供給曲線と需要曲線との交叉によつて一定の商品の消費量（x_1）と價格（x_2）とが定まるとの命題を示すモデルを考える。いま、この命題を以下の如く修正する。（一）供給量はその一定商品を一定價格で、それだけの供給量を生産する社会の賃銀率（x_3）、その結合的効果たる撹乱（U_s）の直線的変数である。（二）需要量は一定の價格で消費者所得（x_4）、結合的効果たる撹乱（U_d）の直線的函数である。なほ、両者ともにタイム・ラグなしとする。次の第一六式は以上の命題を記述する。

$$\left.\begin{array}{ll} x_1+d_{s2}\,x_2+d_{s3}\,x_3+\gamma_s=U_s, \cdots\cdots\cdots(1) \\ x_1+d_{d2}\,x_2+d_{d4}\,x_4+\gamma_d=U_d, \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

U_s、U_dは安定的確率分布よりの任意抽出標本であり、毎回の試行は独立的であると仮定する。x_1（供給價格、需要價格）、x_2（供給量、需要量）は両式に共通であり、パラメターたるd_{s2}、d_{d4}は負、d_{s3}、d_{d2}は正の値をとる。

（2）式の従属変数を需要量（x_2）とする。これと結合的である價格変数（x_2）は両式を通じて同値である故に、反覆抽出標本に於て（1）式の供給量（x_2）を従属変数としてとり得ない。両式中の従属変数として共通変数を選ぶことも許され得ない。ここに單純方程式へ対する最小自乘法の適用の矛盾が存する。後述するアンダーソンとルービンの方法はこの矛盾を救うものである。（一八）

以下はコープマンスの同時方程式法によるパラメターの推計手続の説明である。さて、反覆抽出を行うに当り、x_2

x_3、x_4は不変なりと仮定する。そうすることによつて、問題はx_1とU_s、U_dとの関係へとおきかへられるわけである。即ち（1）式のx_1はU_sの標本変動を反映し、（2）式のx_1はU_dの標本変動を反映する。供給者、需要者にそれぞれその行動決定に與る共通的な非可測的な要因があれば、x_1は同時にU_s、U_dを反映する。かゝる事は実際上あり得ないだろう。このことの理由。U_sは供給者をして商品の一定量を市場へ供給するよう作用するx_2、x_3以外の諸要因を反映し、U_dは需要者をして、その商品を需要せしめるよう作用するx_2、x_4以外のものを反映し、かゝる両者に共通的なるものは存し得ないのである。例えばコーリン。クラークによれば消費量は現在所得、過去の最大所得だけの函数である（$C=d_1Y+d_2M+\alpha_0$, Mは過去の最高所得を示すモディリアニー。ファクターである。）在庫高（インベントリー）の変動（J）は「財のストック化」と「財のストックよりの取出」との効果であり、前者は現在販賣水準(X)、過去の販賣高のトレンド（X_{-1}現在在庫高（J）及び、金融状態の複合的函数である市場状態の企業家の期待による。（$J=\varepsilon_1X+\varepsilon_2J'+\varepsilon_3\sum_{1}^{n}X_{-t}+\varepsilon_4(\sum_{1}^{3}X_{-t}-\sum_{4}^{6}X_{-t})+\varepsilon_5B'+\varepsilon_0$）（註）但しBは賃銀單位に換元された三ケ月期首での銀行現金とその上昇的トレンドとの差である。更にハートはモデル構成に租税の要因を挿入し消費支出高を次の如く示す。

$$C=a+b(TP)+c(RE+C+I-CS-BT-CT)-d(PT)+\varepsilon M, \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

C=消費支出高（数量×單位價格）、TP'=轉稼支拂分。政府実物支出、I=投資高（二〇）、CS=法人の貯蓄高と減價償却費の和、BI=営業税、資産税、CT=法人利潤税、PT=人税、M=貨幣在り高である。このように、構成的モデルの項をなす変数の数を増加するにつれて、残差項は減ずるが、上述せる点はどこまでもつきまとう。

