

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 3

УДК 519.6, 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-15-27

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММЫ ФИДЕСИС ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

С. М. Абрамов¹, С. А. Амелькин², Л. В. Клюев³,
К. Ю. Крапивин⁴, Ю. А. Ножницкий⁵, А. Н. Серветник⁶,
А. А. Чичковский⁷ (Москва)

Аннотация

В статье приводится конечно-элементный анализ локализации пластических деформаций в области разрушения модельного диска при вращении. При определенной угловой скорости вращения диска экспериментально замечается «утяжка». Данный эффект возникает при потере материальной устойчивости, является аналогом известного образования «шейки» при растяжении образцов. В силу конечности наблюдаемых экспериментальных перемещений и для обнаружения эффекта «утяжки» в численном эксперименте уравнения равновесия интегрируются с учетом конечности деформаций. Модельный расчет проведен в квазистатической постановке с пошаговым увеличением частоты вращения. Пластическое поведение металлического сплава материала диска описывается согласно предельной поверхности Губера-Мизеса.

¹Абрамов Сергей Михайлович, член-корреспондент Российской академии наук, директор Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН, sergey.a.amelkin@gmail.com

²Амелькин С. А., руководитель исследовательского центра системного анализа Института программных систем имени А. К. Айламазяна РАН, sergey.a.amelkin@gmail.com

³Клюев Леонид Владимирович, генеральный директор ООО ИММЕРС, l.klyuev@immers.ru

⁴Крапивин Кирилл Юрьевич, ведущий программист-алгоритмист ООО Фидесис, krapivin@saldlab.com

⁵Ножницкий Юрий Александрович, заместитель генерального директора Государственного научного центра Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова» — начальник отделения «Динамика и прочность авиационных двигателей», nozhnitsky@ciam.ru

⁶Серветник Антон Николаевич, начальник сектора Государственного научного центра Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова», servetnik@ciam.ru

⁷Чичковский А. А., директор по развитию ООО ИММЕРС, chaa14@gmail.com

Материальные параметры, используемые в расчете определены из экспериментальной кривой растяжения образца. Определяющие упруго-пластические соотношения записаны в конечных деформациях с мультипликативной декомпозицией деформационного градиента на упругую и пластическую компоненты. При полностью пластическом деформировании металлов в силу постоянства первого инварианта пластических деформаций процесс деформирования близок к изохорному. В таких случаях линейные изопараметрические конечные элементы проявляют эффект «объемного локинга», искажающий численный результат. В силу этого в вычислениях используем двадцати-узловые объемные конечные элементы второго порядка, которые указанной особенностью не обладают. Вычисления проведены на аппаратно — программном комплексе ИММЕРС — Фидесис. Исследована энерго- и шумо- эффективность кластера в распределенных вычислениях. В заключении статьи приводятся сравнение численных результатов с экспериментальными данными и уровень энерго-эффективности кластера.

Ключевые слова: конечно-элементный анализ, мультипликативная пластичность, конечные деформации, высокопроизводительный вычислительный кластер.

Библиография: 18 названий.

MODELING THE DEVELOPMENT OF LARGE PLASTIC DEFORMATIONS IN A ROTATING DISK IN THE FIDESYS PROGRAM

S. M. Abramov, S. A. Amel'kin, L. V. Kljuev, K. Ju. Krapivin, Ju. A. Nozhnickij, A. N. Servetnik, A. A. Chichkovskij (Moscow)

Abstract

The paper presents a finite element analysis of the localization of plastic deformations in the region of fracture of the model disk during rotation. At a certain angular velocity of rotation of the disk, an "ejection" is observed experimentally. This effect occurs when the material stability is lost, is analogous to the known "necking" in the specimen tension. In view of the finiteness of the observed experimental displacements and for the detection of the "tightening" effect in a numerical experiment, the equilibrium equations are integrated taking into account the finite deformations. The model calculation was carried out in a quasi-static setting with a step-by-step increase in the rotational speed. The plastic behavior of the metal alloy of the disk material is described according to the Huber-Mises limit surface. The material parameters used in the calculation are determined from the experimental tension curve of the sample. Elasto-plastic governing relations are used in finite deformations with a multiplicative decomposition of the deformation gradient into the elastic and plastic components. In fully plastic deformation of metals, due to the constancy of the first invariant of plastic deformations, the process of

deformation is close to isochoric. In such cases, linear isoparametric finite elements show the effect of “volumetric locking which distorts the numerical result. Therefore, in calculations we use twenty-node volume finite elements of the second order, which have no specific feature. The calculations were carried out on the IMERS-Fidesis hardware-software complex. The energy and noise efficiency of a cluster in distributed computations is studied. The article concludes by comparing the numerical results with the experimental data and the energy efficiency level of the cluster.

