

УДК 517.5

ОЦІНКА ІНТЕГРАЛА МОДУЛЯ МНОГОЧЛЕНА НА ОДИНИЧНОМУ КОЛІ

М. В. Гаєвський¹, Н.М. Задерей², Г.Д. Нефьодова²

¹Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка,

²Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
mgaevskij@gmail.com, zadereypv@ukr.net

В роботі отримано асимптотичну формулу для інтеграла від модуля многочлена із комплексними коефіцієнтами на одиничному колі, причому коефіцієнти якого задовольняють умові квазоопуклості. Даний результат є поширенням результатів С.О. Теляковського та інших з дійсного випадку на комплексний.

In the paper we obtain an asymptotic formula for an integral from a module of a polynomial with complex coefficients on a unit circle, and whose coefficients satisfy the condition of quasiconvex. This result is the distribution of the results of S.A. Telyakovskii and others from the real case to the complex.

В работе получено асимптотическую формулу для интеграла от модуля многочлена с комплексными коэффициентами на единичной окружности, причем коэффициенты которого удовлетворяют условию квазоопуклости. Данный результат является распространением результатов С.А. Теляковского и других из действительного случая на комплексный.

Вступ. В теорії наближень важливу роль відіграють величини типу

$$\int_0^{2\pi} |K_n(x)| dx, \quad (1)$$

де $K_n(x)$ може бути чи тригонометричним поліномом степеня n над полем R , чи алгебраїчним поліномом над полем C тощо.

Зазвичай перевірка умови (1) є трудомісткою, тому важливою є отримання оцінки величини (1) в термінах коефіцієнтів полінома $K_n(x)$.

Якщо коефіцієнти многочлена з дійсними коефіцієнтами

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

задовольняють умови квазіопуклості, тобто $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta^2 a_k| < \infty$ та

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta^2 b_k| < \infty$ ($\Delta^2 c_k = \Delta c_k - \Delta c_{k+1} = c_k - 2c_{k+1} + c_{k+2}$), С. О. Теляковський [1]

отримав співвідношення

$$\left| \int_0^{2\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| dx - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{\xi_k}{k} \right| = A \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta^2 a_k| + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta^2 b_k| \right)$$

де A – деяка додатна стала, $\xi_k = \xi(b_k, \sqrt{a_{n-k}^2 + b_{n-k}^2})$, а функція $\xi(t, u)$ визначається так

$$\xi(t, u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} |t|, & \text{де } |u| \leq |t|, \\ |t| \arcsin \left| \frac{t}{u} + \sqrt{u^2 - t^2} \right|, & \text{де } |t| < |u|. \end{cases}$$

В роботі [2] можна ознайомитися із оглядом відомих результатів більш детально, крім того там отримано наступний результат: *Якщо коефіцієнти ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ задовольняють умови $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$, існують такі числа A_k , що $|\Delta c_k| := |c_k - c_{k+1}| \leq A_k, k = 0, 1, 2, \dots$, причому $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty$, то для інтеграла $I = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt$ рівномірно відносно $m = 0, 1, \dots$, справедлива асимптотична рівність*

$$I = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} (|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|) I_{m,k}(c) + 2 \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} + O(T_m(A)), \text{ де}$$

$$I_{m,k}(c) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - 4 \frac{|c_k| \cdot |c_{m-k} - c_{m+k}|}{(|c_k| + |c_{m-k} - c_{m+k}|)^2}} \sin^2 t dt, \text{ а } T_m(A) := \sum_{k=0}^m (k+1) |\Delta A_k| + \sum_{k=1}^{\infty} k |\Delta A_{k+m+1}|.$$

Основні результати. В цій роботі ми отримуємо асимптотичну формулу для інтеграла модуля многочлена степеня n на одиничному колі за умови квазіопуклості його коефіцієнтів. Хоча отриманий результат є менш загальним ніж [2], але отриманий іншими методами та в деяких випадках отримане співвідношення є точнішим.

Нехай далі $K_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx}$, розглянемо інтеграл $\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} \right| dx$.

