ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.3

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СУММЫ И ГАУССОВА ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ [1]

В. Н. Чубариков (г. Москва)

Аннотация

В работе изложены основы теории арифметических сумм и осцилляторных интегралов от многочленов Бернулли, аргумент в которых является вещественной функцией с определенными дифференциальными свойствами.

Проводится аналогия с методом тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

Во введении приведены задачи теории чисел и математического анализа, которые имеют дело с изучением указанных выше сумм и интегралов.

Исследование арифметических сумм существенно использует функциональное уравнение типа теоремы Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера.

Получены оценки индивидуальных арифметических сумм, найдены показатели сходимости их средних значений. В частности, решаются аналоги проблем Хуа Ло-кена для одномерных сумм и интегралов.

Ключевые слова: арифметические суммы, осцилляторные интегралы, многочлены Бернулли, теорема Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера, функциональное уравнение, показатели сходимости средних значений арифметических сумм и осцилляторных интегралов, метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова, проблемы Хуа Ло-кена.

Библиография: 21 название.

THE ARITHMETIC SUM AND GAUSSIAN MULTIPLICATION THEOREM [2]

V. N. Chubarikov (Moscow)

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № НК-13-01-00835
[2] This work was financially supported by RFBR, grant № НК-13-01-00835

Abstract

The paper presents the fundamentals of the theory of arithmetic sums and oscillatory integrals of polynomials Bernoulli, an argument that is the real function of a certain differential properties.

Drawing an analogy with the method of trigonometric sums I. M. Vinogradov.

The introduction listed problems in number theory and mathematical analysis, which deal the study of the above mentioned sums and integrals.

Research arithmetic sums essentially uses a functional equation type Gauss theorem for multiplication of the Euler gamma function.

Estimations of the individual arithmetic the amounts found indicators of convergence of their averages. In particular, the problems are solved analogues Hua Loo-Keng for one-dimensional integrals and sums.

Keywords: arithmetic sum oscillatory integrals, polynomials Bernoulli, Gauss theorem for multiplication of the Euler gamma function, functional equation, the average values of the convergence exponent arithmetic sums and oscillatory integrals, Vinogradov's method of trigonometric sums, problems Hua Loo-Keng.

Bibliography: 21 titles.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются арифметические суммы вида

$$\sum_{\bar{x}\in\Omega} f(\bar{x})g(P(\bar{x})),$$

где Ω — дискретное множество в $\mathbf{R}^n$, $f(\bar{x}), P(\bar{x})$ — функции действительного аргумента и $g(x)$ — периодическая функция с периодом 1; и осцилляторные интегралы вида

$$\int\underset{\Pi}{\dots}\int f(\bar{x})g(P(\bar{x}))\,d\bar{x},$$

где $\bar{x}\in\Pi\subset\mathbf{R}^n$.

Типичным примером осцилляторного интеграла является преобразование Фурье

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx.$$

Обсудим идеи и задачи теории чисел и анализа, которые дают возможность исследовать арифметические суммы и осцилляторные интегралы.

1.1. Теорема Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера

В 1812 г. К. Ф. Гаусс доказал, что при любом $x > 0$ и любом натуральном n справедлива формула

$$\Gamma(x) = n^{x-1/2}(2\pi)^{-(n-1)/2} \prod_{s=0}^{n-1} \Gamma((x+s)/n).$$

Ранее при $x = 1$ эта формула была найдена Л. Эйлером. Подобный вид имеет формула Л. Эйлера из элементарной тригонометрии

$$\sin x = 2^{n-1} \cdot \prod_{s=0}^{n-1} \sin\left(\frac{x+s\pi}{n}\right)$$

1.2. Функциональное уравнение

Теоремы умножения приводят к функциональному уравнению вида

$$F(nx) = n^{s-1} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

При $s = 1$ и нецелых значениях x этому уравнению удовлетворяют следующие функции

$$F(x) = \log\left(2|\sin \pi x|\right) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi s x}{s},$$

$$F(x) = \rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi s x}{\pi s}.$$

Для любого натурального s многочлены Бернулли удовлетворяют функциональному уравнению вида

$$B_s(nx) = n^{s-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_s\left(x + \frac{k}{n}\right),$$

где многочлены $B_s(x)$ определяются производящей функцией

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s(x)t^s}{s!}, \quad B_s(x) = \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} B_k x^{s-t}, \quad B_0(x) = 1,$$

причем числа Бернулли B_n находятся из соотношений

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n t^n}{n!}, \quad \sum_{s=1}^{n+1} \binom{n+1}{s} B_{n+1-s} = 0, \quad B_0 = 1.$$

1.3. Число классов квадратичных форм

Пусть q — простое число, $q \equiv 3 \pmod 4$. Тогда

$$H = \sum_{n=1}^{q-1} \rho\left(\frac{n^2}{q}\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{q-1}\left(1+\left(\frac{m}{q}\right)\right)\rho\left(\frac{m}{q}\right) = -\frac{1}{2q}\sum_{m=1}^{q-1} m\left(\frac{m}{q}\right),$$

и число $2H$ будет нечетным. Действительно,

$$2Hq = \sum_N N - \sum_R R,$$

где R и N пробегают соответственно последовательности квадратичных вычетов и невычетов из приведенной системы вычетов по модулю q. Следовательно,

$$2Hq \equiv \sum_N N + \sum_R R = \frac{q(q-1)}{2} \equiv 1 \pmod 2.$$

Пусть, теперь, простое число q сравнимо с 1 по модулю 4. Тогда

$$H = \sum_{n=1}^{q-1} \log\left(2\sin\frac{\pi n^2}{q}\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{q-1}\left(\frac{m}{q}\right)\log\left(2\sin\frac{\pi m}{q}\right) = \frac{1}{2}\log Q,$$

где

$$Q = \frac{\prod\limits_N \sin \pi N/q}{\prod\limits_R \sin \pi R/q}$$

Дирихле доказал, что $Q \neq 1$.

1.4. Нули дзета-функции Римана

Для всех $x \in [0,1]$ определим функцию

$$G(x) = \sum_{q=1}^{N} \rho(qx) M(N/q),$$

где $M(X) = \sum_{n\le X}\mu(n)$ и $\mu(n)$ — функция Мёбиуса.