Keywords: finite-element analysis, multiplicative plasticity, finite strains, HPC cluster.

Bibliography: 18 titles.

1. Введение

Определение разрушающих частот вращения и остаточных удлинений дисков газотурбинных двигателей (ГТД) является обязательным требованием при их проектировании и сертификации [1]. С этой целью обычно проводят разгонные испытания дисков или роторов на специальных установках [2]. Задача замены части испытаний расчетом на основе математической модели является актуальной в связи с необходимостью сокращения финансовых и временных затрат на испытания.

В последние годы при активном развитии численных методов, в частности метода конечных элементов [11, 12], стало возможным исследовать несущую способность дисков сложной конфигурации, использовать 3D расчетные схемы совместно с теорией пластического течения [3, 4]. Основной идеей моделирования является квазистатический пошаговый расчет диска при увеличении внешней нагрузки на расчетную модель. Для большинства конструкционных сплавов, используемых при изготовлении дисков ГТД, данный процесс сопровождается развитием больших пластических деформаций вплоть до разрушения.

В данной работе на основании использования промышленной системы прочностного инженерного анализа CAE Fidesys [9, 13, 16, 17] выполнено моделирование процесса раскрутки модельного диска под действием постепенно увеличивающейся центробежной нагрузки с учетом физической и геометрической нелинейностей [14, 15]. Для проверки работоспособности модели выполнено сопоставление расчетных удлинений наружного диаметра модельного диска с экспериментальными данными.

Задача решена на высокопроизводительном вычислительном кластере Иммерс [10] на основе системы погружного жидкостного охлаждения, позволяющей повысить плотность установки вычислительных узлов, существенно снизить уровень шума работающего кластера, а также обеспечить мобильность решения.

2. Постановка задачи

Математическая постановка задача включает в себя систему уравнений равновесия:

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0$$

Запишем уравнения равновесия в слабой формулировке. В условиях конечности деформаций они выглядят так:

$$K_T du = f - \int_{\omega} B^T \sigma d\omega$$

где

$$K_T = \int_{\omega} B_a^T D_T B_b d\omega + \int_{\omega} N_{a,i} \sigma_{ij} N_{b,j} d\omega - \text{касательная матрица жесткости,}$$

$$f = \int_{\omega} N_a^T \rho b d\omega + \oint_{\gamma} N_a t d\gamma - \text{вектор внешних сил.}$$

Полученная система нелинейных уравнений решается методом Ньютона-Рафсона [11, 12].

Для связи напряжений с деформациями используются гиперупругопластические определяющие соотношения, где деформационный градиент записывается в виде мультипликативной декомпозиции упругой и пластической компонент, $F = F^E e F^p$. Неогуковский материал с разделением на объемное изменение и сдвиг:

$$\tau = \frac{K}{2} J^e \left(J^e - \frac{1}{J^e} \right) + \mu \operatorname{dev}[\bar{b}^e]$$

где K , μ — упругие постоянные,

$$\bar{b}^e = J^{e-\frac{2}{3}} \bar{b}^e,$$

$\bar{b}^e = F^e F^{eT} = F C^{p-1} F^T$ — правый тензор упругих деформаций Коши-Грина,

$$C^p = F^{pT} F^p - \text{левый тензор пластических деформаций Коши-Грина,}$$

$$J^e = \det[F^e].$$

Используется классическое условие текучести Губера - Мизеса, записанное в терминах напряжений Кирхгоффа:

$$f_y = \|\operatorname{dev}[\tau]\| - \operatorname{sqr}t{\frac{2}{3}} (h(\alpha) + \sigma_y) \geq 0$$

с мультилинейной функцией изотропного упрочнения

$$h(\alpha) = \sum_k E_{T_k} \Delta \alpha_k.$$

Замыкающими уравнениями являются условия Куна-Таккера, из которых определяется множитель совместности α :

$$f_y \leq 0, \dot{\alpha} \geq 0, \dot{\alpha} f_y(\alpha) = 0.$$

Тангенциальные модули E_T определяются непосредственно из истинной диаграммы деформирования.

