

## 微分差分方程式系の近似モデル：数値解析的側面から

著者	上島 紳一
雑誌名	関西大学情報処理センターフォーラム
巻	1
ページ	23-35
発行年	1987
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10112/1809">http://hdl.handle.net/10112/1809</a>

## 微分差分方程式系の近似モデル 数値解析的側面から

上 島 紳 一

### 1. はじめに

系の内部状態が有限個のパラメータで記述されていない系は無有限次元系と呼ばれる。制御理論の分野では、無有限次元系は分布定数系と呼ばれているが、完成された有限次元系の制御理論と異なってその制御理論は格段に難しい。それは無有限次元系の持つ様々な性質が有限次元系の結果をそのまま拡張することで簡単に類推されるのが希であるからであり、しかも無有限次元系自身の持つ難しさが数学的道具立ての難解さと相まって系の制御問題の体系的理解を困難にしているからであらう。

本稿で取り扱う内部に遅れ要素を持つ系は代表的な無有限次元系の一つであり、他の無有限次元系と同様にその制御はなかなか面倒である。電気工学に現れるLCR回路や輸送方程式系や薬品生成システムにおける反応過程のモデル、また歴史的には都市部におけるの人口移動モデル、医学におけるある種の病原菌の蔓延を表したモデルなどが遅れを持つ系としてよく知られており、その他遅れ系の例は枚挙に暇ない(3), (6), (7)

1950, 60年代頃、系の内部の遅れは有限次元系に発生する無駄な時間遅れと考えられ、有限次元系の制御理論を工夫することによりその制御が図られていた。遅れを持つ微分方程式(微分差分方程式)をむだ時間系と呼ぶのもその点に因んでいるが、今日では遅れ時間の持つ工学的な意味や重要性が認識され、位相的性質や代数的性質を始め様々な角度から盛んに研究されている。(3), (9)

本稿は微分差分方程式系の有限次元近似モデルの構成法について述べている。従来、無有限次元系の有限次元近似を求める手法は種々提案されているがここでは系の内部モデルとしての状態方程式からの導出法と系の外的挙動としてのインパルス応答からの近似実現手法について述べる。遅れを含む系は大別して入出力に遅れ要素を含む場合、状態に遅れを含む場合、及びそれらが混合した場合などが考えられるがここでは状態に遅れを含む場合に限定して話を進めよう。

次の微分差分方程式系を考える。

$$(1.1) \quad dx(t)/dt = F_0x(t) + F_1x(t-r) + F_{-1}\dot{x}(t-r) + Gu(t),$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$(1.2) \quad y(t) = x(t-r), y(t) \in \mathbb{R}^p$$

ここに $F_0, F_1, F_{-1}, G$ は適当なサイズの定数行列であり、 $r$ は遅れ時間である。(1.1), (1.2)において $x(t)$ は時刻 $t$ における変数ベクトル、 $u(t)$ は制御入力、 $y(t)$ は系の出力を表す。時刻 $t$ における変数 $x(t)$ の変化率は時刻 $t$ の変数の値 $x(t)$ 、系の履歴 $x(t-r)$ 及其の導関数 $\dot{x}(t-r)$ に依存している。系(1.1), (1.2)は微分差分方程式の中でも**中立型**と呼ばれる。また(1.1)において $F_{-1} = 0$ の場合は現在時刻の変数の変化率は現在の変数の値と系の履歴のみに依存し、**遅れ型**と呼ばれる。(6)

さて、この方程式はどうすれば解けるだろうか？ 微分差分方程式系(1.1), (1.2)は一見して有限次元系に見えるが有限次元系を記述する常微分方程式と違って現在の値と系に対する入力関数が任意の未来の時刻の変数を決定しないので有限次元系ではない。実際、系の挙動を決定するには過去 $r$ 秒間の系の履歴が必要であり、それを各時刻において適当な関数空間に記憶しなければならない。従って系は無有限次元系である。つまり系(1.1), (1.2)は初期関数を与えなければ解けず、(1.1)は隣合う長さ $r$ の解の関係を与えているに過ぎないことがわかる。

これまでに微分差分方程式には様々な関数空間モデルが提唱され、制御問題に応用されている。O'Connor and Tarn (12)は、中立型の系に Sobolev 空間モデルを、Manitius and Triggiani (11)は遅れ型の系に $M_2$ 空間モデルを提案し、半群を用いて任意の時刻の解を初期関数と入力関数を用いて表わしている。更に彼らはそのモデルを用いてそれぞれの系の準可到達性などの位相的性質の代数的判定条件などの導出に成功している。しかしこれらの厳密な数学的モデルは応用分野への適用という観点から見ると幾つか問題点を残している。例えばこれらの関数空間モデルにおける自由状態遷移を表わす半群は explicit な形では得られない。これは実際にシステムを制御する現場の技術者にとっては大きな問題であることは明らかであろう。そこで微分差分方程式に対して適当な近似モデルを構成し、系の挙動を近似的に掴む必要が生まれてくる訳である。