さて、コープマンスは既述の如く、x_3、x_4を不変とする。しかるとき、第一六式はx_1、x_2とU_s、U_dの直線的函数式

である。分析は専らU_s、U_dにむけられる。その理由は第一節で述べたとほりであり。独立的な確率の積であるU_s、U_dの結合的正規確率分布を示す式は次の第十八式である。

$$\frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_d}e^{-\frac{1}{2}(U_s{}^2/\sigma_s{}^2+U_d{}^2/\sigma_d{}^2)}dU_s\,dU_s. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

上式は第一六式を、結合的従属変数x_1、x_2とU_s、U_dとを結合する直線的変換式と考えることによつて第一六式より誘導されるx_1、x_2の「結合的正規確率分布」を示すものである。次いでかゝる変換の下での、量の要因は次式による。

$$dU_s\,dU_d = J\,dx_1\,dx_2,\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

Jはヤコビアンで[註(二)]である。即ちx_1とx_2との係数の行列である。

$$J=\begin{vmatrix}1 & d_{s2}\\ 1 & d_{d2}\end{vmatrix}=d_{d2}-d_{s2},\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

ここで、再びx_1とx_2との結合的分布へ戻し、次式を得る。

$$\frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_d}e^{-\frac{1}{2}[(x_1+\alpha_{s2}x_2+\alpha_{s3}x_3+\gamma_s)^2/\sigma_s{}^2+(x_1+\alpha_{d2}x_2+\alpha_{d4}x_4+\gamma_d)^2]}(\alpha_{d2}\,\alpha_{s2})dx_1\,dx_2.\cdots\cdots(21)$$

上式によつて、パラメターα_{s2}……の一致的推計値を求めうるのである。別言せば、x_1とx_2の同時的変動は一方では供給側の要因x_3の変動による供給曲線の変化、他方では需要側の要因x_4の変動による需要曲線の変化によつて生ぜしめられたと考えるを得る。なほ、供給、需要の両行動に作用する攪乱による偶然的変動が上の同時的変動に加はる。かゝる理由で両分布の平均値は、α_{s2}を通じてエクスプリシットトリーに分析に入るx_3、x_4によつて定まる。分散数$D^2(x_1)$

$=\sigma^2=\mu_2=E[(x_1-E(x_1)^2]$, $D^2(x_2)=\sigma^2=\mu_2=E[(x_2-E(x_2)^2]$ 及び共変数 $E(x_1-m_1)\ (X_2-m_2)$ は d_{s2}、d_{d2} による U_s、U_d の分布の分散度、共変度とに依存する。

なすべきことはパラメターの推計である。ここに近代統計学における最尤推計法的操作が要請される。けれども最尤推計法そのものについて述べることは本稿の目的ではない。ただ理論の展開に必要なる限りで止めるならば、それは、標本点の度数密度函数を極大ならしめる値を求める方法であり、もし、標本の、これより抽出される母域集団が正規分布型のものであるとき、母域集団の平均よりの偏差は標本の誤差であるとされ、函数の密度は標本誤差の平方和の減少指数函数であり、母域集団の未知の平均値との偏差の平方和を極小ならしめることにより、上の函数が極大化されるとき、その標本の平均値は最尤推計値と称せられる。（二二） 即ち、標本の大きさを大きくとるにつれてその期待値は推計するパラメターに近迫するのである。

コープマンスは d_{s2},……、σ_s、σ_d の最尤推計値の計算式を次の如く構成する。

$$\left.\begin{array}{ll}
\begin{cases} m_{21}+m_{22}\alpha_{s2}+m_{23}\alpha_{s3}=S_s^2 \dfrac{-1}{\alpha_{d2}-\alpha_{s2}}, \\ m_{31}+m_{32}\alpha_{s2}+m_{33}\alpha_{s3}=0, \end{cases} & \text{(a)} \\
\begin{cases} m_{21}+m_{22}\alpha_{d2}+m_{24}\alpha_{d4}=S_{d2}^2 \dfrac{1}{\alpha_{d2}-\alpha_{s2}}, \\ m_{41}+m_{42}\alpha_{d3}+m_{44}\alpha_{d4}=0, \end{cases} & \text{(b)} \\
S_s^2=m_{11}+m_{22}\alpha_s^2+m_{33}\alpha_{s3}^2+2m_{12}\alpha_s^2+2m_{13}\alpha_{s3}+2m_{22}\alpha_{s2}\alpha_3, & \text{(c)} \\
S_d^2=m_{11}+m_{22}\alpha_{d2}^2+m_{44}\alpha_{d4}^2+2m_{12}\alpha_d^2+2m_{14}\alpha_{14}+2m_{24}\alpha_{d2}\alpha_{d4}. & \text{(d)}
\end{array}\right\} \quad (22)$$

