ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 3 (2015)

УДК 514+531.8

# НАПРЯЖЁННОСВЯЗАННЫЕ КОНСТРУКЦИИ

М. Д. Ковалёв (г. Москва)

**Аннотация**

Рассматриваются идеальные конструкции, составленные из жестких рычагов, нерастяжимых верёвок и несжимаемых распорок. По английски такие конструкции называют „tensegrity frameworks", что можно перевести как напряжённосвязанные конструкции. В частном случае конструкций, составленных из одних лишь рычагов, — это обычные шарнирно-рычажные конструкции. В последнее время напряжённосвязанные конструкции всё шире применяются в архитектуре и строительстве, например, строительстве мостов. В русской инженерной литературе они называются вантовыми.

В англоязычной математической литературе геометрические свойства таких конструкций изучаются с семидесятых годов прошлого века. Данная статья, по-видимому, первая в отечественной математической литературе, посвящённая этому вопросу. Она носит ознакомительно-обзорный характер.

Вводится математическая формализация напряжённосвязанных конструкций в духе работ автора по шарнирно-рычажным конструкциям. Эта формализация включает оригинальную терминологию, вовсе не сводящуюся к заимствованию английских слов. Рассматриваются лишь незакреплённые конструкции. Стяжками называем конструкции, допускающие внутреннее напряжение, и не допускающие непрерывной деформации с изменением формы. Возникает понятие определённой стяжки, то есть такой, которую из данных элементов можно собрать в заданном порядке единственным способом, с точностью до движений в пространстве как жёсткого целого. Естественно возникает и понятие вполне определённой стяжки, как стяжки определённой не только в том евклидовом пространстве, где она построена, но и во всех евклидовых пространствах большего числа измерений.

Основное внимание уделяется задаче — когда стяжка является определённой? Для решения задачи эффективен метод рассмотрения определённым образом выбранной функции – потенциальной энергии конструкции. Ищутся конструкции, для которых эта потенциальная энергия минимальна. Метод подробно изложен в статье. Приведено доказательство основной теоремы, дающей достаточное условие сверхопределённости стяжки. Фундаментальное значение в исследовании играет рассмотрение внутренних напряжений конструкции и её матрицы напряжений, через которую записывается потенциальная энергия. Приведены примеры применения этой теоремы к плоским и пространственным конструкциям.

В целом данная тематика ещё недостаточно разработана, и в настоящее время активно развивается. В конце статьи приведены открытые вопросы.

*Ключевые слова:* напряжённосвязанные конструкции, стяжки, определённость, потенциальная энергия, матрица напряжений.

*Библиография:* 15 названий.

# ON TENSEGRITY FRAMEWORKS

M. D. Kovalev

**Abstract**

Ideal designs, made of rigid bars (levers), inextensible cables and incompressible struts are considered. In English such constructions are called "tensegrity frameworks". In the particular case of structures composed of only the levers, — this is a bar and joint frameworks. In recent times the tensegrity frameworks are increasingly used in architecture and construction, for example, the construction of bridges.

In English mathematical literature geometric properties of such structures were studied since the seventies of the last century. This article is apparently the first in Russian mathematical literature devoted to this topic. It is a breath survey to the theory of tensegrity frameworks.

It introduces mathematical formalization of tensegrity frameworks in the spirit of the work of the author on hinge mechanisms. This formalization includes original Russian terminology, not reducible to the borrowing of English words. Only not pinned tensegrity frameworks are investigated. We call a tensegrity frameworks, allowing the internal stress, and not allowing a continuous deformation with a change of form, — a truss. A truss that can'not be assembled in a different way to be not congruent to initial one is called Globally Rigid. If a tensegrity frameworks is Globally Rigid in $R^n$ and also Globally Rigid in every $R^N$ for $N > n$ it is called Universally Rigid.

We focus on the problem — when a given tensegrity framework is Globally Rigid? We consider an effective method for solving this problem, based on investigation of particular function – the potential energy of the structure. We search a tensegrity frameworks for which this potential energy is minimal. The method is described in detail in the article. The main theorem, giving a sufficient condition of Universal Rigidity of tensegrity framework is proved in details. The study of internal stresses of a tensegrity framework and its stress matrix, by means of which the potential energy is written, is of fundamental importance. Examples of applications of this theorem to planar and spatial tensegrity frameworks are presented.

In general, this subject is not yet sufficiently developed, and is currently actively investigated. At the end of the article some open questions are formulated.

*Keywords:* Tesegrity frameworks, global rigidity, potential function, stress matrix.

*Bibliography:* 15 titles.

# 1. Введение

В работах автора [1, 2, 3] был развит математический подход к изучению геометрических свойств конструкций, составленных из жёстких стержней, соединённых между собой шарнирами. Шарниры предполагаются расположенными на концах стержней-рычагов. Обобщением таких конструкций являются конструкции, в которых шарниры могут быть связаны кроме рычагов верёвками или распорками.