本稿では微分差分方程式によって表わされる系の近似モデルの構成法について2方面から紹介し、それぞれの数値解析的な長所や欠点について簡単に触れる。第3節では微分差分方程式系(1.1), (1.2)の関数空間モデルの近似手法、第3節では系の外的挙動としてのインパルス応答の近似による近似モデリングについて述べる。

## 2. 関数空間モデルの近似

本節では、微分差分方程式系 (1.1), (1.2) に対して状態の満たすべき条件から状態空間モデルを与える。更に状態空間モデルは関数空間における微分方程式系となるので状態空間の有限次元部分空間における近似系を構成し、この近似手法の長所や欠点に普及する。

先ず、系 (1.1), (1.2) は積分器と遅れ要素から成るアナログ計算機により実現できる点に着目しよう。積分器は有限次元系の実現に用いられるので、ここでは、次の 1 入力 1 出力を持つ最も単純な遅れ要素の状態空間モデルから導いてみよう (Fig. 1)。

$$(2.1) \quad y(t) = u(t-1), \quad y(t), u(t) \in \mathbb{R}$$

ここに  $u(t)$  は入力,  $y(t)$  は出力を表す。

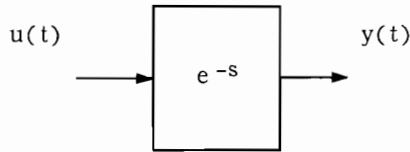


Fig. 1 遅れ要素

さて、系 (2.1) の状態はどうとればよいであろうか？状態の持つ性質について考えてみると (i) 状態は系の内部表現であり、(ii) 各時刻の状態が出力を一意的に決定する、また (iii) 状態遷移は初期状態と系に印加される入力によって決定される、などの点が本質的である。従って系 (2.1) の状態としては系の過去 1 秒間の入力とするのが妥当である。即ち状態空間としては長さ 1 の関数空間をとり、その状態は時々刻々シフトされ新しい入力を付加していくものを考えればよいであろう (Fig. 2)。ここでは入力関数のクラスとして  $L^2$  を考える。

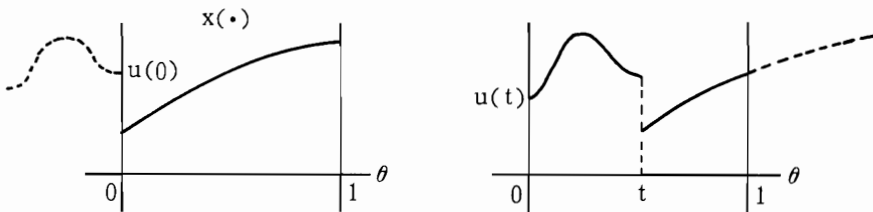


Fig. 2 遅れ要素の状態と状態遷移

従って系 (2.1) の状態空間モデルとしては

$$(2.2) \text{ 状態空間: } X = L^2 [0, 1]$$

状態遷移: 初期関数  $x(\cdot)$ , 入力関数  $u(\cdot) \in L^2(0, t)$  ( $t < 1$ ) に対して

$$(2.3) \quad x(t)(\theta) = \begin{cases} u(t-\theta), & 0 \leq \theta \leq t \\ x(\theta-t), & t < \theta \leq r \end{cases}$$

ととればよいことがわかる。また、状態方程式は(2.3)において微小時間の遷移を考えればよい。

次に、微分差分方程式系(1.1)、(1.2)の状態空間モデルはどうとればよいであろうか？ 遅れを含まない系((1.1)では $F_1 = F_{-1} = 0$ の場合にあたる)が積分器の線形結合で表現される点と上記の議論に注意すれば系(1.1)、(1.2)の状態空間は積分器の状態空間として $R^n$ 、遅れ要素の状態空間として $(L^2[0, r])^n$  両者の直積になるであろうことが推測される。また、状態方程式は状態の時間的変化であるから関数微分方程式により表現されるであろう。もちろんこれは直観的議論であり、モデリングには数学的証明が必要である。詳しい議論は省略するが系(1.1)、(1.2)の状態空間モデルは実現理論を用いて次の様に得られる。(13), (16), (17)

$$(2.4) \quad \text{状態空間: } M_2 = R^n \times (L^2[0, r])^n;$$

状態方程式: 入力関数  $u(\cdot) \in (L^2[0, r])^m$  に対して

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \eta + (F_1 + F_0 F_{-1}) z(0) \\ \partial z / \partial \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$= : \hat{F} \begin{bmatrix} \eta \\ z \end{bmatrix} + \hat{G} u(t)$$