上式の m_{kl} は観察値のモーメントである。即ち、その一般式は、次の第二三式で示される。（a）式は積モーメント、（b）式は中央モーメント（平均値）である。

$$\left.\begin{aligned} m_{kl} &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[x_k(t)-\bar{x}_l\right]\left[x_l(t)-\bar{x}_l\right] && \text{(a)} \\ x_k &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}x_k(t). \qquad (k, l=1, 2. 2 && \text{(b)} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

さて、第二二式の（a）、（b）式は従属変数たる x_1 の推計値、又は修正値を求める最小自乗法の正規式であるが、単純方程式の場合には右辺は零となるのに対して、これにおいては零ならざる項、即ち、残差項が入る。この項の根源は観察値の分布函数中の $(\alpha d_2-\alpha S_2)_T$ 要因であり、これより両式が同時的に有効であることが規定される。なほ、（c）、（α）式は単純方程式へ適用されし最小自乗法と同形である。かくして次ぎの帰結へ到達しうる。即ち、たとへ、標本の大きさが大であつてもパラメターの最尤推計値と最小自乗法による推計値とは一致しない。両推計値の間の相異は上式中の攪乱の分散度に比例し、かつヤコビアンに反比例的である。かかる、両推計値間の不一致は、註（二三）次ぎの一例で明らかにされよう。即ち第二二式の観察値係数とモーメントに左の数値を挿入する。

第一の条件。$-d_{s2}=0.8$（供給の彈力性に近似的に等し）、$d_{s3}=0.6$（供給の賃銀率彈力性）、$d_{d2}=0.4$（需要の彈力性）、$-d_{d4}=0.5$（需要の所得彈力性）、$m_{33}=625$, $m_{44}=400$, $m_{34}=\begin{cases}350 \\ 0\end{cases}$。

第二の条件。次式は U_s、U_d 間に、及び、U_s 又は U_d と個々の変数間に相関関係なきことを示す。

$$\left.\begin{array}{l}\sum_t U_s(t)=0. \quad \sum_t U_d(t)=0. \quad \frac{1}{T}\sum_t U_s^2(t)=25, \quad \frac{1}{T}\sum_c U_d^2(t)=16. \\ \sum_t U_s(t)U_d(t)=0, \quad \sum U_i(t)x_j(t)=0. \quad (i=s.\ d, j=3,\ 4.)\end{array}\right\}\cdots\cdots(24)$$

上の弾力性係数の値、モーメント値、第二三式より、第一六式を用ひて次のモーメントを計算する。これより、供給式中のU_sの分散度は供給式、需要式中のx_1の $m_{11}=32.7$、及び 79.3 なる分散度と、供給式中の x_2 の $\alpha_{s2}x_2$ についての $(0.8)^2 m_{22}=256$、及び 163 なる分散度と比較しなければならない。かくして、ストカスティカルな第二三式へモーメントを代入すると弾力性の最尤推計値を求めることが出來る。

(25)

	m_{11}	m_2	m_{22}	m_{13}	m_{14}	m_{23}	m_{24}
Case I	32.7	24.2	400.0	−8.3	63.3	458.3	341.7
Case II	79.3	−5.0	254.2	−125.0	133.3	312.5	166.7