Э. Ландау доказал, что гипотеза Римана справедлива тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ имеем оценку

$$I = I(N) = \int_0^1 G^2(x)\,dx \ll N^{1+\varepsilon}.$$

Н. П. Романов заметил, что квазиримановa гипотеза об отсутствии нулей $\zeta(s)$ в области $\Re s > \Theta$ эквивалентна оценке $I(N) \ll N^{2\Theta+\varepsilon}$. В частности, отсутствие нулей $\zeta(s)$ на единичной прямой следует из оценки $I(N) = o(N^2)$.

Дадим вариант метода Адамара доказательства отсутствия нулей дзета-функции Римана на единичной прямой $\Re s = \sigma = 1$ (по диссертации О. В. Попова).

От противного: пусть $s_0 = 1 + it_0$ — нуль $\zeta(s), t_0 \neq 0$. Тогда при $\sigma \to 1 + 0$ имеем

$$\frac{\zeta'(\sigma + it_0)}{\zeta(\sigma + it_0)} = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1), -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1).$$

Следовательно,

$$\varphi_1(\sigma) = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \Re\frac{\zeta'(\sigma + it_0)}{\zeta(\sigma + it_0)} = O(1)$$

аналитическая функция при $\sigma > 1$ в некоторой окрестности точки $\sigma = 1$.

Для $\sigma > 1$ определим действительную функцию

$$\varphi_2(\sigma) = -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + \Re\frac{\zeta'(\sigma + 2it_0)}{\zeta(\sigma + 2it_0)}.$$

При $\sigma > 1$ находим

$$\varphi_2(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}(1 - \cos(2t_0 \log n)) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}(2\sin^2(t_0 \log n)) =$$

$$= 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}(1 - \cos(t_0 \log n))(1 + \cos(t_0 \log n)) \leq$$

$$\leq 4\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}(1 + \cos(t_0 \log n)) = -4\left(\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + \Re\frac{\zeta'(\sigma + it_0)}{\zeta(\sigma + it_0)}\right) = 4\varphi_1(\sigma).$$

Таким образом функция $\varphi_2(\sigma)$ является аналитической при $\sigma > 1$ в некоторой окрестности точки $\sigma = 1$. Это означает, что простой полюс с вычетом, равным 1, $\zeta(s)$ в точке $s = 1$ уничтожается полюсом $\zeta(s+2it_0)$ в точке $s = 1$. Но для $s = 1$ последняя функция не имеет полюса. Это противоречие доказывает, что на прямой $\Re s = 1$ дзета-функция Римана не имеет нулей. Неравенства $0 \leq \varphi_2(\sigma) \leq 4\varphi_1(\sigma)$ дают возможность получить современную границу нулей $\zeta(s)$.

1.5. Целые точки в круге и под гиперболой

Точка (x, y) с целыми координатами называется целой точкой на плоскости xOy. Число целых точек с положительными координатами под равнобочной гиперболой $xy = N$ обозначим символом $L(N)$.

Из геометрических соображений Л. Дирихле вывел

$$L(N) = \sum_{n \leq \sqrt{N}} \left[\frac{N}{n}\right] - [\sqrt{N}]^2.$$

Далее, используя формулу Эйлера суммирования значений функции по целым точкам, найдем

$$L(N) = N(\ln N + 2\gamma - 1) + \Delta_H(N) + O(1), \Delta_H(N) = 2\sum_{n \leq \sqrt{N}} \rho(N/n).$$

Аналогично для числа $K(R)$ целых точек в круге $x^2+y^2\le R^2$ имеем

$$K(R)=1+4[R]+8\sum_{0<x\le R/\sqrt{2}}[\sqrt{R^2-x^2}]-4[R/\sqrt{2}]^2=$$

$$=\pi R^2+\Delta_K(R)+O(1),\Delta_K(R)=8\sum_{0<x\le R/\sqrt{2}}\rho(\sqrt{R^2-x^2}).$$

И. М. Виноградов [1], используя элементарный метод, доказал, что если на отрезке $[Q,R]$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{A}\le|f''(x)|\le\frac{k}{A},A>2,k\ge1,$$

то имеем

$$\sum_{Q<x\le R}\rho(f(x))\le(2k^2(R-Q)\ln A+8kA)A^{-1/3}.$$

Отсюда находим $\Delta_H(N)\ll N^{1/3}\ln^2 N,\Delta_K(R)\ll R^{2/3}\ln R$.

1.6. Квадратурные формулы

Пусть $f(x)$ имеет неубывающую неотрицательную производную на отрезке $[0,1]$. Тогда

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}(f(1)-f(0))+R_n,$$

где

$$R_n=\frac{1}{n}\int\limits_0^1\rho(nx)f'(x)\,dx,\quad|R_n|\le\frac{f'(1)}{8n^2}.$$

Действительно, преобразуем R_n. Находим

$$nR_n=\int\limits_0^1\rho(nx)f'(x)\,dx=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))-n\int\limits_0^1 x\,df(x)+\int\limits_0^1[nx]df(x)=$$

$$=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))-nf(1)+n\int\limits_0^1 f(x)\,dx+\sum_{k=1}^n k\int\limits_{(k-1)/n}^{k/n}df(x)=$$

$$=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))-nf(1)+\int\limits_0^1 f(x)\,dx+\sum_{k=1}^n k(f(k/n)-f((k-1)/n))=$$

$$=\int\limits_0^1 f(x)\,dx-\sum_{k=1}^n f(k/n)-\frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Далее применим вторую теорему о среднем. Получим $|R_n|\le\frac{f'(1)}{8n^2}$.

Перейдем к изложению результатов работы.

2. Осцилляторные интегралы

Здесь мы находим оценки интегралов от “зубчатой” функции

$$\rho(x) = 0,5 - \{x\},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Рассмотрим интеграл от вещественной функцией $f(x)$ вида

$$I = I(f) = \int\limits_a^b \rho(f(x))\,dx.$$

Предположим сначала, что $f(x)$ имеет монотонную производную на отрезке $[a,b]$ и при некоторой постоянной $A > 0$ на всем отрезке $[a,b]$ справедливо неравенство $f'(x) \geq A$. Тогда по второй теореме о среднем значении интеграла находим $|I| \leq (8A)^{-1}$.

Далее, пусть для любого x из отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство $f''(x) \geq B > 0$. Тогда, применяя предыдущую оценку I, получим $|I| \leq \sqrt{2}B^{-1/2}$.