Обновление напряжений на каждом временном шаге также как и для "малых деформаций" осуществляется по алгоритму "радиального возврата" [8]:

$\dot{C}^{p-1} = \dot{\alpha} \frac{2}{3} tr(\bar{b}^e) F^{-1} n F$, $n = \frac{dev[\tau]}{||dev[\tau]||}$ — ассоциированный с условием текущей закон течения,

$$dev[\tau_{n+1}] = dev[\tau_{n+1}^*] - 2\mu\Delta\gamma n,$$

$$\bar{\mu} = \bar{I}_{n+1}^e, \bar{I}_{n+1}^e = \frac{1}{3} tr [\bar{b}_{n+1}^{e*}],$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma.$$

Компоненты линеаризованной тангенциальной матрицы $D_T^{ep} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$, связанные с алгоритмом «радиального возврата» вычисляются на каждой итерации, что обеспечивает квадратичную сходимость.

Используются 20-ти узловые гексаэдральные элементы 2-го порядка серендипового семейства. Для них функции формы элемента [12] записываются следующим образом:

$$N = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 2) \text{ — в вершинах}$$

$$N = \frac{1}{8} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta),$$

$$N = \frac{1}{8} (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) (1 + \zeta_i \zeta),$$

$$N = \frac{1}{8} (1 - \zeta^2) (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \text{ — в центрах ребер.}$$

3. Объекты исследования и расчетная модель

Объектами исследования являлись две заготовки диска, отрезанные от прутка диаметром 330 мм из стали ЭИ961-ш. Из первой заготовки был изготовлен модельный диск для разгонных испытаний (рисунок 1а), а из второй — десять цилиндрических образцов для испытаний на разрыв для построения функции упрочнения.

Разгонные испытания диска проводились при нормальной температуре в один этап до разрушения на фрагменты. В процессе проведения испытания выполнялись записи частоты вращения и удлинения наружного диаметра диска по методу, описанному в работах [2, 5]. Объект разрушился при частоте вращения 24282 об/мин, при этом удлинение наружного диаметра диска в момент разрушения составило 4,4 мм. На рисунке 1б) показан разрушившийся модельный диск. Первичное разрушение произошло по цилиндрическому сечению на радиусе $R=55$ мм.

Оценка несущей способности диска по теории предельного равновесия [6] показала, что разрушение диска наступает в цилиндрическом сечении на ра-

диусе $R=56$ мм при частоте вращения 23100 об/мин, что удовлетворительно совпадает с результатами испытаний.

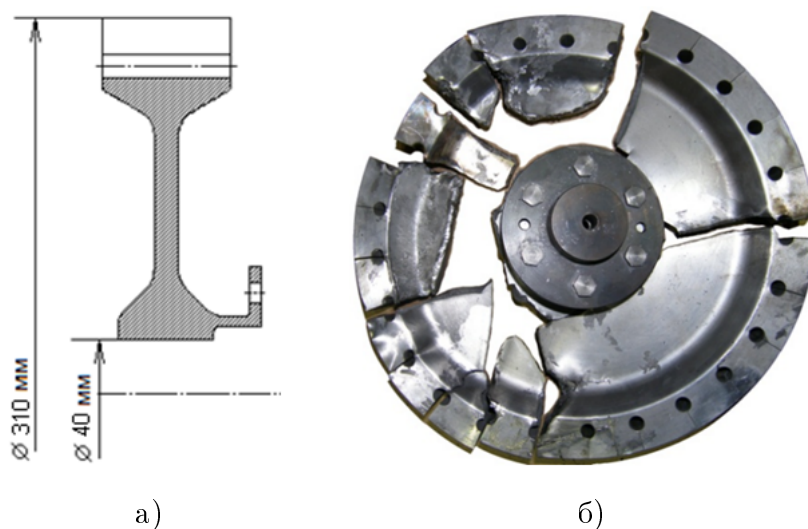
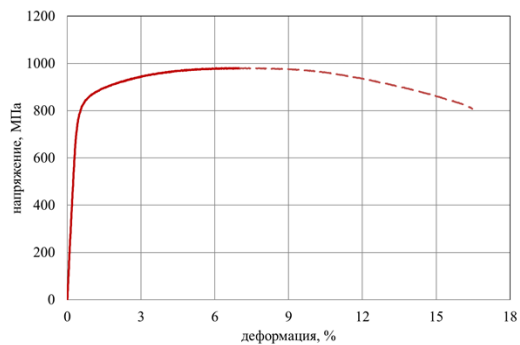