Теорема 1. Нехай $\rho_k = |c_k|$, $\beta_k = \arg c_k$, $t_n(x) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx}$, $\tau_n(x) = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx}$, тоді справедлива рівність

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} \right| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n}^{2n} \rho_{k-n} \cos(kx + \beta_{k-n}) \right| dx + O\left(\frac{V_0^{2\pi} t_n + V_0^{2\pi} \tau_n}{n}\right), \tag{1}$$

де $V_0^{2\pi} f$ – повна варіація функції f на $[-\pi, \pi]$.

Для доведення цієї теореми сформулюємо відому лему Фейера ([3] чи [4]): якщо $g(x)$ та $h(x) \in 2\pi$ -періодичними функціями, $\alpha \in R$, то для функції

$$\varphi(x) = g(x) \cos(nx + \alpha) + h(x) \sin(nx + \alpha)$$

має місце наступна рівність

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(x)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{g^2(x) + h^2(x)} dx + O\left(\frac{V_0^{2\pi} g + V_0^{2\pi} h}{n}\right).$$

Доведення. Нехай

$$t_n(x) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^n \rho_k \cos(kx + \beta_k)$$

та

$$\tau_n(x) = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^n \rho_k \sin(kx + \beta_k).$$

Покладемо в лемі Фейєра $\alpha = 0$, $g(x) = t_n(x)$ та $h(x) = -\tau_n(x)$, тоді

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= t_n(x) \cos nx - \tau_n(x) \sin nx = \\ &= \sum_{k=0}^n \rho_k (\cos(kx + \beta_k) \cos nx - \sin(kx + \beta_k) \sin nx) = \\ &= \sum_{k=0}^n \rho_k \cos(kx + \beta_k + nx) = \sum_{k=n}^{2n} \rho_{k-n} \cos(kx + \beta_{k-n}). \end{aligned}$$

Звідки і слідує теорема.

Теорему доведено.

Коли функції $t_n(x)$ та $\tau_n(x)$ є функціями обмеженої варіації, то з рівності (1) можна отримати асимптотичну формулу, в іншому випадку це не завжди можливо. В наступній теоремі буде отримано асимптотичну формулу норми алгебраїчного полінома на одиничному колі за умови, що $\{\rho_k \cos \beta_k\}$ та $\{\rho_k \sin \beta_k\}$ утворюють квазівипуклу послідовність дійсних чисел, що прямує до нуля. Нагадаємо, що послідовність $\{a_k\}$ є квазівипуклою, коли має місце

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2 a_k| < \infty, \text{ де } \Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}.$$

Теорема 2. Нехай послідовності $\{\rho_k \cos \beta_k\}$ та $\{\rho_k \sin \beta_k\}$ прямують до нуля та є квазівипуклими, тобто

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2(\rho_k \cos \beta_k)| \leq \infty \text{ та } \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta^2(\rho_k \sin \beta_k)| < \infty,$$

тоді має місце рівність

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} \right| dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{n-k+1} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k |\sin \beta_k|}{k+n} +$$

$$+O(|\rho_0| + \sum_{k=1}^n \frac{(k+n)(n-k+1)}{2n+1} (|\Delta^2(\rho_{k-1} \cos \beta_{k-1})| + |\Delta^2(\rho_{k-1} \sin \beta_{k-1})|)) + O(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\rho_k|).$$

Доведення. Розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n}^{2n} \rho_{k-n} \cos(kx + \beta_{k-n}) \right| dx = \\ & = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n}^{2n} (\rho_{k-n} \cos \beta_{k-n} \cos kx - \rho_{k-n} \sin \beta_{k-n} \sin kx) \right| dx. \end{aligned}$$

Покладемо в асимптотичній формулі С.О. Теляковського [5, 6] $a_k = b_k = 0$

при $k < n$, $a_k = \rho_{k-n} \cos \beta_{k-n}$ та $b_k = \rho_{k-n} \sin \beta_{k-n}$ при $n \leq k \leq 2n$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n}^{2n} \rho_{k-n} \cos(kx + \beta_{k-n}) \right| dx = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\xi(b_k, \sqrt{a_{2n-k+1}^2 + b_{2n-k+1}^2})}{k} + O(|a_0| + \sum_{k=1}^{2n} \frac{k(2n-k+1)}{2n+1} (|\Delta^2 a_{k-1}| + |\Delta^2 b_{k-1}|)) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\rho_{n-k+1}}{k} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\rho_{k-n} |\sin \beta_{k-n}|}{k} + \\ & + O(|\rho_0| + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k(2n-k+1)}{2n+1} (|\Delta^2(\rho_{k-n-1} \cos \beta_{k-n-1})| + |\Delta^2(\rho_{k-n-1} \sin \beta_{k-n-1})|)) \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{n-k+1} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k |\sin \beta_k|}{k+n} + \\ & + O(|\rho_0| + \sum_{k=1}^n \frac{(k+n)(n-k+1)}{2n+1} (|\Delta^2(\rho_{k-1} \cos \beta_{k-1})| + |\Delta^2(\rho_{k-1} \sin \beta_{k-1})|)). \quad (2) \end{aligned}$$