Автор поставил задачу о выводе подобных оценок для функций $f(x)$, имеющих производные более высокого порядка. Следующее утверждение по оценкам осцилляторных интегралов принадлежат М. Ш. Шихсадилову.

Теорема 1. *Пусть при некотором $A > 0$ и некотором натуральном $n > 1$ для всех x из отрезка $[0,1]$ имеем $|f^{(n)}(x)| \geq A$. Тогда справедлива оценка*

$$|I| = \left| \int\limits_0^1 \rho(f(x))\,dx \right| \leq \min\{1; 4nA^{-1/n}\}.$$

В основе ее доказательства лежит следующий результат [4, 6].

Лемма 1. *Пусть при $0 < x < 1$ вещественная функция $f(x)$ имеет производную n-го порядка ($n > 1$), причем при некотором $A > 0$ для всех x из отрезка $[0,1]$ выполняется неравенство*

$$|f^{(n)}(x)| \geq A.$$

Пусть, также, E обозначает множества точек из отрезка $[0,1]$, для которых $|f'(x)| \leq B$. Тогда для меры $\mu = \mu(E)$ этого множества справедлива оценка

$$\mu \leq (2n-2)(BA^{-1})^{1/(n-1)}.$$

Покажем неулучшаемость оценки теоремы 1 по параметрам A и n.

Лемма 2. *Пусть вещественная функция $f(x) = \alpha x^n, \alpha > 1$, задана на отрезке $[0,1]$. Тогда для интеграла I справедлива оценка снизу*

$$|I| = \left| \int\limits_0^1 \rho(\alpha x^n))\,dx \right| \geq \frac{1}{6}\alpha^{-1/n}.$$

Имеем $A = n!\alpha$ и для любого x из отрезка $[0,1]$ находим $f^{(n)}(x) = A$. Далее получаем

$$I = \int\limits_0^1 \rho(\alpha x^n)\,dx = \frac{1}{n}\alpha^{-1/n}\int\limits_0^\alpha \rho(y)\,\frac{dy}{y^{1-1/n}}.$$

Оценим снизу величину I. Представляя I в виде знакочередующегося ряда, имеем неравенство

$$I \geq \frac{1}{n}\alpha^{-1/n}\int\limits_0^1 \frac{0,5-y}{y^{1-1/n}}\,dy = \frac{n}{2} - \frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{6}.$$

Следовательно,

$$|I| \geq \frac{1}{6}\alpha^{-1/n}.$$

□

Теорема 2. *Пусть $n \geq 1, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — вещественные числа, и пусть*

$$f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \beta_r(x) = f^{(r)}(x)/r!, \quad r = 1, \dots, n,$$

$$H = H(\bar\alpha) = H(\alpha_n, \dots, \alpha_1, \alpha_0) = \min_{a\leq x\leq b}\max_{1\leq r\leq n}|\beta_r(x)|^{1/r},$$

$$J = \int\limits_a^b \rho(f(x))\,dx.$$

Тогда для интеграла J справедлива оценка

$$|J| \leq \min\left(b-a; 4en^2H^{-1}\right).$$

Доказательство. По своей схеме оно близко к доказательству утверждений из [4, 6, 16, 18].

Имеем $\beta_n(x) = \alpha_n$. Если $|\alpha_n| \geq H^n$, то на всем отрезке $[a,b]$ справедливо неравенство $|f^{(n)}(x)| \geq n!H^n$ и по теореме 1 находим

$$|J| \leq \min\{b-a; 4n(n!)^{-1/n}H^{-1}\} \leq \min\{b-a; 4eH^{-1}\}.$$

Предположим, что $|\alpha_n| < H^n$. Тогда рассмотрим $\beta_{n-1}(x) = n\alpha_n x + \alpha_{n-1}$.

Если для всех x из $[a,b]$ имеем, что $|\beta_{n-1}(x)| \geq H^{n-1}$, т.е. $|f^{(n-1)}(x)| \geq (n-1)!H^{n-1}$, то по теореме 1 получаем $|J| \leq \min\{b-a; 4eH^{-1}\}$.

Если же найдутся точки x из $[a,b]$, для которых $|\beta_{n-1}(x)| < H^{n-1}$, то они образуют один интервал, а оставшееся множество образует на более двух промежутков Δ, на каждом из которых имеет место искомая оценка

$$\left|\int\limits_\Delta \rho(f(x))\,dx\right| \leq \min\left(|\Delta|; 4eH^{-1}\right).$$

Далее, подобным образом рассуждаем с коэффициентами $\beta_{n-2}(x), \dots, \beta_1(x)$. В результате этой процедуры получим не более $2+3+\dots+n < n^2$ отрезков Δ таких,что для любого Δ найдется r с условием $|\beta_r(x)| \geq H^r$.

Покажем, что для любой точки $\gamma \in (a, b)$ найдется отрезок Δ полученный в результате предыдущей процедуры, которому точка γ принадлежит.

Из определения величины H имеем $H \leq \max\limits_{1\leq r\leq n} |\beta_r(\gamma)|^{1/r}$, то есть найдется $s, 1 \leq s \leq n$, такое, что $|\beta_s(\gamma)| \geq H^s$. Тем самым точка γ будет принадлежать одному из отрезков Δ, построенных на s-м шаге рассматриваемой выше процедуры.

Таким образом

$$|J| \leq \sum_{\Delta\in[a,b]} \left| \int\limits_{\Delta} \rho(f(x))\, dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\Delta\in[a,b]} \min\left(|\Delta|; 4eH^{-1}\right) \leq \min\left(b-a; 4en^2H^{-1}\right).$$

□

Рассмотрим *среднее значение* $\theta = \theta(k;\rho)$ *осцилляторного интеграла от* ρ*-функции с многочленом в аргументе,* имеющее вид

$$\theta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} \left| \int\limits_{0}^{1} \rho(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)\, dx \right|^{2k} d\alpha_n \ldots d\alpha_1 d\alpha_0.$$

Из теоремы 2 следует теорема 3 о показателе сходимости интеграла $\theta(k;\rho)$.

Теорема 3. *Интеграл* $\theta(k;\rho)$ *сходится при* $2k > \frac{n^2+n}{2} + 1$ *и расходится при* $2k \leq \frac{n^2+n}{2} + 1$.