Рис. 1: Эскиз модельного диска (а) и характер его разрушения (б)

Испытания образцов на разрыв проводились в соответствии с ГОСТ 1497-84 при нормальной температуре с непрерывной записью диаграммы деформирования до момента начала образования «шейки» в образце (рисунок 2а). Построенная по средним значениям механических характеристик условная кривая деформирования представлена на рисунке 2б. Штриховой линией показан участок диаграммы растяжения после начала образования «шейки».



а) фото образца после разрыва

б) диаграмма растяжения

Рис. 2: Результаты испытаний на разрыв образца из стали ЭИ961-ш

Расчетная модель диска представляет собой сектор с углом в основании

90° (рисунок 3). По меридиональным сечениям сектора задано граничное условие в виде равенства нулю окружных перемещений. К каждому узлу расчетной модели прикладывалась центробежная сила, пропорциональная квадрату частоты вращения и текущему радиусу, $\vec{f} = \rho\omega^2\vec{r}$. Для построения функции упрочнения было выполнено перестроение условной кривой деформирования в истинную в соответствии с допущением о постоянстве объема рабочей части образца до и после пластического деформирования [7].

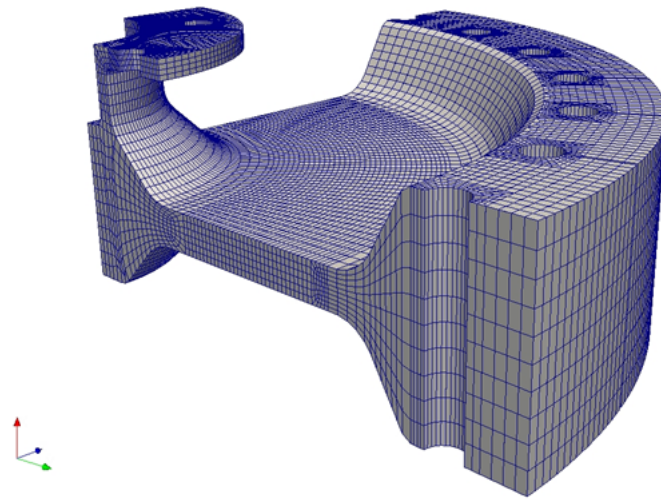


Рис. 3: КЭ сетка модельного диска

4. Особенности расчета на высокопроизводительном кластере ИММЕРС

Как показано на рисунке 3, расчетная сетка для проведения численного эксперимента состоит из большого числа элементарных ячеек. Для каждой ячейки независимо проводятся расчеты, поэтому максимальной скорости вычислений можно достичь при использовании мультипроцессорных систем. Вычислительная эффективность алгоритма расчета определяется формулой Амдала [18], однако увеличение количества процессоров влечет экспоненциальный рост энергозатрат. Использование современных суперкомпьютерных систем для задач математического моделирования сложных систем неразрывно связано с проблемой высокой энергоемкости вычислений. Энергоемкость вычислений в настоящее время не превышает 10 Гфлопс/Вт, а PUE вычислителей с воздушными системами охлаждения не менее 1,35, что при максимальной вычислительной эффективности алгоритмов расчета интенсивности вычислений приводит к необходимости обеспечивать мощность вычислительной машины на уровне 65 – 70 кВт. Учитывая, что вся потребляемая вычислительная мощность рассеивается центром обработки данных в

виде тепла, можно рассматривать такой суперкомпьютер, как источник теплового загрязнения. Поэтому поиск возможности увеличения энергетической эффективности вычислительных установок – актуальная задача, которая может быть решена как за счет использования инновационных систем охлаждения, так и за счет увеличения плотности расположения тепловыделяющих вычислительных плат.