ここに無限小生成作用素  $\hat{F}$  の定義域は

$$(2.6) \quad D(\hat{F}) = \left\{ \begin{bmatrix} \eta \\ z \end{bmatrix} \in M_2 \mid z \in (W_2^1[0, r])^n \text{ かつ } \eta + F_{-1} z(0) = z(r) \right\}$$

により与えられる。ここに  $W_2^1[0, r]$  は1階のSobolev空間である。また、

$$(2.7) \quad \text{出力方程式: } y(t) = z_t(0)$$

このモデルの意味を考えてみよう。系の状態は積分器の値と遅れ要素に記憶されている関数要素の組から成っている。このモデルの変数と系(1.1)、(1.2)の変数の関係は

$$(2.8) \quad \eta(t) = x(t) - F_{-1} x(t-r)$$

$$(2.9) \quad z(\theta) = x(t-r+\theta), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq r$$

により与えられる。各時刻において状態となっているのは積分器の値  $\eta(t)$  と  $r$  秒間の系の履歴である  $z_t(\cdot)$  の組である。このモデルをブロック線図を用いて表現すると(Fig. 3)のようになる。図中  $\triangleright$  は積分器,  $\square$  は遅れ要素を表わす。

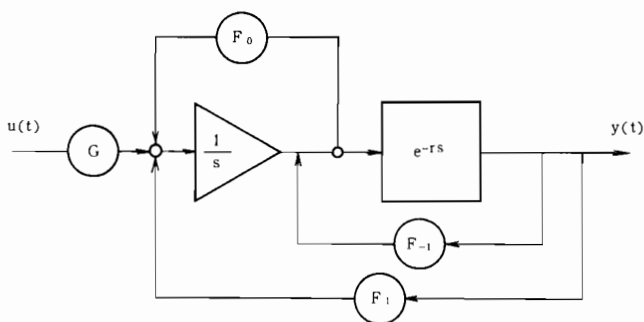


Fig. 3 中立型微分差分方程式系のブロック線図

状態の遷移は次の様である。積分器では系に印加される入力及び遅れ要素の出力のフィードバック及び積分器の値と遅れ要素の出力の差のフィードバックを刻々積分する。また、遅れ要素では関数がシフトされつつ新しい履歴を付加する。

このモデルは $M_2$ モデルと呼ばれ、微分差分方程式系（むだ時間系）の自然な状態空間モデルとして中立型、遅れ型の系の位相的性質の解明、最適制御問題への応用などに威力を発揮している。(16), (18), (19)

さて、微分差分方程式系 (1.1), (1.2) の状態空間モデル (2.4) - (2.7) は関数空間モデルであるのでなかなか面倒な点もある。例えば任意の時刻における状態を初期関数及び入力を用いて具体的に表現すること、即ち系の状態遷移を表わす半群を具体的に表現することさえ、容易ではない。そこで系の有限次元近似モデルを考え、状態を近似的に求めることを考える。

$M_2$ モデルの状態で無限次元部分となっているのは遅れ要素に蓄えられている関数  $z(\cdot)$  であるのでこれを有限次元系で近似する手法がある。ここでは  $z(\cdot)$  を階段関数で近似する平均法 (averaging) について述べよう。(18), (13)

区間  $[0, r]$  を  $N$  分割し、 $z(\cdot)$  の各分割区間における代表値を積分平均とする (Fig. 4)。

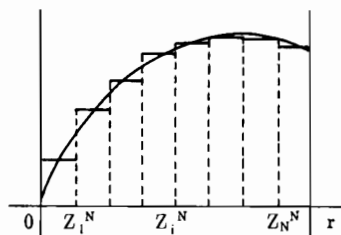


Fig. 4 平均法

よって近似モデルの状態は積分器の値  $\eta(t)$  と遅れ要素の近似関数の重み行列  $Co1. (z_1^N, z_2^N, \dots, z_N^N)$  の直積となり、 $(n + nN)$  次元近似モデルを構成することができる。また、

状態方程式の近似については(2.5), (2.6)より次の様に構成すればよいことがわかる。(13)

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \eta \\ z_1^N \\ z_2^N \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{N-1}^N \\ z_N^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \eta + (F + F_1 F_{-1}) z_1^N \\ N/r (z_2^N - z_1^N) \\ N/r (z_3^N - z_2^N) \\ \cdot \\ \cdot \\ N/r (z_N^N - z_{N-1}^N) \\ N/r (\eta + F_{-1} z_1^N - z_N^N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$= \begin{pmatrix} F_0 & F_1 + F_0 F_{-1} & & 0 \\ -N/r I_n & N/r I_n & & \cdot \\ \cdot & -N/r I_n & N/r I_n & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -N/r I_n & N/r I_n \\ N/r I_n & N/r F_{-1} \cdots \cdots & & N/r I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ z_1^N \\ z_{N-1}^N \\ \cdot \\ z_{N-1}^N \\ z_N^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$= : F_N \begin{pmatrix} \eta \\ z \end{pmatrix} + G_N u(t)$$