Примеры таких пространственных конструкций показаны на рисунках 1, 2. Из простых таких конструкций архитекторы составляют более сложные – вышки, купола и арки. Одна из таких арок показана на рисунке 3. В англоязычной литературе эти сооружения называются „tensegrity frameworks“, что можно перевести как напряжённосвязанные конструкции. Энтузиастами их применения в архитектуре явились американцы Ричард Бакминстер Фуллер (Richard Buckminster Fuller 1895 – 1983) и Кеннет Снельсон (Kenneth Snelson 1927). В отечественной инженерной литературе подобные конструкции называют вантовыми.

Математическое изучение напряжённосвязанных конструкций англоязычными авторами ведётся довольно давно [4, 5]. В отечественной математической литературе этим объектам до настоящего времени не уделялось почти никакого внимания. Цель данной статьи — восполнить этот пробел.

В пространственном случае шарниры наших конструкций следует считать сферическими. Мы их считаем точечными, и если они являются концами верёвок или распорок, то их естественнее называть узлами конструкции. Пусть узел задан своим радиус-вектором $p_i$ . Верёвка налагает условие $|p_i - p_j| \leq l_{ij}$ на расстояние между узлами $p_i$ и $p_j$, а распорка налагает условие $|p_i - p_j| \geq l_{ij}$, где $l_{ij}$ — длина верёвки (распорки).

В следующем разделе будет проведена математическая формализация предмета и поставлены основные вопросы.

В третьем разделе развит подход к изучению геометрии напряжённосвязанных конструкций, основанный на анализе потенциальной энергии, доказана основная теорема о сверхопределённых конструкциях.

В четвёртом разделе приведены примеры и результаты, полученные с использованием основной теоремы предыдущего раздела.

Статья заканчивается постановкой открытых вопросов.

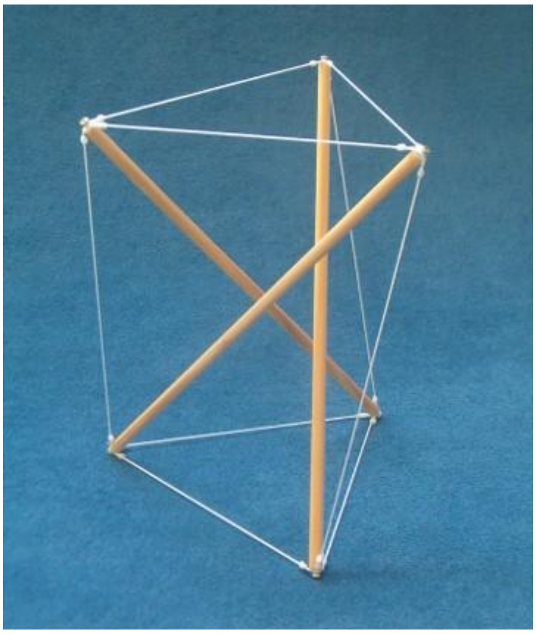


Рис. 1: Простейшая вязанка Снельсона.

Замечу, что у меня русские термины не всегда совпадают с буквальным переводом английских. Я старался выбрать их так, чтобы они согласовались с прижившимися в теории поверхностей, и отвечали духу русского языка.

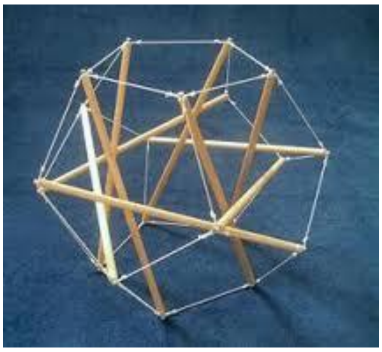


Рис. 2: Более сложная вязанка.

## 2. Описание напряжённосвязанных конструкций

Приведём математическое описание незакреплённых напряжённосвязанных конструкций в евклидовом $n$-мерном пространстве $R^n$ в духе [1]. Однако, в отличии от этой работы мы будем рассматривать незакреплённые конструкции. Отметим, что если для шарнирных механизмов наиболее важен случай $n = 2$, то здесь для практики содержательнее случай $n = 3$.

Начнём с понятия структурной схемы напряжённосвязанной конструкции. В качестве неё мы будем рассматривать граф, вершинам которого отвечают узлы, а рёбрам — связи, то есть, рычаги, верёвки либо распорки конструкции. А именно, разобьём рёбра абстрактного связного без петель и кратных рёбер графа $G(V, E)$ на три непересекающихся класса $E = E_0 \sqcup E_- \sqcup E_+$, где $E_0$ будет отвечать рычагам, $E_-$ — верёвкам, а $E_+$ — распоркам. Этот граф будем называть *шарнирной схемой (ШС)*. Пусть число узлов $|V|$ равно $m$, а числа связей: $|E_0| = r$, $|E_-| = s$, $|E_+| = u$. Каждому отображению графа $G(V, E)$ в $R^n$, сопоставляющему вершинам узлы $p_i \in R^n$ , а рёбрам — связи, отвечает конструкция, — *шарнирник.* Его можно отождествлять с точкой $\{p_i\} = p \in R^{nm}$. Связи мы будем изображать на рисунках как отрезки прямых, соединяющие узлы, и обозначенные одинарной линией в случае рычага, двойной — в случае распорки, и пунктирной — в случае верёвки.