5. Результаты расчета

Одним из характерных наблюдаемых в натуральных экспериментах явлений, возникающих непосредственно перед разрушением диска, является локализованная «утяжка» диска, являющаяся аналогом «шейки» в образце и характеризующаяся развитием нелинейной упругопластической неустойчивости. Для моделирования данного эффекта выполнено большое количество шагов нагружения (с постепенно увеличивающейся частотой вращения диска) и итераций нелинейного алгоритма (метода Ньютона-Рафсона) в рамках каждого шага. При этом ввиду высокой нелинейности задачи пришлось задействовать прямой решатель систем линейных алгебраических уравнений, который является наиболее требовательным к вычислительным ресурсам.

Результаты расчета удлинений наружного диаметра модельного диска и их сопоставление с экспериментальными данными представлены на рисунке 4. Видно, что кривые прекрасно согласуются между собой. Начиная с частоты вращения 20000 об/мин происходит существенное изменение скорости роста удлинений модельного диска, а при приближении к разрушающей частоте вращения зависимость близка к вертикальной линии. При частоте вращения $\omega = 24375$ об/мин, близкой к разрушению, максимальные пластические деформации локализуются на радиусе диска $R = 50\text{--}60$ мм с образованием «утяжки» (рисунки 5 и 6), что согласуется с зоной разрушения модельного диска.

Проведенные расчеты диска на вычислительном кластере ИММЕРС [10], показали, что при сохранении интенсивности вычислительного процесса затраты энергии снижаются более, чем на 25%. Таким образом, погружные системы ИММЕРС обеспечивают величину PUE не превышающую 1,05.

6. Заключение

В результате апробации программно-аппаратного комплекса на основе CAE Fidesys и технологий ИММЕРС была решена задача моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся модельном диске. Результаты расчетов с использованием моделей физической и геометрической нелинейностей показали отличную сходимость с экспериментальными данными.

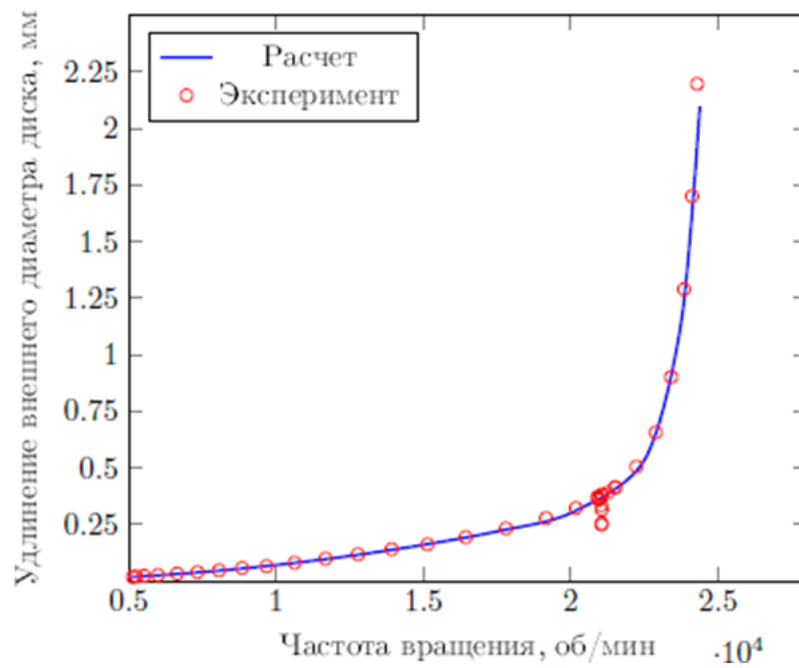


Рис. 4: Расчетная и экспериментальная кривые удлинения наружного диаметра модельного диска в зависимости от частоты вращения

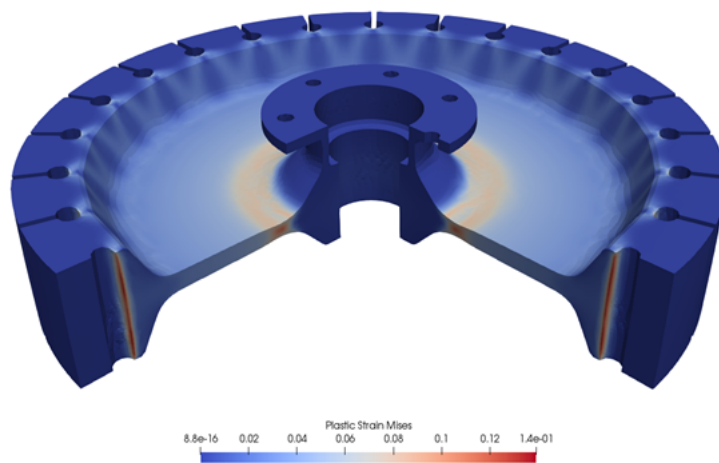


Рис. 5: Распределение пластических деформаций в диске при частоте вращения $\omega = 24375$ об/мин (размерность на шкале — отн.ед.)