上記の第二三式はかくして求めた最尤推計値と眞のパラメターとの間の偏差を除去する條件である。

問題。同時方程式法の複雜さは、x_1、x_2を代数的に解きし形で簡單化するを得るか。答は簡單ではない。変換されし攪乱たる v_1、v_2 間の $\sigma_{v1}^2\ \sigma_{v2}^2$ の推計値によるパラメター β_{13}、……は單純方程式の最小自乘法によつて推計される。

$$\left.\begin{array}{l}x_1=\beta_{13}x_3+\beta_{14}x_4+\beta_1+v_1 \\ x_2=\beta_{23}x_3+\beta_{24}x_4+\beta_2+v_2\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

次ぎにα_{s2}の対応推計値を求めるべく、一次の直接変換を試み原式へ戻さなければならない。この場合の條件は $\alpha_{s1}=\alpha_d=1$, $\alpha_{s4}=d_{d3}=0$ の四であり、これを充すことにより α_{s2}……の推計値は、β_{13}……の推計値より得られる。両式の

系の直線的変換は四個のパラメターで規定される故に、上の四條件は変換を試みるに充分である。併るに、原式の何れかが多数の変数より成るときは、このまゝでは不充分であり、もし、競争財價格が需要側に作用するときは、原式の $\alpha_{d5}X_5$ を附加しなければならない。この場合の変換條件は、$\alpha_{s5}=0$ である。変換により第二七式の諸パラメター、β_{13}……の單純方程式の最小自乗法による推計値が、前頁の四條件と $\alpha_{s5}=0$ なる條件式が同時的に満足されるという規定の下で極大化されるに非れば、上の五條件式を満足する変換は不可能となる。併るにこの場合には α_{s2}……をもつて直接に同時方程式法で解かれる。

勿論、上述のオペレーションは無理論的に運べるものではない。ここに以下の問題が生ずる。その第一は先驗的、理論的立場より如何なる変數を、如何なる型の式に導入すべきかを規定すべしという、(註)「確証の問題」がある。特にコープマンスの "Order Condition" と "Rank Condition" によるエゼキエルへ対する批判については後日稿を改めて述べよう。第二の問題はタイム・ラグについてである。既述せるところはラグなしとの仮定の下での操作であつたが、事實はこれに反する。價格の騰貴が需要量、供給量へ効果を與るには一定の時間を要する。このことを考慮するとき、第一六式は次の第二七式に直線的変換される。

$$\left.\begin{aligned} x_{1(t)} \quad &+\alpha_{s2}X_{2(t-1)}+\alpha_{s3}X_{3(t)}+\alpha_s=U_{s(t)} \\ \alpha_{d1}'X_{1(t)}+X_{2(t)} \quad &+\alpha_{d4}'X_{4(t)}+\alpha_d'{}_{(t)}=U_d'{}_{(t)} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$t=1,\ldots\ldots,T.$$

第一六式の加工式は $U_{s(1)}$、$U_{d}'{}_{(2)}$、……$U_{s(T)}$、$U_{d(T)}$、……と結合的従属変数、$x_{1(1)}$、$x_{2(1)}$、……$x_{1(T)}$、$x_{2(T)}$ とよりの完全なる系をなす。ここで示されし如く第二番目の需要式のスケールを変じて x_2 のパラメターを同次的ならしめることの意義は次の如く述べられる。即ち、上の第(16)式のヤコビアン（当然に2T次の行列）を述べると次の第二八式となる。もし、第一

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_{d1}' & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{s2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{d1}' & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{d1}' & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (28)$$

六式の如くもしタイム・ラグがないとすると、d_{s2} は左方へ移動し主座対角の右上方の元素は総て零であり、相対的行列たりえず、ヤコビアンと一致しない。故に、U_s、U_d と独立的に（一）、x_1、（二）、需要式中の x_2 を供給式の従属変数とすること可能、即ち、最小自乗法の適用可能となる。他方、最尤推計値をも求めうる。併るに供給式中の過去の價格 $x_{2(t-1)}$ は $U_s'{}_{(t)}$ によつて影響されたい。なほ、数量 $x_{1(t)}$ は供給式の $U_{s(t)}$ を余すとこなく反映する。故に供給式の従属変数たらしめうる。