Рис. 3: Арка — вязанка.

Ключевую роль играет *рычажное отображение* $F : R^{nm} \to \mathcal{R}^{r+s+u}$. Оно сопоставляет каждому шарнирнику, определяемому положениями $\{p_i\}$, $1 \leq i \leq m$ его узлов в пространстве $R^n$, набор квадратов длин связей. Покоординатно рычажное отображение задаётся формулами

$$d_{ij} = (p_i - p_j)^2,$$

где справа написан скалярный квадрат вектора. В англоязычной литературе его называют "rigidity mapping"или „edge function“[6, 7]. *Кинематической схемой (КС)* конструкции называем точку $\{d_{ij}\} = d \in \mathcal{R}^{r+s+u}$. *Устройством, подчинённым* КС $d^0$, назовём компоненту связности при рычажном отображении полного прообраза $F^{-1}(K(d^0))$ сдвинутого координатного угла $K(d^0) \subset \mathcal{R}^{r+s+u}$, задающегося условиями:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= d_{ij}^0, && p_ip_j \in E_0,\\ d_{ij} &\le d_{ij}^0, && p_ip_j \in E_-,\\ d_{ij} &\ge d_{ij}^0, && p_ip_j \in E_+. \end{aligned}$$

Если все шарнирники $p$ устройства, подчинённого некоторой КС, получаются один из другого собственным движением пространства $R^n$, то такое устройство называем *фермой.* Другими словами, фермы суть *неизгибаемые* конструкции. В англоязычных работах для обозначения неизгибаемости используется термин „rigid"(„rigidity").

Не все фермы являются жёсткими. Жёсткость определяется следующим образом.

Определение 1. *Назовём мгновенным движением шарнирника $p$ совокупность (поле) скоростей $v = \{v_i\} = \{v(p_i)\}$ всех его шарниров, удовлетворяющее условиям связей*

$$\begin{aligned} (p_i - p_j)(v_i - v_j) &= 0, && p_ip_j \in E_0,\\ (p_i - p_j)(v_i - v_j) &\le 0, && p_ip_j \in E_-,\\ (p_i - p_j)(v_i - v_j) &\ge 0, && p_ip_j \in E_+. \end{aligned}$$

.

Условия связей имеют тот смысл, что верёвки нерастяжимы, а распорки несжимаемы. Мгновенные движения фермы включают все поля скоростей, порождённых движениями пространства $R^n$. Ферма называется *жёсткой*, если её мгновенные движения исчерпываются полями скоростей, порождённых движениями пространства $R^n$. Простейшая плоская ферма — треугольник со сторонами рычагами — жёсток в случае, когда шарниры неколлинеарны, и неизгибаем но нежёсток, когда все шарниры лежат на одной прямой. На рисунке 4 показано поле скоростей, не порождаемое движением плоскости. В англоязычных работах термину жёсткость отвечает термин „infinitesimal rigidity". Справедлива следующая естественная теорема [8, 9]

Теорема 1. *Каждая жёсткая в $R^n$ ферма неизгибаема в $R^n$.*

Как известно, силы в идеальной шарнирной конструкции действуют лишь вдоль её связей. Пусть $p_ip_j$ связь с концевыми шарнирами в точках $p_i,\ p_j \in R^n$. Силу $f_{ij}$, с которой эта связь действует на шарнир $p_i$, принято записывать как $\omega_{ij}(p_i - p_j)$, где скаляр $\omega_{ij}$ называется *внутренним напряжением связи $p_ip_j$*. К шарниру $p_j$ эта связь прилагает силу $f_{ji} = \omega_{ji}(p_j - p_i)$. Так как действие равно противодействию, то $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. Величины напряжений $\omega_{ij}$ указывают меру напряженности связей. Если $\omega_{ij} < 0$, то связь $p_ip_j$ растянута. Она может быть

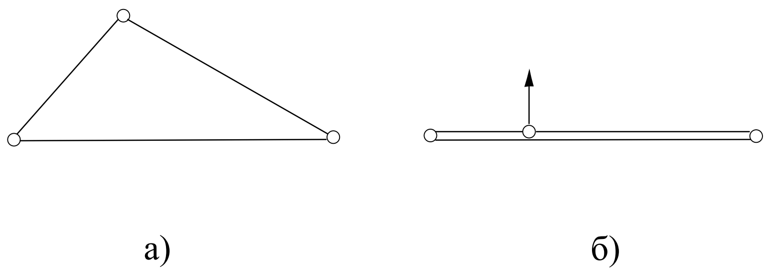



Рис. 4: Скорость среднего шарнира перпендикулярна прямой, на которой лежат шарниры. Скорости остальных шарниров нулевые. Длины всех трёх рычагов стационарны.