ここで状態方程式(2.5)の右辺第2成分の $\theta$ に関する偏微分は一次近似により置換されている。また、無限小生成作用素 $\hat{F}$ の定義域の条件は既に(2.6)の $F^N$ に組み込まれている。出力方程式は

$$(2.11) \quad y(t) = z_N^N(t) = [0, \dots, 0, I_n] z^N$$

と置くのが自然であろう。この様にして $M_2$ モデルの有限次元( $(n+nN)$ 次元)近似モデルを構成することができた訳である。

簡単の為、この近似モデルを $(F^N, G^N, H^N)$ と書き表わそう。近似系 $(F^N, G^N, H^N)$ にもとの系と同じ入力を印加し、状態を関数空間 $L^2[0, r]$ に階段関数として埋め込めば $M_2$ モデルの状態に収束することが証明される。また、その近似誤差のオーダーは $h (=r/N)$ と評価することもできる。(1), (8)

さて、この様な定係数常微分方程式の数値解法には様々なソフトウェアパッケージが開発されている。富士通の汎用計算機には SSL II (Scientific Subroutine Library II) が搭載されており、方程式の係数行列、時間の刻み幅、最終時刻、初期値等を引数としてサブルーチンコールすればよい。Table 1 は微分差分方程式系 (1.1), (1.2) に対して 2 次評価関数を与え、それを平均法で近似した近似最適制御問題を SSL II の Runge - Kutta - Gills 法にもとづく解法で計算した際の CPU 時間である。(13)

N	CPU time(msec)
2	111
5	487
10	2283
20	13678

Table 1 安定な微分差分方程式系の LQ 問題に対する CPU 時間

但し、近似 LQ 問題を解くには Riccati 行列方程式の解を求める手間が必要であり、単に方程式を与えられた有限区間で求める為の CPU 時間は短い。

さて、関数空間近似手法は系に状態方程式表示が得られている時には非常に使い易いが同時に次の様な問題点も持ち合わせている：

- (i) 本近似手法により得られた常微分方程式系は必ずしも正準的(可制御かつ可観測)とは限らず、システム理論で培われてきたオブザーバやレギュレータ等の理論が直接適用できない。
- (ii) 近似精度を上げる為には分割数  $N$  を増やさねばならず、近似系の定数行列  $F^N$ ,  $G^N$ ,  $H^N$  のサイズが大きくなる。

また、近似精度を上げるべく、平均法のはか関数要素を区分的に線形な関数で近似する PWL (Piecewise Linear Scheme) 法や、SPLINE 関数で近似する手法など種々提案されていることも付け加えておこう。(1), (2), (4), (5), (18)



### 3. インパルス応答の近似

従来、微分差分方程式系（むだ時間系）の入出力関係の近似手法としては系の伝達関数の Padé展開と Taylor展開が中心的に用いられてきたが両者は次の様な問題点を持っている。先ず、(i) Padé 展開や Taylor 展開は周波数領域において表現されており、時間領域における解釈が得られにくい。(ii) 特に Padé 展開に関しては収束の証明が完成されていない。これらの点を背景に系の収束の確かな時間領域における近似手法が必要である。

本節では微分差分方程式系の近似モデルを系のインパルス応答から構成する方法について説明し(13), (14), PRINTER-PLOTTER を使って近似モデルの精度を調べてみよう。

さて、本近似手法はやはり微分差分方程式系 (1.1), (1.2) から出発する。微分差分方程式系 (1.1), (1.2) のインパルス応答を方程式系から直接求めることは困難である。そこで比較的容易に計算できる系の伝達関数を時間領域にラプラス逆変換して求めよう。系 (1.1), (1.2) の伝達関数は

$$(3.1) \quad W(s) = (se^{rs} I_n - e^{rs} F_1 - s F_{-1})^{-1} G$$

と与えられる。質量を  $a$  に持つデルタ関数  $\delta_a$  のラプラス変換が  $e^{as}$ 、 $\delta'$  関数の微分  $\delta$  のラプラス変換が  $s$  である点に着目すれば  $W(s)$  のラプラス逆変換は

$$(3.2) \quad A = \Pi (\delta'_r I_n - \delta_{-r} F_0 - \delta F_1 - \delta' F_{-1})^{-1} * (\delta G) \\ = : \Pi (Q^{-1} * P)$$