需要式にてはどうであるか。既に数量 $x_1(t)$ は供給式に完然に決定され、攪乱（$(U_d'(t))$）の標本偏歪は従属変数たる價格（$(x_2(t))$）にのみ反映する。この場合に、需要式中、従属変数を求めることに、ひとつの約束が必要である。即ち、その市場の需要側に自働的なる変動要因なしということこれである。

更に一歩進める。いま、かりに両式ともにタイム・ラグなしとする。明らかに両式の攪乱は、$x_1(t)$, $x_2(t)$ の二要因に同時的に作用する。單純方程式なれば、いづれを従属変数としてとるか因果の道、明確なれば訊ねるべきことはない。上述せる諸点より云いうることは、同時方程式法と單純方程式法とは全く連関性のなきものではない。かくし

て、コープマンスによれば、前者は後者の「当然の延長」である。ここにいはゆる「誘導形法」の基本的性格がうかがはれる。即ち、同時方程式法の特質は経済的現実をうつす標本サンプルを用ひ、しかし、從來の方法と異り一変数とではなく、一方程式と結合される攪乱を導入することである。このことの統計的意義については、他日論じたい。

同時的方程式法について述ぶべきことはつくされたわけではない。例えば「方程式の完然なる体系」と標本調査との関係、方程式を構成する項の分類、即ち外在的変数と内在的変数の意義、特にマクロとマイクロの経済の分類と関連性等は紙数の制限上、ふれるべくもない。ここでは、各パラメターの最尤推計値式について述べる。

（一）需要の價格彈力性（α_d）の最尤推計値（$\alpha_{d_2}^{*}=\alpha_d^{*}$）は次の第二九式による。

$$\alpha_d^{*}=\frac{m_{11\cdot4}+m_{12\cdot4}d_s}{m_{12\cdot4}+m_{22\cdot4}d_s}\ .\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

$$m_{kl\cdot4}=m_{kl}-\frac{m_{k4}\,m_{l4}}{m_{44}}\ ,\quad (k,\ l=1.\ 2)\cdots\cdots(30)$$

第一六式による α_d の最尤推計値は α_s の仮定値が修正値なるときは、無限的大標本の極限で非偏歪的推計値となる。α_s の函数たる α_d の推計値は、もし供給の彈力性が零となると（$\alpha_s=0$）、需要曲線の勾配の最尤推計値（α_d^{*}）は需要式中の從属変数として價格（x_2）をとることにより成立せる單純方程式の最小自乗による推計値と一致する。（$\alpha_d^{(2)}=-m_{11\cdot4}/m_{12\cdot4}$）。併るに彈力性大であれば需要曲線勾配の最尤推計値は、数量（x_1）を從属変数としてとることにより得られる單純方程式の最小自乗法による推計値（$\alpha_d^{(1)}=-m_{12\cdot4}/m_{22\cdot4}$）と一致する。更に供給曲線が一定の正の方向勾配（$\alpha_s>0$）なるときは、これと対応する需要曲線の勾配の推計値は、上述の最小自乗法の推計値

と一致する。

これについで、パラメターの推計は、α_s は精確には判らないが、ある幅でこれを知る場合、即ち不完全体系の場合については、どのように解釈すべきであろうか。むしろ、現実は α_s についての精確なる知識なき場合が多いのであるが、か丶る場合は、必ずしも一対一の対応で決定されない。ある一定の幅をもつ $-\alpha_s = -d_{s2}$ の二價的幅に応ずる $\alpha_d^* = \alpha_{d2}$ の二價値が対応する。クラインがそれによりしものは、か丶る "Limited information meothod" である。(二五)

以上、主としてコープマンスの同時方程式法について述べた。その特徴は一般均衡理論に支点を求める故に攪乱の方程式的処理をなすのに、條件的確率分布の測度をとり入れ、更に斯る操作を近代統計学の標本調査の問題へと移すことにある。コックランも指摘する如くこの方法は、今日の狀態では必ずしも完全なる水準へまでは発展されていない。さればとてゴードンの如く「最小自乘法による解析の詭弁的にして、精巧化されし応用」との非難にも承服し難いし、(二六)又、彼へ対するバーンズの批判文中、(二七)みられるように計量経済学的研究は、冷やかなる「数学の女王」だけのものではない。「歴史の音楽」"The Music of History" と「数学の女王」"Queen of Mathematics" とが結合するところこそ計量経済学の成立の場である。

紙数の制限は單純方程式のパラメター推計のロバートソン、ルービンの方法についてふれるを得なかつた。これは後日にゆづろう。

註(一) T. Haavelmo, Quantitative Reserch in Agricnltural Economy, Jouarnal of Farm Economics, Nov. 1947, PP.22—39.