Знайдемо тепер оцінки для $V_0^{2\pi} t_n$ та $V_0^{2\pi} \tau_n$. Згідно властивостей функцій обєженої варіації маємо

$$V_0^{2\pi} t_n = V_{-\pi}^{\frac{-\pi}{n+1}} t_n + V_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}} t_n + V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} t_n,$$

тоді

$$\begin{aligned} & V_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}} t_n = \int_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n k \rho_k \cos(kx + \beta_k) \right| dx \leq \\ & \leq \int_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n k \rho_k \cos \beta_k \cos kx \right| dx + \int_{\frac{-\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n k \rho_k \sin \beta_k \sin kx \right| dx \leq \frac{4\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n k \rho_k. \quad (3) \end{aligned}$$

Для оцінки величини $V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} t_n$, застосуємо оцінку С.О.Теляковського [6]

$$V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} t_n \leq V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^n k \rho_k \cos \beta_k \cos kx \right) + V_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \left(\sum_{k=0}^n k \rho_k \sin \beta_k \sin kx \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |\rho_k| + O\left(\sum_{k=0}^n (k+1) |\Delta^2(k\rho_k \cos \beta_k)| + \sum_{k=0}^n (k+1) |\Delta^2(k\rho_k \sin \beta_k)|\right) + O(\rho_{n+1}) \quad (4)$$

Враховуючи, що $V_{-\pi}^{-\frac{\pi}{n+1}} t_n = V_{\frac{\pi}{n+1}} t_n$, з (3) та (4) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} V_0^{2\pi} t_n &\leq \frac{4\pi}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k\rho_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\rho_k| + \\ &+ O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (k+1) |\Delta^2(k\rho_k \cos \beta_k)| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (k+1) |\Delta^2(k\rho_k \sin \beta_k)|\right) + O\left(\frac{1}{n} \rho_{n+1}\right) = \\ &+ O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (k+1) |\Delta^2(k\rho_k \cos \beta_k)| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (k+1) |\Delta^2(k\rho_k \sin \beta_k)|\right) + O\left(\frac{1}{n} \rho_{n+1}\right) = O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\rho_k|\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогічно отримаємо оцінку величини

$$\frac{1}{n} V_0^{2\pi} \tau_n = O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\rho_k| + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (6)$$

Тоді склавши до купи (2), (5) та (6) отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} \right| dx &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k}{n-k+1} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k |\sin \beta_k|}{k+n} + \\ &+ O\left(|\rho_0| + \sum_{k=1}^n \frac{(k+n)(n-k+1)}{2n+1} (|\Delta^2(\rho_{k-1} \cos \beta_{k-1})| + |\Delta^2(\rho_{k-1} \sin \beta_{k-1})|)\right) + O\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\rho_k|\right). \end{aligned}$$

Що й треба було довести.

Теорему доведено.

ПОСИЛАННЯ

- [1] Теляковский С. А. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II. // Изв. АН СССР. Сер. матем., 27:2, 1963 — С. 253-272
- [2] Задерей П.В., Гаєвський М.В., Веремій М.А. Асимптотична формула для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка, Вип. 1, 2017 – С. 10-17.
- [3] Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Приближение функций полиномами и сплайнами, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, 145, 1980 — С. 126–151.
- [4] Fejer L. Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen// J. reine und angew. Math., 138, 1910. — S. 22–53.
- [5] Теляковский С. А. Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации. // Приближение периодических функций, Тр. МИАН СССР, 109, 1971 — С. 65–97.
- [6] Теляковский С. А. Оценки интеграла от производной суммы тригонометрического ряда с квазивыпуклыми коэффициентами. // Матем. сб., 186:11, 1995 — С. 111–122.