ここに  $\Pi$  は非因果的部分を切り捨てる作用素である。また、 $*$  は合成積を表わし、(3.1) から (3.2) の導出には合成積のラプラス変換がそれぞれの要素のラプラス変換の積になることを用いている。このインパルス応答  $A$  は超関数で表現された時間領域の表現であり、しかもインパルス応答の分解表示を与えている。この様なインパルス応答は擬有理型 (Pseudo-rational) と呼ばれ、Yamamoto(16) において初めて導入され、無限次元系のモデリング問題にとどまらず、制御問題の解決に大きな力を発揮している。(14), (17), (18), (19),

さて、微分差分方程式系 (1.1), (1.2) のインパルス応答  $A$  の近似方法について述べよう。

インパルス応答  $A$  がデルタ関数  $\delta$  とその微分  $\delta'$  により構成されている点に着目する。合成積代数において  $\delta_{-r}$  はソフト作用素となり、 $\delta'$  は微分作用素となっている。即ち滑らかな関数  $\phi$  に対して

$$(3.3) \quad (\delta' * \phi)(t) = \phi'(t), \quad (\delta_a * \phi)(t) = \phi(t-a)$$

となる。これらの関係式はインパルス応答  $A$  に含まれる  $\delta'$  を  $(\delta_{-h} - \delta)/h$ 、 $\delta_{-r}$  を  $\delta_{-\ell h}$  ( $r = \ell h$ ) で置き換えればよいことを示唆している (ここに  $h$  は離散幅である)。従って (3

. 2) に対する近似インパルス応答は A は

$$(3.4) \quad \hat{A}_h = \Pi \left( (\delta_{-\ell h} * ((\delta_{-h} - \delta) / h) I_n - \delta_{-\ell h} F_1 - \delta F_1 - ((\delta_{-h} - \delta) / h) F_{-1})^{-1} \right. \\ \left. * (\delta G) \right) \\ = \Pi (\hat{Q}_h^{-1} * \hat{P})$$

と得られる. この近似はインパルス応答 A を離散幅 h で離散化していくことに対応している. 近似インパルス応答  $\hat{A}_h$  は超関数空間  $(\mathcal{D}[0, \infty))^{p \times m}$  において A に収束することが示され, 更に  $\hat{A}_h$  を階段関数として埋め込むことにより近似誤差の精度がオーダー h であることも証明できる. (13), (14)

さて, 近似インパルス応答  $\hat{A}_h$  が有限次元実現を持つことは次の様にして簡単にわかる.

$\delta_{-h}$  が関数をシフトする点に着目し, 有限次元系に対する  $k[z]$  - 加群の方法との対応を考え, 新しい変数  $z = \delta_{-h}$  を導入すると (3.4) は

$$(3.5) \quad \hat{A}_h = \Pi \left( (z-1) / h \right) z^\ell I_n - z^\ell F_0 - F_1 - ((z-1) / h) F_{-1})^{-1} G \\ = \Pi (\hat{Q}_h(z)^{-1} \hat{P}_h(z)) \\ = \hat{A}_h(z), \quad r = \ell h$$

と書ける. 近似インパルス応答  $\hat{A}_h(z)$  は z の有理式であるので有限次元実現を持つ訳である.

以上の議論を用いて近似モデルを実例で作ってみよう.

(3.6) 例 次の 1 入力 1 出力中立型微分差分方程式系を考える.

$$(3.7) \quad dx(t) / dt = x(t-1) + \dot{x}(t-1) + u(t), \quad x(t), u(t) \in \mathbb{R}$$

$$(3.8) \quad y(t) = x(t-r)$$

系 (3.7), (3.8) の伝達関数 W(s) 及びインパルス応答 A は

$$(3.9) \quad W(s) = ((e^s - 1) s - 1) - 1$$

$$(3.10) \quad A = \Pi \left( ((\delta_{-1} - \delta) * \delta' - \delta)^{-1} * \delta \right) = : \Pi (q^{-1} * p)$$

と計算できる. また, 近似インパルス応答は  $1 = \ell h$  とおいて

$$(3.11) \quad \hat{A}_h = \Pi (\hat{q}_h^{-1} * \hat{p}_h) \\ = \Pi \left( ((\delta_{-\ell h} - \delta) * ((\delta_{-h} - \delta) / h - \delta))^{-1} * \delta \right) \\ = \Pi \left( (z^\ell - 1) ((z-1) / h - 1)^{-1} \right) \quad (z = \delta_{-h}) \\ = \hat{A}_h(z)$$

となる. 厳密にプロパーな伝達関数  $\hat{A}_h(z)$  の可観測な実現は次の有限次元離散時間系により与えられる.