Для показателя сходимости среднего значения интеграла от ρ-функции с “выщербленным” многочленом $f(x)$ в аргументе справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $r, \ldots, m, n \in \mathbf{N}, 1 \leq r < \cdots < m < n,\ r + \cdots + m + n < (n^2+n)/2, f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_m x^m \cdots + \alpha_r x^r + \alpha_0$, *и пусть* $\vartheta = \vartheta(k;\rho;f) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} \left| \int\limits_{0}^{1} \rho(f(x))\, dx \right|^{2k} d\alpha_n d\alpha_m \ldots d\alpha_r d\alpha_0.$$

Тогда интеграл ϑ *сходится при* $2k > n+m+\cdots+r$ *и расходится при* $2k \leq n+m+\cdots+r$.

Приведем еще две оценки осцилляторных интегралов. Первая оценка является аналогом виноградовской оценки тригонометрического интеграла, а вторая — аналогом оценки кратного тригонометрического интеграла, найденной автором.

Теорема 5. *Пусть* $f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ *— многочлен с действительными коэффициентами,* $\alpha = \max\{|\alpha_n|, \ldots, |\alpha_1|\}$. *Тогда для интеграла*

$$I_1 = \int\limits_{0}^{1} \rho(f(x))\, dx$$

имеем

$$|I_1| \leq \min\{1; 8e\alpha^{-1/n}\}.$$

Теорема 6. *Пусть α — наибольший из модулей коэффициентов $\alpha(t_1, \ldots \ldots, t_r)$ при $t_1 + \cdots + t_r \geq 1$ многочлена*

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{0 \leq t_1, \ldots, t_r \leq n} \alpha(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}.$$

Тогда для интеграла

$$I_r = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \rho(F(x_1, \ldots, x_r))\, dx_1 \ldots dx_r$$

имеем

$$|I_r| \leq \min\{1; (8e)^r \alpha^{-1/n} \ln^{r-1}(\alpha + 2)\}.$$

3. Полные рациональные арифметические суммы

Далее изучим суммы с многочленом Бернулли первой степени

$$\rho(x) = 1/2 - \{x\},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x. Сначала рассмотрим полные рациональные арифметические суммы вида

$$S = S\left(\frac{f(x)}{q}\right) = \sum_{x=1}^{q} \rho\left(\frac{f(x)}{q}\right),$$

где $q > 1$ — целое число, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами и $(a_n, \ldots, a_1, q) = 1$.

Сформулируем аналог оценки полной рациональной тригонометрической суммы, найденный Хуа Ло-кеном.

Теорема 7. *Справедлива следующая оценка*

$$|S| << q^{1-1/n}.$$

Для оценки модуля таких сумм весьма полезной является формула умножения для многочленов Бернулли первой степени.

Лемма 3. *Пусть n — натуральное число, $(a, n) = 1$. Тогда для любого вещественного числа x имеем*

$$\rho(nx) = \rho(x) + \rho\left(x + \frac{a}{n}\right) + \cdots + \rho\left(x + \frac{a(n-1)}{n}\right).$$

Доказательство. Левая и правая части равенства имеют период, равный $1/n$. Действительно,

$$\rho\left(n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) = \rho(nx + 1) = \rho(nx);$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{am}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m}{n}\right),$$

поскольку am пробегает полную систему вычетов по модулю n при $(a, n) = 1$, если m пробегает полную систему вычетов по модулю n; далее

$$\sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{1}{n} + \frac{m}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m+1}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m}{n}\right).$$

Поэтому достаточно доказать равенство при $0 \le x < 1/n$. Имеем

$$\sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - x - \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{1}{2} - x\right) n - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m}{n} =$$

$$\left(\frac{1}{2} - x\right) n - \frac{n-1}{2} = \frac{1}{2} - nx = \rho(nx).$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $(q_1, q_2) = 1, f(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0 = g(x) + a_0$ — *многочлены с целыми коэффициентами. Тогда справедливо равенство*

$$S\left(\frac{f(x)}{q_1 q_2}\right) = S\left(\frac{q_2^{-1} g(q_2 x_1)}{q_1} + \frac{q_1^{-1} g(q_1 x_2)}{q_2} + \frac{a_0}{q_1 q_2}\right), \tag{1}$$

где x, x_1, x_2 *пробегают соответственно полные системы вычетов по модулям* $q_1 q_2$, q_1, q_2.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 пробегают независимо соответственно полные системы вычетов по модулям q_1 и q_2. Тогда x вида

$$x \equiv q_2 x_1 + q_1 x_2 \pmod{q_1 q_2}$$

пробегает полную систему вычетов по модулю $q_1 q_2$ и наоборот.

Отсюда находим

$$g(x) \equiv g(q_2 x_1) + g(q_1 x_2) \pmod{q_1 q_2},$$

что немедленно приводит к искомому равенству. □

Лемма 5. *Пусть* p — *простое число,* $g(x)$ — *многочлен с целыми коэффициентами,* a — *корень кратности* m *сравнения* $g(x) \equiv 0 \pmod p$, *и пусть* u — *наибольшая степень числа* p, *делящая все коэффициенты многочлена* $h(x) = g(px+a)$. *Тогда число корней сравнения*

$$p^{-u} h(x) \equiv 0 \pmod p$$

с учетом их кратностей не превосходит m.

Доказательство. См., например, в [18], с. 55, лемма 2. □

Лемма 6. *Пусть p — простое число, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \dots, a_1, p) = 1$, и пусть u — наивысшая степень числа p, делящая все коэффициенты многочлена $g(x) = f(\lambda + px) - f(\lambda)$. Тогда имеем $1 \leq u \leq n$.*

Доказательство. См., например, [18], с. 56, лемма 3. □

Пусть p — простое число, $l \geq 2$ — натуральное число,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad (a_n, \dots, a_1, p) = 1.$$

Рассмотрим сначала случай, когда p превосходит степень многочлена f, то есть $p > n$. Представим сумму $S\left(\frac{f(x)}{p^l}\right)$ в виде

$$S\left(\frac{f(x)}{p^l}\right) = \sum_{\xi=1}^{p} S_\xi, \quad S_\xi = \sum_{\substack{x=1 \\ x \equiv \xi \pmod p}}^{p^l} \rho\left(\frac{f(x)}{p^l}\right). \tag{2}$$

Имеем следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $f'(\xi) \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда $S_\xi = \rho\left(\frac{f(\xi)}{p}\right)$.*