либо рычагом, либо верёвкой. Если же $\omega_{ij} > 0$, то связь сжата, и это может быть либо рычаг, либо распорка. Пусть $\omega = \{\omega_{ij}\}, (i,j) \in E$ набор допустимых внутренних напряжений всех связей для заданной ШС. Он называется *допустимым* набором или *допустимым* напряжением, если внутренние напряжения верёвок неположительны, а внутренние напряжения распорок неотрицательны. Допустимое напряжение будем называть *полным*, если напряжения всех связей ненулевые.

Условие равновесия сил, приложенных к $i$-ому шарниру со стороны смежных шарниров шарнирника, имеет вид

$$\sum_j \omega_{ij}(p_i - p_j) = 0,$$

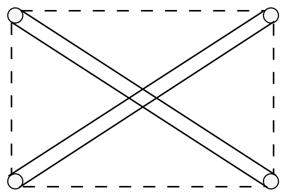
где суммирование проводится по всем шарнирам смежным $i$-му. *Внутренние напряжения* $\omega = \{\omega_{ij}\}$ шарнирника определяются как нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений:

$$\sum_j \omega_{ij}(p_i - p_j) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{1}$$

Механический смысл этой системы суть равновесие сил в каждом шарнире конструкции. Если система имеет лишь тривиальное решение, то говорят, что шарнирник *не допускает внутренних напряжений*.

Будем называть *стяжкой* ферму, допускающую внутреннее напряжение ненулевое хотя бы на одной верёвке или распорке. Именно такие неизгибаемые напряжённосвязанные конструкции наиболее интересны для строительной механики. На рисунке 5 изображены два плоских шарнирника, их шарниры лежат в вершинах прямоугольника.

Эти шарнирники допускают внутреннее напряжение. Для шарнирника рисунка 5 а) равное 1 на диагональных распорках и $-1$ на верёвках, идущих по сторонам прямоугольника. Для шарнирника 5 б) напряжения на верёвках и распорках можно взять такими же. Последний шарнирник не допускает непре-



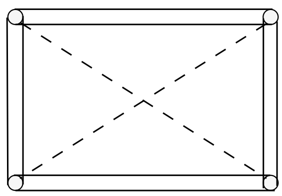




Рис. 5: Плоская вязанка слева сверхопределённа. Плоская стяжка справа неопределённа.

рывных деформаций, то есть является фермой. Действительно, при таких деформациях длины его сторон не уменьшаются. Следовательно, длина хотя бы одной из диагоналей должна возрасти. А это невозможно, поскольку наши верёвки нерастяжимы. Итак, этот шарнирник является стяжкой. Отметим, что не нарушая связей, эту конструкцию можно собрать и иначе — отразив половину прямоугольника относительно его диагонали. При этом одна верёвка провиснет. Таким образом, КС второго шарнирника подчинено не менее двух устройств. Шарнирник рисунка 5 а) является стяжкой вследствие теоремы 3. Более того, эта теорема утверждает, что любой шарнирник с такими же связями конгруэнтен этому, то есть, получается из него изометрией плоскости. Это понятие по английски обозначают как „global rigidity“. Мы будем говорить об *определённости* стяжки. Задача распознавания определённости шарнирников имеет первостепенную важность. Ниже мы её обсудим.

## 3. Энергетический подход

Плодотворным в исследовании определённости стяжек является энергетический подход, впервые предпринятый Робертом Коннелли в [4]. Он основан на рассмотрении функции потенциальной энергии напряженносвязанной конструкции вида

$$E_\omega(p) = \sum_{i<j} \omega_{ij}(p_i - p_j)^2, \tag{2}$$

где произведение векторов считается скалярным, а внутреннее напряжение $\omega = \{\omega_{ij}\}$ допустимым для конструкции и полным.

Пусть $d$ кинематическая схема для шарнирника $p$, тогда для любого подчинённого $d$ шарнирника $q$ имеем $E_\omega(q) \le E_\omega(p)$. В случае же когда длина хоть одной из связей шарнирника $q$ не равна длине соответствующей связи $p$, это неравенство превращается в строгое.

Будем искать минимум потенциальной энергии, задав смещение $tq = \{tq_i\}$,

$t \in R$, переводящее шарнирник $p$ в $p + tq$

$$E_\omega(p+tq) = \sum_{i<j} \omega_{ij}[(p_i - p_j)^2 + 2t(p_i - p_j)(q_i - q_j) + t^2(q_i - q_j)^2].$$

Имеем

$$\frac{d}{dt} E_\omega(p+tq)|_{t=0} = 2\sum_{i<j} \omega_{ij}(p_i - p_j)(q_i - q_j).$$

В точке экстремума эта производная должна быть нулевой для любого смещения $q$, что возможно лишь при выполнении равенств (1):

$$\sum_j \omega_{ij}(p_i - p_j) = 0, \qquad i = 1 \dots m.$$

То есть, шарнирник, на котором достигается минимум потенциальной энергии, допускает внутреннее напряжение $\omega$.