$$(3.12) \quad \text{状態空間: } X^{2h} = \{ \gamma \in z^{-1} \mathbb{R} [[z^{-1}]] \mid \gamma_{t+\ell+1} - \gamma_{t+\ell} - \gamma_{t+1} + (1-h)\gamma_t = 0 \}$$

$$\tilde{R}^{\ell+1}$$

$$(3.14) \quad x(t+h) = \hat{F}_h x(t) + \hat{G}_h u(t)$$

$$(3.15) \quad y(t) = \hat{H}_h x(t), \quad t=jh; j=0, 1, 2, \dots$$

ここにシステムの行列は

$$(3.16) \quad \hat{F}_h = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & - (1-h) \\ 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{G}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\hat{H}_h = [0, \dots, \dots, 1]$$

により与えられる。

Fig 5は近似モデル(3.13) - (3.16)を用いて計算したインパルス応答をもとのインパルス応答と比較したものである。離散幅  $h$  を細かくするに従って近似インパルス応答  $\hat{A}_h$  がインパルス応答  $A$  に収束してゆく様子が読み取れる。また、計算に要した CPU 時間は Table 2 に示される。

h	CPU time(msec)
0.2	33
0.1	2190
0.05	2600

Table 2 インパルス応答計算に必要な CPU 時間

このように系のインパルス応答から近似モデルを構成する本手法は次の様な特徴を持つ。

- (i) インパルス応答の実現理論を用いることにより系のインパルス応答を近似することで自然な近似モデルが得られる。
- (ii) 例の実現は正準的であり、近似系に対してレギュレータやオブザーバをそのまま構成できる。
- (iii) 時間領域での近似手法であり収束が確かめられている。
- (iv) 状態に遅れを含む系のみならず、あらゆるむだ時間系に適用できる。
- (v) 遅れ型微分差分方程式系のインパルス応答は  $t=r$  においてのみジャンプするが、中立型微分差分方程式系のインパルス応答は  $t=r, 2r, \dots$  においてジャンプすることある。Fig. 5に見られる様にジャンプを含む中立型微分差分方程式系のインパルス応答の近似に適している。(Fig. 6は系の伝達関数にPadé展開を用いて近似したものと本手法との比較である。)

(vi) 本手法は多入力多出力微分差分方程式系，無限時間遅れを持つ系などにもそのまま適用できる。(13), (14)