Доказательство. Имеем

$$S_\xi = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod p}}^{p^{l-1}} \sum_{z=0}^{p-1} \rho\left(\frac{f(y + p^{l-1}z)}{p^l}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod p}}^{p^{l-1}} \sum_{z=0}^{p-1} \rho\left(\frac{f(y)}{p^l} + \frac{f'(y)z}{p}\right). \tag{3}$$

Воспользуемся леммой 3. Найдем

$$S_\xi = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod p}}^{p^{l-1}} \rho\left(\frac{f(y)}{p^{l-1}}\right).$$

Повторяя эту процедуру $l - 2$ раза, получим утверждение леммы 7. □

Лемма 8. *Пусть $f'(\xi) \equiv 0 \pmod p$. Тогда*

$$S_\xi = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv \xi \pmod p}}^{p^{l-1}} \rho\left(\frac{f(y)}{p^l}\right) p = p \sum_{y=1}^{p^{l-2}} \rho\left(\frac{f(\xi + py)}{p^l}\right).$$

Доказательство. Из равенства (3) получим утверждение леммы 7. □

Теорема 8. *Пусть $n \geq 2$ — целое число, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_n, \dots, a_1, p) = 1, p > n$ — простое число и l — натуральное число, и пусть j — наименьшая длина цепочки показателей $(u_1, u_2, \dots)$. Тогда, если $u_1 + \dots + u_j \geq l, u_1 + \dots + u_j + u_{j-1} = l - 1$ то имеем оценку*

$$\left| S\left(\frac{f(x)}{p^l}\right) \right| \leq n^2 p^{l-j-1/2};$$

если же $u_1 + \dots + u_j \geq l, u_1 + \dots + u_j + u_{j-1} < l - 1$, то имеем

$$\left| S\left(\frac{f(x)}{p^l}\right) \right| \leq n p^{l-j}.$$

Пусть кратность корня ξ сравнения $f'(x) \equiv 0 \pmod p$ равна $n > m \geq 1$ и u_1 — наивысшая степень числа p, делящая все коэффициенты многочлена

$$f(\xi + py) - f(\xi) = p^{u_1} f_1(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (py)^k.$$

Из леммы 6 следует, что $2 \leq u_1 \leq n$.

При $l \leq u_1$ по лемме 8 получим

$$S_\xi = p^{l-1} \rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l}\right). \tag{4}$$

Далее, пользуясь леммой 8, при $l > u_1$ находим

$$S_\xi = p \sum_{y=1}^{p^{l-2}} \rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(y)}{p^{l-u_1}}\right).$$

Представим y в виде $y = z + p^{l-u_1} t$, где $1 \leq z \leq p^{l-u_1}, 0 \leq t \leq p^{u_1-2} - 1$. Тогда сумма S_ξ примет вид

$$S_\xi = p^{u_1-1} \sum_{z=1}^{p^{l-u_1}} \rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(z)}{p^{l-u_1}}\right).$$

При $l > u_1$ преобразуем сумму S_ξ, если $f'(\xi) \equiv 0 \pmod p$. Имеем

$$S_\xi = p^{u_1-1} \sum_{\xi_1=1}^{p} S_{\xi,\xi_1}, \quad S_{\xi,\xi_1} = \sum_{\substack{z=1 \\ z \equiv \xi_1 \pmod p}}^{p^{l-u_1}} \rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(z)}{p^{l-u_1}}\right).$$

Пусть сначала $f_1'(\xi_1) \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда аналогично предыдущему получим

$$S_{\xi,\xi_1} = \rho\left(\frac{f(\xi)}{p^{u_1-1}} + \frac{f_1(\xi_1)}{p}\right).$$

Пусть теперь $f_1'(\xi_1) \equiv 0 \pmod p$, кратность корня ξ_1 равна m_1 и p^{u_2} — наивысшая степень числа p, делящая все коэффициенты многочлена

$$f_1(pt + \xi_1) - f_1(\xi_1) = p^{u_2} f_2(t).$$

Из лемм 7 и 8 имеем $2 \leq u_2 \leq u_1 \leq n, m_2 \leq m_1$.

При $l \leq u_1 + u_2$ найдем

$$S_{\xi,\xi_1} = p^{u_1-1} \sum_{t=1}^{p^{l-u_1-1}} \rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l}\right) = p^{l-2}\rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l}\right).$$

При $l > u_1 + u_2$ по лемме 8 получим

$$S_{\xi,\xi_1} = \sum_{\substack{z=1\\ z\equiv\xi_1 \pmod p}}^{p^{l-u_1}} \rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(z)}{p^{l-u_1}}\right) =$$

$$= p\sum_{t=1}^{p^{l-u_1-2}} \rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{l-u_1}} + \frac{f_2(t)}{p^{l-u_1-u_2}}\right) =$$

$$= p^{u_2-1}\sum_{t=1}^{p^{l-u_1-u_2}} \rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{l-u_1}} + \frac{f_2(t)}{p^{l-u_1-u_2}}\right).$$

Продолжая предыдущие рассмотрения, получим наборы корней сравнений $(\xi, \xi_1, \ldots)$ и отвечающий каждому из этих наборов единственный набор показателей $(u_1, u_2, \ldots, u_t)$, где величина $t = t(\xi, \xi_1, \ldots)$ определяется с помощью соотношений

$$u_1 + \cdots + u_t \geq l > u_1 + \cdots + u_{t-1},$$

причем из леммы 5 имеем, что количество наборов показателей $(u_1, \ldots, u_t)$ не превосходит степени n многочлена $f(x)$ и справедливы неравенства

$$n \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_t \geq 2.$$

Из этих неравенств имеем $t \geq l/n$.