Однако, как показывает простое вычисление, любой образ при линейном преобразовании, нашего шарнирника также допускает внутреннее напряжение $\omega$. Действительно, пусть $A$ квадратная возможно вырожденная матрица $n$-го порядка, $b \in R^n$ — заданный вектор столбец, $p_i$ — вектор-столбец координат шарнира. Тогда

$$\sum_j \omega_{ij}(Ap_i + b - Ap_j - b) = A\sum_j \omega_{ij}(p_i - p_j) = 0.$$

Будем говорить, что шарнирник $q$ подчинён шарнирнику $p$ (с той же ШС), и писать $q \leq p$, если выполнены условия

$$\begin{aligned} |q_i - q_j| &= |p_i - p_j|, \qquad p_ip_j \in E_0,\\ |q_i - q_j| &\leq |p_i - p_j|, \qquad p_ip_j \in E_-,\\ |q_i - q_j| &\geq |p_i - p_j|, \qquad p_ip_j \in E_+. \end{aligned} \tag{3}$$

Если напряжение $\omega$ полное и выполнено $q \leq p$, и $E_\omega(q) = E_\omega(p)$, то с необходимостью все связи шарнирника $q$ имеют ту же длину, что и соответствующие связи $p$. Возникает вопрос, — когда линейное преобразование $x \mapsto Ax + b$ пространства $R^n$ сохраняет длины всех связей шарнирника $p$? Нас, конечно, интересует случай отличный от очевидного, в котором преобразование ортогонально. Вычисление

$$\begin{aligned} (q_i - q_j)^2 = (Ap_i - Ap_j)^2 = [A(p_i - p_j)]^T A(p_i - p_j) =\\ = (p_i - p_j)^T A^T A(p_i - p_j) = (p_i - p_j)^T(p_i - p_j), \end{aligned}$$

показывает, что для каждой связи $(i, j) \in E$ шарнирника должно выполняться условие

$$(p_i - p_j)^T(A^TA - E)(p_i - p_j) = 0.$$

Здесь $E$ — единичная матрица $n$-го порядка, а буквой $T$ обозначено транспонирование.

Пусть $B$ — симметрическая ненулевая матрица $n$-го порядка.

Определение 2. *Если выполнено равенство*

$$r_i^T B r_i = 0 \tag{4}$$

*для каждого вектора некоторой совокупности векторов $r_i \in R^n$, то будем говорить, что эта совокупность векторов лежит на квадрике в бесконечности.*

Основанием такого названия является то, что если считать прямые пространства $R^n$, проходящие через начало координат, точками проективного пространства $RP^{n-1}$, то уравнение (4) является уравнением проективной квадрики. При $n = 2$ квадрика в бесконечности состоит из двух направлений.

*Аффинной оболочкой* точек евклидова пространства называем наименьшее линейное многообразие, содержащее эти точки. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть линейная оболочка узлов шарнирника $p$ совпадает с $R^n$. Нетривиальный (не получаемый изометрией) линейный образ шарнирника $p$, сохраняющий длины всех его связей, существует тогда и только тогда, когда все связи шарнирника лежат на некоторой квадрике в бесконечности.*

Лемма вытекает из вышесказанного и того, что если шарнирник лежит в некоторой $n-1$-мерной плоскости $P$ пространства $R^n$, то имеются неортогональные линейные преобразования $R^n$, сужения которых на $P$ ортогональны.

Заметим, что выражение для энергии можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_\omega(p) = \sum_{i<j} \omega_{ij}(p_i - p_j)^2 = \\ = \sum_{i<j} \omega_{ij}(x_i - x_j)^2 + \sum_{i<j} \omega_{ij}(y_i - y_j)^2 + \dots = \\ = x^T \Omega x + y^T \Omega y + \dots, \end{aligned}$$

где считаем $p_i = (x_i, y_i, \dots)^T$, $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, а симметрическая матрица $\Omega$ порядка $m$ называется матрицей напряжений. Элемент $\Omega_{ij}, i \neq j$ этой матрицы равен $-\omega_{ij}$ если в шарнирнике шарниры $p_i$ и $p_j$ связаны, и нулю в противном случае. Элемент $\Omega_{ii} = \sum_{j,(i,j)\in E} \omega_{ij}$. Таким образом, сумма всех строк (столбцов) матрицы $\Omega$ суть нулевая строка (столбец).

Заметим, что квадратичная форма $E_\omega(p)$ неотрицательна в том и только том случае, когда матрица $\Omega$ суть матрица неотрицательной квадратичной формы. В этом случае необходимое условие (1) экстремума функции $E_\omega(p)$ является и достаточным. Более того, выполнение для шарнирника $p$ условия (1) влечёт равенство $E_\omega(p) = 0$.