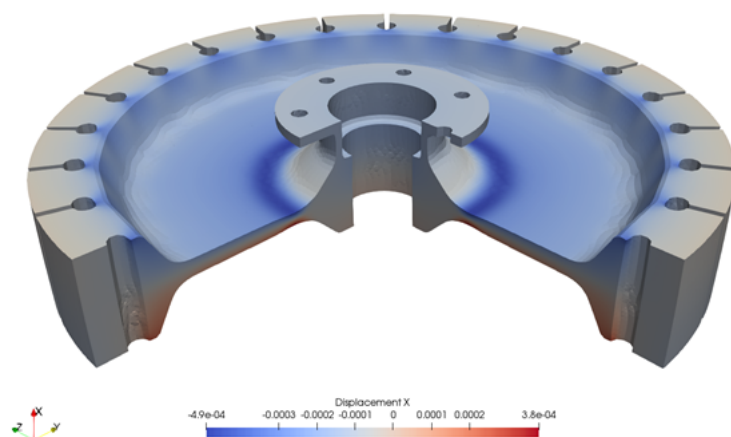


Рис. 6: Распределение осевых перемещений в модельном диске при частоте вращения $\omega = 24375$ об/мин (размерность на шкале — м)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нормы летной годности двигателей воздушных судов. АП-33, 2012 г.
2. Ю.А. Ножницкий, Ю.А. Фебина, Д.В. Шадрин, Серветник А.Н. и др. Новые возможности применения разгонных стендов для обеспечения прочностной надежности газотурбинных двигателей // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2015. №3 (14). Часть 1. С.71-86.
3. Servetnik A. Energy-based method for gas turbine engine disks burst speed calculation. 28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS2012), Brisbane, 2012 [электронный ресурс] URL: http://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2012/PAPERS/888.PDF.
4. Nozhnitsky Yu, Karimbaev K., Servetnik A. Numerical simulation of spin testing for turbo machine disks using energy-based fracture criteria. ASME TURBO EXPO, Copenhagen, 2012 [Электронный ресурс], URL http://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2012/PAPERS/340.PDF
5. Кузьмин Е.П., Серветник А.Н. Исследование поверхности нагружения материалов дисков газотурбинных двигателей при разгонных испытаниях модельных дисков // Наука и образование. 2014. №5. С.330-336. DOI: 10.7463/0514.0710005.
6. Биргер И.А., Шорр Б.Ф. Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 454 с.
7. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит.

8. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity. Vol. 7 — Springer Verlag, New York, 1998. — P. 392.
9. Система прочностного анализа Fidesys, [электронный ресурс] URL <http://www.cae-fidesys.com>
10. Высокопроизводительная вычислительная система IMMERS 6R6, [электронный ресурс] URL: <http://immers.ru/sys/immers6r6/>
11. Левин В. А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. / Под ред. В.А. Левина. — М., Физматлит, 2007. — 392 с.
12. Левин В. А., Вершинин А. В. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ Т.2 (Нелинейная вычислительная механика прочности. Цикл монографий в 5 томах под. ред. В.А. Левина). — ФИЗМАТЛИТ Москва, 2015. — С. 544.
13. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. — ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА URSS Москва, 2015. — С. 408.
14. Zingerman K. M., Vershinin A. V., Levin V. A. An approach for verification of finite-element analysis in nonlinear elasticity under large strains // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — Vol. 158. — P. 012104.
15. Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains / V. A. Levin, K. M. Zingerman, A. V. Vershinin et al. // International Journal of Solids and Structures. — 2013. — Vol. 50, no. 20-21. — P. 3119–3135.
16. Об использовании полнофункциональной САЕ Fidesys при разработке инновационных изделий ОПК / А. В. Вершинин, В. А. Левин, Е. В. Кололова и др. // Межотраслевая информационная служба. — 2013. — № 4. — С. 38–40.
17. Левин В. А., Вершинин А. В. Промышленный пакет для прочностного инженерного анализа // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань 20-24 августа 2015 г. Сборник докладов. 4480с. — Издательство Казанского (Приволжского) федерального университета Казань, 2015. — С. 2281–2283.
18. Sparsh Mittal and Jeffrey S. Vetter, 2013. A Survey of CPU-GPU Heterogeneous Computing Techniques. ACM Comput. Surv. X, Y, Article 1 (February 2015)