Собирая вместе полученные результаты, находим

$$S\left(\frac{f(x)}{p^l}\right) = \sum_{(\xi,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_t)} \left(\sum_{s=0}^{t-1} p^{u_1+\cdots+u_s-s} \sum_{\substack{y=1\\ f_s'(y)\not\equiv 0 \pmod p}}^{p^{l-u_1-\cdots-u_s}} 1\times\right.$$

$$\times\rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{l-u_1}} + \cdots + \frac{f_{s-1}(\xi_{s-1})}{p^{l-u_1-\cdots-u_{s-1}}} + \frac{f_s(y)}{p^{l-u_1-\cdots-u_s}}\right) +$$

$$\left. + p^{l-t}\rho\left(\frac{f(\xi)}{p^{u_1+\cdots+u_t-1}} + \frac{f_1(\xi_1)}{p^{u_2+\cdots+u_t-1}} + \cdots + \frac{f_t(\xi_t)}{p}\right)\right).$$

Отсюда, используя лемму 7, получим

$$S\left(\frac{f(x)}{p^l}\right) = \sum_{(\xi,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_t)} \left(\sum_{s=0}^{t-1} p^{u_1+\cdots+u_s-s} \sum_{\substack{y=1\\ f_s'(y)\not\equiv 0 \pmod p}}^{p} 1\times\right.$$

$$\times\rho\left(\frac{f(\xi)}{p^l}+\frac{f_1(\xi_1)}{p^{l-u_1}}+\dots+\frac{f_{s-1}(\xi_{s-1})}{p^{l-u_1-\dots-u_{s-1}}}+\frac{f_s(y)}{p}\right)+$$
$$+\,p^{l-t}\rho\left(\frac{f(\xi)}{p^{u_1+\dots+u_t-1}}+\frac{f_1(\xi_1)}{p^{u_2+\dots+u_t-1}}+\dots+\frac{f_t(\xi_t)}{p}\right)\Bigg).$$

Следовательно,

$$\left|S\left(\frac{f(x)}{p^l}\right)\right|\le\sum_{(\xi,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_t)}\left(\sum_{s=0}^{t-1}p^{u_1+\dots+u_s-s}(n-1)(\sqrt{p}\ln p+1)+0,5p^{l-t}\right)\le$$
$$\le\sum_{(\xi,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_t)}\left(\sum_{s=0}^{t-1}p^{l-t-2s}(n-1)(\sqrt{p}\ln p+1)+0,5p^{l-t}\right)\le$$
$$\le(n-1)^2p^{l-\frac{l}{n}}.$$

□

Пусть $n\ge 2, f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, p — простое число и $(a_n,\dots,a_1,p)=1$. Назовем *средним значением* $\sigma_p=\sigma_p(k;\rho;f)$ *полной рациональной арифметической суммы*

$$S\left(\frac{f(x)}{p^s}\right)=\sum_{x=1}^{p^s}\rho\left(\frac{f(x)}{p^s}\right)$$

выражение вида

$$\sigma_p=1+\sum_{s=1}^{+\infty}A(p^s),\quad A(p^s)=\sum_{\substack{a_n=0\\(a_n,\dots,a_1,p)=1}}^{p^s-1}\cdots\sum_{a_1=0}^{p^s-1}\sum_{a_0=0}^{p^s-1}\left|p^{-s}S\left(\frac{f(x)}{p^s}\right)\right|^{2k}.$$

Теорема 9. *Ряд σ_p сходится при $2k>(n^2+n)/2+1$ и расходится при $2k\le(n^2+n)/2+1$.*

Пусть $f_g(x)=a_nx^n+a_mx^m+\dots+a_rx^r+a_0$ — "выщербленный" многочлен с целыми коэффициентами, $1\le r<\dots<m<n, r+\dots+m+n<(n^2+n)/2$, и пусть $\varsigma=\varsigma(k;\rho;f_g)$ — среднее значение полной рациональной арифметической суммы от ρ-функции с "выщербленным" многочленом $f_g(x)$ в аргументе, то есть

$$\varsigma_p=1+\sum_{s=1}^{+\infty}\mathcal{A}(p^s),\quad \mathcal{A}(p^s)=\sum_{\substack{a_n=0\\(a_n,a_m,\dots,a_r,p)=1}}^{p^s-1}\sum_{a_m=0}^{p^s-1}\cdots\sum_{a_r=0}^{p^s-1}\sum_{a_0=0}^{p^s-1}\left|p^{-s}S\left(\frac{f_g(x)}{p^s}\right)\right|^{2k}.$$

Теорема 10. *Ряд ς_p сходится при $2k>n+m+\dots+r$ и расходится при $2k\le n+m+\dots+r$.*

Приведем оценку модуля полной рациональной кратной арифметической суммы с ρ-функцией, аргумент которой является многочленом от нескольких переменных.

Теорема 11. *Пусть $n, \alpha \geq 2$ — натуральные числа, p — простое число,*

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1=0}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} a(t_1, \ldots, t_r) x_1^{t_1} \ldots x_r^{t_r}$$

многочлен с целыми коэффициентами, взаимно простыми в совокупности с p, исключая свободный член $a(0, \ldots, 0)$. Тогда имеем оценку

$$\left| S\left(\frac{F(x_1, \ldots, x_r)}{p^\alpha}\right) \right| \ll_{n,r} (\alpha + 1)^{r-1} p^{\alpha(r-1/n)}.$$

4. Средние значения арифметических сумм

Пусть $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$ — многочлен с вещественными коэффициентами степени n. Рассмотрим сумму вида

$$S = S(\bar{\alpha}) = S(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{x \leq P} \rho(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n),$$

где $P \geq 1, \rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ и $\{x\}$ — дробная часть числа x.

Функция $S(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ является периодической по каждой переменной $\alpha_s, 0 \leq s \leq n$, с периодом 1, поэтому ее достаточно рассматривать внутри $(n+1)$-мерного единичного куба $\Pi_n = \Pi_n(h_0, h_1, \ldots, h_n)$ вида

$$h_0 \leq \alpha_0 < h_0 + 1, \ldots, h_n \leq \alpha_n < h_n + 1.$$

Интеграл $J = J(P; n, k)$ вида

$$J = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{x \leqslant P} \rho(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) \right|^{2k} d\alpha_0 d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$$

называется средним значением суммы $S = S(\bar{\alpha})$.

Сформулируем и приведем схему доказательства следующей теоремы о среднем.

Теорема 12. *Пусть $\tau \geqslant 0$ — целое число, $k \geqslant n\tau$, and $P \geqslant 1, M \geqslant 1$. Тогда*

$$I = I(P; M; k) \leqslant D P^{2k - \frac{n(n+1)}{2} + \delta(\tau)}$$

где

$$\delta(\tau) = \frac{n(n+1))}{2}(1 - 1/n)^\tau$$

и

$$D = D(\tau) = (n\tau)^{6n\tau} (2n)^{4n(n+1)\tau}.$$

Прежде докажем оценку снизу.