(二) Tinbergen, On The Theory of Businees-Cycle Control, Econometrica, 1938, PP. 22—39.

(三) R. A. Fisher, St. Methods for Reserch Worker, 8th ed., London, 1941, § 49. 2.

(四) Hotteling, Analysis of a Complex of St. Variables into Principal Components. Journal of ;Educational Psychology, Vol. 24, 1933, PP. 417

(五) S. S. Wilks, Mathematical St., Princeton Univ. Press, 1943, PP. 252-

(六) M. A. Girshick. Principal Components, J. of The A. S. A., Vo. 31, 1936, P, 619

(七) R. Frish, Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics, Economic Essays in G. Cassel, London, 1933.

(八) M. Kalecki, A Macrodynamic Theory of Business Cycles, Econometrica, Vol. 3, 1935.

(九) R. Frish, St. Confluence Analysis by Means of Complate Regression System, Econometrica, Vol. 11, 1943, PP. 1—12.

青山秀夫「経済変動理論の研究」(第一巻) 一九四九年第八論文。

J. Smith, Weighted Regression in The Analysis of Economic Series, Studies in Mathematical Economics and Econometrics, in Memory of Henry Schultz, Chicago : The Univ. of Chicago Press, 1942, PP., 151—194.

(一〇) T. Koopmans, St. Estimations of Symultaneous Economic Relations. J. of The A. S. A., Vol. 40, 1945.

〃〃 Serial Correlation and Quardratic Forms in Normal Variables. Annals of Mathematical Statistics, Vol., 13, 1942.

(一一) O. Reiersol, Confluence Analysis by Means of Instrumental sets of Variables. (但し、筆者未見)

(一二) H. Craméri, bid. a. a. o. p. 297.

(一三) H. Wold, A Study in The Analysis of Stationary Time Series, Upsala, 1938, P. 41.

(一四) 山内恭彦「代数学及幾何学」、一九四三年、河出書房、一三三頁

（一五） A. Wald, The Fitting of Straight Lines if Both Variables are Snbject to Error, Annals of Mathematical St., Vol. 11, 1940, P P., 2.

（一六） Marshack, Economic Interdependence and Statistical Analysis, Sutdies in Mathematical !Economics and Econometrics, P P. 136—150.

（一七） L. R. Klein, The Integration of Cross-Section and Time-Series Data, Econometrica, Vol. 18, No. 3, July, 1950.

（一八） T. W. Anderson, H. Rnbin, Estimation of The Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations, The A.of M. S., Vol. xx, No. 1. March, 1949.

（一九） C. Clark, A System of Equations Explaing The U. S. A. Trade Cycle, 1914～1921, Econometrica, Vol., 17, No., 2, Apr., 1949.

（二〇） A. G. Hart, ibid. a. a. O. Appendix.

（二一） Bolza, Lectures on The Calculations of Variations, Chicago, 1904, P. 57,

（二二） T. Haavelmo, Probability Approach……, P. 104.

（二三） T. Koopmans, ibid. a. a. o. P. 456.

（二四） T. Koopmans, The Logic of Economic Business Cycle Analysis, J. of P. E., Apr., 1941, P. 157.

〃 〃 Identification Problems in Economic Modell Construction, Econometrica, Aprs., 1949.

（二五） R. Klein, The Use of Econometric Models as a Guide to Policy, Econometrica, 1947, PP. 111～151.

（二六） R. A. Gordon, Business Cycles in the Inter-War Period, The Quantitative historical Approach, American Economic Review. Dec., 1948. P.51.

（二七） A. F. Burns, A. E. R., Dec., 1948, P. 55.