REFERENCES

1. (2012), "Normy letnoi godnosti dvigateley vozdukhnykh sudov. AP-33"[Airworthiness of aircraft engines. AR-33].
2. Nozhnitsky, Y.A., Fedina, Y.A., Shadrin, D.V., Servetnik A.N. (eds) (2015), "New possibilities of using spin rigs to provide gas turbine engine strength reliability *Vestnik of the Samara State Aerospace University*, Vol.14, no.3, part 1, pp. 71-87.
3. Servetnik, A.N. (2012), "Energy-based method for gas turbine engine disk burst speed calculation *28th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences 2012, ICAS 2012*, Brisbane, Australia, 23-28 September 2012, pp. 2443-2448.
4. Nozhnitsky, Yu.A., Karimbaev, K.D. and Servetnik, A.N. (2012), "Numerical Simulation of Spin Testing for Turbo Machine Disks Using Energy-based Fracture Criteria *Proceedings of the ASME Turbo Expo. 2012*, Copenhagen, Denmark, 11-15 June 2012, Vol.7, pp. 35-40.
5. Kuzmin, E.P. and Servetnik, A.N. (2014), "Yield surface investigation of alloys during model disk spin tests *Science and Education: Scientific Publication*, no.5, pp. 330-339.
6. Birger, I.A., Shorr, B.F. (eds) (1975), *Termoprochnost detaley mashin* [Thermal strength of machine parts], Mashinostroenie, Moscow, Russia.
7. Nadai, A. (1963), *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. 2, McGraw-Hill, New York, P. 705.
8. Simo, J. C. and Hughes, T. J. R. (1998), *Computational Inelasticity*, Vol. 7, Springer Verlag, New York, P. 392.
9. The Fidesys system for strength analysis. Available at: <http://www.cae-fidesys.com>.
10. High-performance computing system IMMERS 6R6. Available at: <http://www.immers.ru/sys/immers6r6>
11. Levin, V.A., Kalinin, V.V., Zingerman, K.M. and Vershinin, A.V. (2007), *Growth of defects under finite strains. Computer simulation and physical modelling. Ed. by V.A. Levin*. Fizmatlit, Moscow.
12. Levin, V.A. and Vershinin, A.V. (2015), *Numerical methods. Parallel computing. Vol.2 (Nonlinear computational strength mechanics. Series of monographs. Ed. by V.A. Levin)*. Fizmatlit, Moscow.
13. Morozov, E.M., Levin, V.A. and Vershinin, A.V. (2015), *Strength analysis. Fidesys in the hands of an engineer*. URSS, Moscow.

14. Zingerman, K.M., Vershinin, A.V. & Levin V.A. (2016), "An approach for verification of finite-element analysis in nonlinear elasticity under large strains", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, Vol. 158, no. 012104
15. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V., Freiman, E.I. & Yangirova A.V. (2013), "Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 10, no. 50(20-21), pp. 3119-3135, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.019
16. Vershinin, A.V., Levin, V.A., Komolova, E.V. (eds) (2013), "Use of fully functional CAE Fidesys for the development of innovative parts for defence industry *Mezhotraslevaya informacionnaya sluzhba*. No. 4. pp. 38-40.
17. Levin, V.A. and Vershinin, A.V. (2015), "Industrial package for engineering strength analysis *Trudy XI Vserossiyskogo s'yezda po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki (Proc. XI All-Russian Congress on theoretical and applied mechanics)*, Kazan, 2015. P. 2281–2283.
18. Sparsh, M. and Jeffrey, S. V. 2015 "A Survey of CPU-GPU Heterogeneous Computing Techniques *ACM Comput. Surv.* Vol. 47, no. 4, Article No. 69, doi: 10.1145/2788396.

Институт программных систем имени А. К. Айламазяна РАН

ООО ИММЕРС

ООО Фидесис

Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова

получено 22.05.2017

принято в печать 14.09.2017