Лемма 9. *Для величины $J = J(P; n, k)$ справедлива оценка снизу*

$$J \geq c P^{2k - \frac{n(n+1)}{2}},$$

где $c = 4^{-2k}(4(n+1))^{-n-1}$.

Доказательство. Оценим снизу интеграл J. Выберем область $\Pi_n(0,\dots,0)$. Рассмотрим внутри нее область γ, определяемую неравенствами

$$0 \le \alpha_0 < \frac{1}{4(n+1)}, \dots, 0 \le \alpha_n < \frac{P^{-n}}{4(n+1)}.$$

Объем этой области равен $\operatorname{meas}\{\gamma\} = (4(n+1))^{-n-1}P^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. Для любых точек $\bar\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\bar\alpha' = (\alpha_0', \alpha_1', \dots, \alpha_n')$ из области γ имеем неравенство

$$|S(\bar\alpha) - S(\bar\alpha')| \le P\sum_{s=0}^{n}(|\alpha_s| + |\alpha_s'|)P^s \le (n+1)\frac{1}{4(n+1)}P = 0,25P.$$

Кроме того, $S(\bar 0) = 0,5P$. Следовательно,

$$|S(\bar\alpha)| \ge S(\bar 0) - |S(\bar\alpha) - S(\bar 0)| \ge 0,25P.$$

Таким образом, получаем

$$J \ge \int\underset{\gamma}{\dots}\int |S(\bar\alpha)|^{2k}\,d\bar\alpha \ge cP^{2k-\frac{n(n+1)}{2}},$$

где $c = 4^{-2k}(4(n+1))^{-n-1}$. Лемма доказана. $\square$

Так как функция $\rho(x)$ является нечетной и периодической с периодом 1, то ее достаточно изучать при $0 \le x \le 1/2$. Для любого $M \ge 2$ имеем

$$\rho(x) = s_M(x) + R_M(x),$$

$$s_M(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{M}\frac{\sin 2\pi sx}{s}, \quad |R_M(x)| \le \sigma_M(x) = \frac{8}{\sqrt{1+M^2\sin^2\pi x}}$$

Представим $s_M(x)$ в виде

$$s_M(x) = \sum_{t=0}^{b}\sum_{Me^{-t-1}<s\le Me^{-t}}\frac{\sin 2\pi sx}{s} = \sum_{t=0}^{b}A_t(x), \quad b = [\ln M].$$

Отсюда получим

$$S(\bar\alpha) = \sum_{t=0}^{b}\sum_{x=1}^{P}A_t(f(x)) + \sum_{x=1}^{P}R_M(f(x)).$$

Далее, используя при натуральных r и m, и неотрицательных вещественных $x_1, \dots, x_r$, неравенство

$$\left(\sum_{s=1}^{r}x_s\right)^m \le r^{m-1}\left(\sum_{s=1}^{r}x_s^m\right),$$

найдем

$$|S(\bar\alpha)|^{2k} \le (b+2)^{2k-1}\left(\sum_{t=0}^{b}|\sum_{x=1}^{P}A_t(f(x))|^{2k} + |\sum_{x=1}^{P}R_M(f(x))|^{2k}\right)$$

Таким образом, имеем

$$J \leq (b+2)^{2k}\left(\sum_{t=0}^{b} J_t + R\right),$$

где

$$J_t = \int\limits_{\Pi_n}\dots\int |\sum_{x=1}^{P} A_t(f(x))|^{2k}\,d\bar\alpha, \quad R = \int\limits_{\Pi_n}\dots\int |\sum_{x=1}^{P} R_M(f(x))|^{2k}\,d\bar\alpha.$$

Теперь воспользуемся тождеством Эйлера – Фурье

$$\int\limits_0^1 e^{2\pi i\alpha m}\,d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m=0,\\ 0, & \text{если} \quad m\neq 0, m\in \mathbf{Z}.\end{cases}$$

Получим, что значение $J_t(Me^{-(t+1)})^{2k}$ не превосходит числа решений $I(P; Me^{-t}; k)$ следующей диофантовой системы уравнений

$$\begin{cases} m_1+\dots+m_k &= m_{k+1}+\dots+m_{2k},\\ m_1x_1+\dots+m_kx_k &= m_{k+1}x_{k+1}+\dots+m_{2k}x_{2k},\\ \dots\quad\dots & \dots\quad\dots\\ m_1x_1^n+\dots+m_kx_k^n &= m_{k+1}x_{k+1}^n+\dots+m_{2k}x_{2k}^n,\end{cases} \tag{5}$$

$$1\leqslant x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_{2k}\leqslant P,$$

$$Me^{-(t+1)} < m_1,\dots,m_{2k}\leq Me^{-t}.$$

Лемма 10. *Пусть $m_1, x_1, \dots, m_{2k}, x_{2k}$ является решением системы уравнений (5). Тогда для любого целого a набор $m_1, x_1+a, \dots, m_{2k}, x_{2k}+a$ будет решением (5).*

Доказательство. Имеем

$$X_0 = X_1 = \dots = X_n = 0, \tag{6}$$

где при $s = 0, 1, \dots, n$

$$X_s = m_1x_1^s+\dots+m_kx_k^s - m_{k+1}x_{k+1}^s-\dots-m_{2k}x_{2k}^s.$$

Подставляя в предыдущую систему уравнений (6) набор $m_1, x_1+a, \dots, m_{2k}, x_{2k}+a$, находим

$$\begin{cases} X_0 = & 0,\\ X_1 + aX_0 = & 0,\\ X_2+\binom{2}{1}aX_1+\binom{2}{2}a^2X_0 = & 0,\\ \dots\quad\dots & \dots\\ X_n+\binom{n}{1}aX_{n-1}+\dots+\binom{n}{n-1}a^{n-1}X_1+\binom{n}{n}a^nX_0 = & 0.\end{cases}$$

Это показывает, что рассматриваемый набор является решением (6). Лемма доказана. □

Лемма 11. *Пусть k, n — натуральные числа, $k \geq n$, and $P \geqslant 1$. Тогда найдется простое число p, принадлежащее промежутку $[P^{1/n}, 2P^{1/n}]$ и такое, что*

$$I = J(P; M; k) \leqslant 4k^{2(n+1)} p^{2k-2n+n(n+1)/2} P^n I(P_1; M_1; k-(n+1)) + (2n)^{2k} P^k,$$

где $P_1 = Pp^{-1} + 1$.