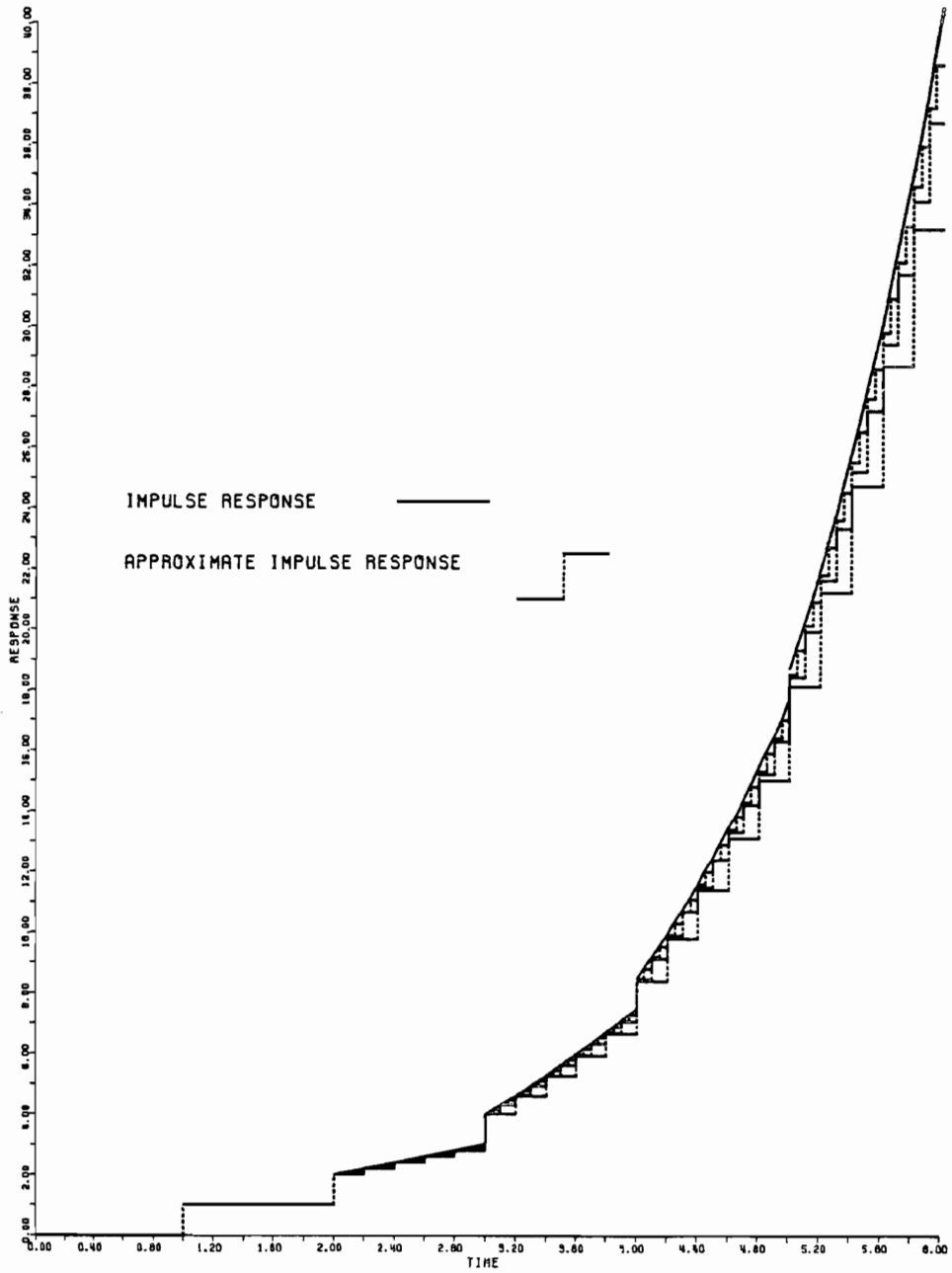


Fig. 5 The Approximate Impulse Response of  
a Neutral System ( $h=0.2, 0.1, 0.05$ ).