Через матрицу напряжений можно записать условия (1) равновесия сил в шарнирнике. Пусть $p_i$ — вектор-столбец координат $i$-го шарнира. Назовём *матрицей шарнирника* $n+1 \times m$ матрицу

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

сопоставляемую шарнирнику $p \in R^n$. Тогда условия (1) можно переписать в следующей равносильной матричной форме:

$$P\Omega = 0.$$

Произведение $k$-ой строки матрицы $P$ на $i$-й столбец матрицы $\Omega$ есть условие равенства нулю суммы $k$-х координат сил, приложенных к $i$-му узлу. Равенство нулевой строке произведения последней строки (из единиц) на $\Omega$ равносильно равенству нулевой строке суммы строк матрицы $\Omega$. Отметим также, что ранг матрицы $P$ равен размерности аффинной оболочки узлов шарнирника.

В пространстве достаточно большого числа измерений можно выбрать шарнирник $p$ с рассматриваемой структурной схемой так, чтобы линейная оболочка строк его матрицы $P$ содержала ядро матрицы $\Omega$, то есть множество всех векторов $x \in R^m$, для которых $(x^T\Omega)^T = \Omega x = 0$. Назовём такой шарнирник $p$ *универсальным* для напряжения $\omega$.

Лемма 2. *Любой шарнирник $q$ с данной ШС, допускающий внутреннее напряжение $\omega$, является линейным образом универсального шарнирника $p$, лежащего в $R^n$.*

Пусть $Q$ — матрица шарнирника $q$, расположенного в $R^n$. Поскольку $q$ допускает напряжение $\omega$, то $Q\,\Omega = 0$ для соответствующей матрицы напряжений $\Omega$. В силу универсальности $p$ линейная оболочка строк его матрицы $P$ содержит ядро матрицы $\Omega$, и следовательно имеется такая $n+1 \times k+1$-матрица $A$ для которой справедливо равенство $AP = Q$. А поскольку последние строки матриц $P$ и $Q$ состоят из единиц, то матрица $A$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $A_1$ — $n \times k$-матрица, $b \in R^n$ — вектор-столбец. Итак, для любого $i$ имеем $q_i = A_1 p_i + b$.

Пусть шарнирник $p$ универсален в $R^n$, и допускает внутреннее напряжение $\omega$, для которого ядро матрицы $\Omega$ $n+1$-мерно. Тогда ранг матрицы $\Omega$ равен $m-n-1$. Если же шарнирник $p$, допускающий внутреннее напряжение $\omega$, неуниверсален и его аффинная оболочка совпадает с $R^n$, то его можно рассматривать как проекцию универсального шарнирника. И в этом случае верно неравенство $\operatorname{Rank}\Omega \le m-n-1$.

Основную роль в энергетическом методе играет следующая теорема Р. Коннелли [4, 5]. Назовём шарнирник $p$, лежащий в $R^n$, *сверхопределённым*, если любой шарнирник $q$ в любом пространстве $R^N$, $N \geq n$ с теми же длинами связей, что и у $p$, конгруэнтен $p$.

Теорема 2. *Пусть аффинная оболочка шарниров шарнирника $p$ совпадает с $R^n$, и $p$ допускает полное напряжение $\omega$, а $\Omega$ — соответствующая матрица напряжений. Если выполнены условия:*

*1. $\Omega$ неотрицательно определённая матрица,*

*2. $\operatorname{Rank}\Omega = m - n - 1$ ($m$ — число узлов шарнирника),*

*3. векторы всех связей шарнирника $p$ не лежат ни на какой квадрике в бесконечности,*

*то шарнирник $p$ сверхопределён.*

Доказательство. Пусть шарнирник $q \leq p$. Тогда $E_\omega(q) \leq E_\omega(p)$. Условие 1) влечёт равенство $E_\omega(q) = E_\omega(p) = 0$. Кроме того, $\omega$ есть внутреннее напряжение шарнирников $p$ и $q$. Вследствие условия 2) и леммы 2 шарнирник $q$ представляет собой линейный образ шарнирника $p$. Из условия 3) и леммы 1 вытекает конгруэнтность шарнирника $q$ шарнирнику $p$. □

Важно отметить, что несуществование линейных образов шарнирника, удовлетворяющих условиям постоянства длин связей и неконгруэнтных шарнирнику, равносильно невозможности непрерывных аффинных изгибаний шарнирника, сохраняющих длины его связей. При изгибаниях получаются шарнирники неконгруэнтные исходному. Таким образом, условие 3) теоремы можно заменить на условие отсутствия аффинных изгибаний шарнирника $p$, порождённых линейными преобразованиями пространства. Естественно, достаточно потребовать просто неизгибаемость шарнирника.

## 4. Следствия из основной теоремы и примеры

Приведём некоторые результаты, которые были доказаны на основе теоремы 2. Следующая теорема [4] о плоских стяжках, подобных изображённой на рисунке 5 а)., даёт ответ на вопрос, поставленный Грюнбаумом и Шеппардом в [10].

Теорема 3. *Пусть шарниры плоской стяжки лежат в вершинах выпуклого многоугольника, все стороны которого — верёвки, а распорки представляют собой некоторые диагонали многоугольника. Тогда если стяжка допускает внутреннее напряжение ненулевое на каждой связи, то она сверхопределённа.*

Из этой теоремы следует в частности сверхопределённость стяжки рисунка 5 а).

*Вязанкой* назовём стяжку, составленную лишь из верёвок и распорок, для которой каждая верёвка натянута между концами распорок, а среди распорок нет смежных друг другу. В этом случае граф, порождённый множеством $E_-$ верёвок, связен и содержит все вершины $G(V, E)$. Рёбра из $E_+$ несмежны, а каждая вершина ребра из $E_-$ инцидентна хотя бы одному ребру из $E_+$. Конструкции рисунков 1, 2, 3, 5 а) представляют собой вязанки. Для вязанки угол $K(d)$ суть сдвинутый координатный ортант.

Следующая теорема [11] касается симметричных, так называемых призматических вязанок в трёхмерном пространстве. Эти вязанки строятся следующим образом. Возьмём ось $L$ и две плоскости перпендикулярные ей. В этих плоскостях выберем окружности $O_1$ и $O_2$ одинакового радиуса с центрами на оси $L$. Узлы нашей вязанки расположены в вершинах правильных $n$-угольников, $M_1$ и $M_2$, вписанных в эти окружности. Распорки вставлены между узлами, лежащими на различных окружностях, так, чтобы ось $L$ была осью вращательной симметрии $n$-го порядка. Вся вязанка имеет вращательную симметрию $n$-го порядка. Между узлами многогугольника $M_1$ натянем верёвки, соединяющие $i$-ую вершину с $i \pm k$-ой. То же самое сделаем в многоугольнике $M_2$. Натянем, наконец, верёвки между узлами многоугольников $M_1$ и $M_2$ так, чтобы верёвка, начинающаяся в конце распорки $R$ на $M_1$ оканчивалась на $M_2$ через $j$ сторон многоугольника от второго конца распорки $R$ в выбранном направлении обхода окружности $O_2$. Такую вязанку обозначим как $P_n(j, k)$. На рисунке 1 изображена призматическая вязанка $P_3(1, 1)$.

Теорема 4. *Призматическая вязанка* $P_n(j, k)$, $n = 3, 4, \ldots,$ $k, j = 1, 2, \ldots, n-1$ *определённа (и сверхопределённа) тогда и только тогда, когда* $k = 1$ *или* $k = n - 1$.

Из теоремы в частности следует определённость призматической вязанки $P_3(1, 1)$ рисунка 1.

Отметим существование стяжек, с матрицей напряжений, не являющейся неотрицательно определённой. Такой пример даёт стяжка рисунка 6 с указан-

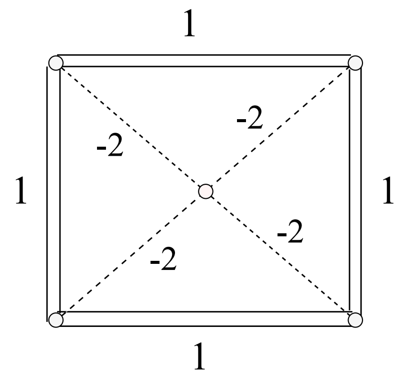



Рис. 6: Плоская стяжка, матрица напряжений которой не определённа.

ными на рисунке напряжениями[1]. Здесь матрица напряжений имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -8 \end{bmatrix},$$

а её собственные числа равны: $0, 0, 0, 2, -10$. Эта стяжка $p$ не является определённой, отражением от диагонали квадрата её половины получаем шарнирник с теми же длинами связей. Опустив центральный узел стяжки $p$ так, чтобы он оставался посередине между вертикальными сторонами квадрата и стал ближе в два раза к нижней его стороне чем к верхней, получим новую стяжку. Она, очевидно, определённа в $R^2$. Собственные значения её матрицы напряжений равны $0, 0, 0, 2, -23/2$. Эта стяжка изгибаема в $R^3$, и потому не является сверхопределённой.

## 5. Заключение

В заключение сформулируем два вопроса.

ВОПРОС 1. Имеются ли вязанки, для которых матрица напряжений суть матрица неопределённой квадратичной формы?

ВОПРОС 2. Могут ли одной кинематической схеме отвечать неконгруэнтные вязанки?