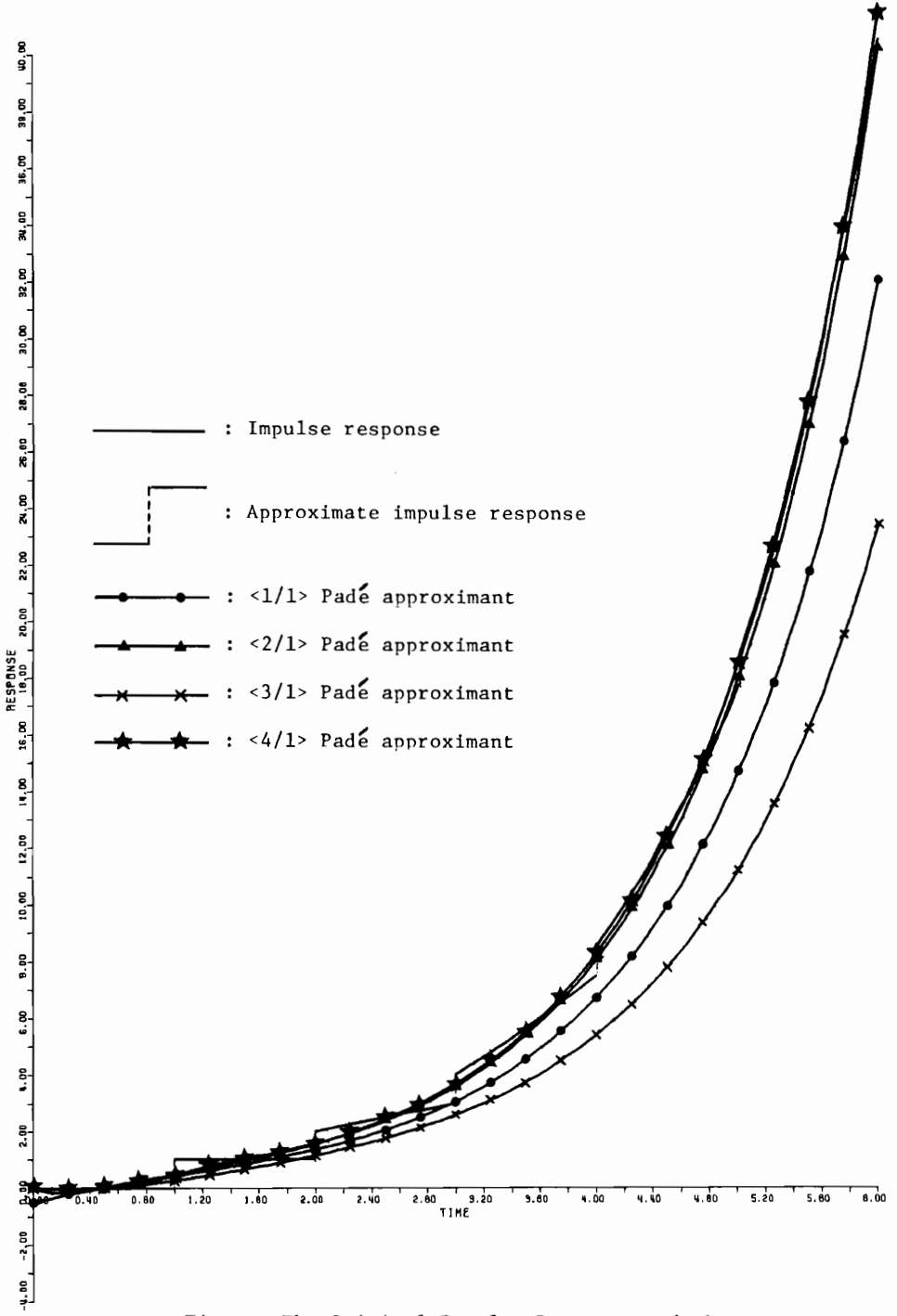


Fig. 6 The Original Impulse Response and the Padé Approximants for a Neutral System.

#### 4. あとがき

本稿では無限次元系の代表的例の一つである微分差分方程式系の2通りの近似手法を紹介した。まず、微分差分方程式系の状態空間モデルから関数空間近似手法により常微分方程式系を、また系の外的挙動としてのインパルス応答から離散時間有限次元近似モデルを導出した。両手法ともある程度高い収束性が得られるが、どちらも近似精度を上げる為には分割数を細かくする必要のある点が難点である。また、無限次元系のモデリング問題や制御問題は(16), (17)に詳しい。また、無限次元系の近似モデルの収束、近似精度の評価など細かい議論については参考文献を適宜参照されたい。(14)-(19)

最後に日頃ご指導、ご鞭撻いただいております京都大学布川昊教授、山本裕教官に深い感謝の意を表します。また、本稿の機会を与えて下さった本学情報処理センター機関誌編集委員会の委員の皆様、日頃使用者の為、計算機の運営、管理、発展に寄与されているシステム管理室の皆様に記して感謝の意を表します。

(文学部 専任講師)

#### 参考文献

- (1) H. T. Banks and J. A. Burns : Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximations, *SIAM J. Control and Optimization*, 16, 169-208 (1978)
- (2) H. T. Banks and F. Kappel : Spline approximations for functional differential equations, *J. Diff. Eqs.*, 34, 496-522 (1979)
- (3) 荒木編 : むだ時間を含む系の特集号, システムと制御28巻, 5号 (1984)
- (4) J. B. Gibson : The Riccati integral equations for optimal control problems on Hilbert spaces, *SIAM J. Control and Optimization*, 17:537-565 (1979)
- (5) J. B. Gibson : Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems : infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations, *SIAM J. Control and Optimization*, 21: 95-139 (1983)
- (6) J. K. Hale : *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (1976)
- (7) 伊藤, 渡部 : むだ時間を含むシステムの制御, シンポジウム制御理論と実システムへの応用, 137-148 (昭. 58)
- (8) F. Kappel : Approximation of neutral functional differential equations in the state space  $R^n \times L^2$ , in *Colloquia Mathematica Societatis Bolyai* 30:463-506, *Qualitative Theory of Differential Equations*, North Holland (1979)
- (9) F. Kappel and K. Kunisch : Spline approximations for neutral functional differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 18, 1058-1080 (1981)
- (10) K. Kunisch : Approximation schemes for the linearquadratic optimal control problem associated with delay equations, *SIAM J. Control and Optimization*, 20: 506-540 (1982)
- (11) A. Manitius and R. Triggiani : Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions, *SIAM J. Control and Optimization*, 16: 599-645 (1978)
- (12) D. A. O' Connor and T. J. Tarn : On the function space controllability of neutral systems, *SIAM J. Control and Optimization*, 21: 306-329 (1983)
- (13) S. Ueshima : Realization and approximate realization for delay-differential systems, Ph. D dissertation, Kyoto univ. (1986)
- (14) 上島, 山本 : むだ時間系の近似実現, 計測自動制御学会論文集22巻, 4号, 375-382 (1986)
- (15) T. Ushijima : Approximation theory for semigroups of linear operators, *Japan J. Mathematics*, 1:185-224 (1975)
- (16) Y. Yamamoto : Pseudo-rational input/output maps and their realizations: a fractional representation approach to infinite-dimensional systems, Technical report # 84002, Dept. Appl. Math. & Physics, Kyoto university (1984)
- (17) Y. Yamamoto and T. Ueshima : A new model for neutral delay-differential systems, *Int. J. Control*, 43, 465-471 (1986)
- (18) 山本, 上島, 森下 : 有界型入出力写像とその近似実現, システムと制御28巻8号, 536-543 (1984)
- (19) 山本, 渡部 : むだ時間システムの解析と制御-遅れ型から中立型へ-, システムと制御30巻, 7号, 401-409 (昭. 61)