Последнее развитие приведённых идей, а также обширную библиографию по затронутой теме можно найти в работах [12, 13, 14, 15].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев, М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Изв. РАН Сер. матем. 58 : 1, 1994, С. 45–70.
2. Ковалев М.Д., Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ. Серия Машиностроение. № 4, 2001, С. 33–51.
3. Ковалев, М.Д. О распрямлённых шарнирных конструкциях.// Математический сборник. т.195, № 6, 2004, С. 71 – 98.
4. Connelly R. Rigidity and Energy // Invent. Math. v.66, № 1, 1982, P. 11–33.
5. Connelly R. Rigidity. / Chapter 1.7 in Handbook of Convex Geometry, Volume A, Edited by P.M.Gruber and J.M. Wills, Elsevier, 1993.

[1] Пример автору сообщил Роберт Коннелли.

6. Asimov L., Roth B. The rigidity of Graphs. II. // Journal of Math. analysis and appl. V.68, № 1, 1979, P. 171–190.

7. Crapo H., Whiteley W. Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures, a Projective Geometric Introduction // Structural Topology. № 6, 1982, P. 43 – 82.

8. Connelly R. The Rigidity of Certain Cabled Frameworks and the Second-Order Rigidity of Arbitrarily Triangulated Convex Surfaces // Advances in Math. v.37. № 3. 1980. P. 272–299.

9. Roth B., Whiteley W. Tensegrity Frameworks. Trans. Amer. Math. Soc. // 265 № 2. 1981. P. 419–446.

10. Grunbaum B., Shepard G. Rigidity of Polyhedra, Frameworks and Cabled Frameworks // Abstract 760 - D3, Notices Amer. Math. Soc. 25, 1978, A - 642.

11. Connelly R., Terrell M. Globally rigid symmetric tensegrities Dual French-English text. // Structural Topology № . 21, 1995, P. 59 – 78.

12. Connelly R. Generic global rigidity.// Discrete Comput. Geom., 33(4), 2005, P. 549 – 563.

13. Connelly R., Whiteley W. Global rigidity. The effect of coning. // Discrete Comput. Geom., 43, 2010, P. 717 – 735.

14. Connelly R. What is ... a tensegrity? // Notices Amer. Math. Soc., 60(1), 2013, P. 78 – 80.

15. Connelly R., Gortler S. Iterative Universal Rigidity / arXiv:1401.7029v2 [math.MG] 28 Jan 2015

## REFERENCES

1. Kovalev, M. D. 1994, "Geometric theory of linkages", *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 58, no. 1, pp. 45–70 (Russian); translation in *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, vol. 44 (1995), no. 1, pp. 43–68.

2. Kovalev, M. D. 2001, "Questions geometry hinged devices and schemes", *Vestnik MSTU. Mechanical Engineering Series.*, № 4, pp. 33–51. (Russian)

3. Kovalev, M. D. 2004, "Straightenable hinged frameworks", *Mat. Sb.*, vol. 195, no. 6, pp. 71–98 (Russian); translation in *Sb. Math.*, vol. 195 (2004), no. pp. 5–6, 833–858.

4. Connelly, R. 1982, "Rigidity and Energy" , *Invent. Math.*, vol. 66, № 1, pp. 11–33.

5. Connelly, R. 1993, "Rigidity. / Chapter 1.7 in Handbook of Convex Geometry, Volume A, Edited by P. M. Gruber and J. M. Wills" , *Elsevier.*

6. Asimov, L. & Roth, B. 1979, "The rigidity of Graphs. II." , *Journal of Math. analysis and appl.*, vol. 68, № 1, pp. 171–190.

7. Crapo, H. & Whiteley, W. 1982, "Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures, a Projective Geometric Introduction" , *Structural Topology*, № 6, pp. 43 – 82.

8. Connelly, R. 1980, "The Rigidity of Certain Cabled Frameworks and the Second-Order Rigidity of Arbitrarily Triangulated Convex Surfaces" , *Advances in Math.*, vol. 37, № 3, pp. 272–299.

9. Roth, B. & Whiteley, W. 1981, "Tensegrity Frameworks" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 265, № 2, pp. 419–446.

10. Grunbaum, B. & Shepard, G. 1978, "Rigidity of Polyhedra, Frameworks and Cabled Frameworks" , Abstract 760 — D3, *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 25, A — 642.

11. Connelly, R. & Terrell, M. 1995, "Globally rigid symmetric tensegrities Dual French-English text" , *Structural Topology* № . 21, pp. 59 – 78.

12. Connelly, R. 2005, "Generic global rigidity" , *Discrete Comput. Geom.*, vol. 33(4), pp. 549 – 563.

13. Connelly, R. & Whiteley, W. 2010, "Global rigidity. The effect of coning" , *Discrete Comput. Geom.*, vol, 43, pp. 717 – 735.

14. Connelly, R. 2013, "What is ... a tensegrity?" , *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 60(1), pp. 78 – 80.

15. Connelly, R. & Gortler, S. 2015, "Iterative Universal Rigidity" arXiv: 1401. 7029v2 [math.MG] 28 Jan 2015


Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.
Получено 02.06.2015