Доказательство. Положим $F(x, m) = m\alpha_0 + m\alpha_1 x + \cdots + m\alpha_n x^n$. Тогда получим

$$I = I(P; M; k) =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{Me^{-1} < m_1 \leq M} \sum_{x_1 \leq P} \cdots \sum_{Me^{-1} < m_1 \leq M} \sum_{x_k \leq P} e^{2\pi i (F(x_1, m_1) + \cdots + F(x_k, m_k))} \right|^2 d\alpha_0 d\alpha_1 \ldots d\alpha_r. \tag{7}$$

Наборы $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k), 1 \leq x_1, \ldots, x_k \leq P$, разобьем на два класса A и B. Рассмотрим отображение $G = (G_0, \ldots, G_n)$

$$\begin{pmatrix} G_0 = m_1 + \cdots + m_k, \\ G_1 = m_1 x_1 + \cdots + m_m x_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_n = m_1 x_1^n + \cdots + m_n x_k^n q \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица Якоби $I = I_G(\bar{x}) = \frac{D(G_1, \ldots, G_n)}{D(x_1, \ldots, x_k)}$ этого отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} m_1, \ldots, m_k \\ \cdots\cdots\cdots \\ n m_1 x_1^{n-1}, \ldots, n m_k x_k^{n-1} \end{pmatrix}.$$

К первому классу A отнесем те наборы $\bar{x}$, для которых матрица Якоби $I_G(\bar{x})$ хотя бы для одного простого $p_s, 1 \leq s \leq r$, имеет максимальный ранг по модулю p_s, равный r. Все остальные наборы $\bar{x}$ отнесем ко второму классу.

Преобразуем (7). В понятных обозначениях находим

$$J = \int\limits_{\Pi_n} \left| \sum_{\bar{x} \in A} + \sum_{\bar{x} \in B} \right|^2 d\bar{\alpha} \leq 2J_1 + 2J_2,$$

где

$$J_1 = \int\limits_{\Pi_n} \left| \sum_{\bar{x} \in A} \right|^2 d\bar{\alpha}, \quad J_2 = \int\limits_{\Pi_n} \left| \sum_{\bar{x} \in B} \right|^2 d\bar{\alpha}.$$

Все наборы $\bar{x}$ из первого класса A разобьем на r совокупностей $A_s, s = 1, \ldots, r$, причем $\bar{x}$ относится к совокупности A_s, если матрица Якоби отображения G имеет максимальный ранг по модулю p_s. При условии, если таких p_s несколько, то набор $\bar{x}$ отнесем в совокупность с наименьшим p_s. Используя предыдущую символическую запись, найдем

$$J_1 = \int\limits_{\Pi_n} \left| \sum_{\bar{x} \in A} \right|^2 d\bar{\alpha} = \int\limits_{\Pi_n} \left| \sum_{s=1}^{r} \sum_{\bar{x} \in A_s} \right|^2 d\bar{\alpha} \leq n J_{1s},$$

где

$$J_{1s} = \int\limits_{\Pi_n} \left| \sum_{\bar{x} \in A_s} \right|^2 \, d\bar{\alpha}.$$

Отсюда получим

$$J_{1s} \leq \binom{k}{n}^2 \int\limits_{\Pi_n} \left| {\sum_{x_1,\ldots,x_{n+1}}}' e^{2\pi i (F(x_1)+\cdots+F(x_{n+1}))} \right|^2 \left| \sum_{x \leq P} e^{2\pi i F(x)} \right|^{2k-2(n+1)} d\bar{\alpha},$$

где штрих в знаке суммы означает, что суммирование ведется по наборам $x_1, \ldots, x_{n+1}$, для которых матрица Якоби $I = \frac{D(G_1,\ldots,G_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}$ по модулю p_s имеет максимальный ранг n. $\square$

Далее для вывода теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 12. *Пусть n — натуральное число, $p > n$ — простое число and $1 \leq P \leq p^n$. Тогда для числа T решений системы сравнений*

$$\begin{cases} m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n \equiv & m_{n+1} x_{n+1} + \cdots + m_{2n} x_{2n} \pmod{p}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ m_1 x_1^n + \cdots + m_n x_n^n \equiv & m_{n+1} x_{n+1}^n + \cdots + m_{2n} x_{2n}^n \pmod{p^n}, \end{cases} \tag{8}$$

где $1 \leq x_1, \ldots, x_{2n} \leq P$; $x_s \not\equiv x_t \pmod{p}, x_s \neq x_t, 1 \leq s \neq t \leq n$, а величины $m_1, \ldots, m_{2n}$ принимают постоянные значения в пределах от 1 до $M < p$, справедлива оценка

$$T \leq n! p^{n(n-1)/2} P^n.$$

С интегралом R поступаем аналогично интегралам $J_t, t = 0, 1, 2, \ldots b$. Разлагаем $R_M(x)$ в ряд Фурье, коэффициенты Фурье c_m которого убывают быстрее, чем $|c_m| \ll \frac{1+\log M}{M} e^{-m/|M|}$. Обрываем этот ряд на члене ряда с номером $M_1 = [M \log M] + 1$. Далее используем рассуждения для J_t. Таким образом завершается схема доказательства теоремы. $\square$

5. Заключение

В настоящей статье обобщается анализ Фурье для тригонометрических функций на функции, удовлетворяющие функциональному уравнению типа соотношения в теореме Гаусса умножения для гамма-функции Эйлера. Здесь получены первые результаты. Предполагается дать приложение этих результатов к задачам теории чисел и математического анализа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981. — 176 с.

2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980. — 144 с.

3. Чубариков В. Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле. Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 6. С. 1308–1310.

4. Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах// Мат. заметки. — 1976. — Т.20, №1. — С. 61–68.

5. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орел: Изд–во Орловского гос. ун-та, 2013. – 464с.

6. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987. — 368 с.

7. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2006. — 640 с.

8. Vinogradov,I. M. A new method of estimation of trigonometrical sums, Math. USSR-Sb. **43**, 1936, No.1, 175–188.

9. Hua,L.-K. An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications, Quart. J. Math., **20**, 1949, 48–61.

10. Arkhipov,G. I. A theorem on the mean value of the modulus of a multiple trigonometric sum, Math. Notes **17**, 1975, 84–90.

11. Arkhipov,G. I., Chubarikov,V. N. Multiple trigonometric sums, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **40**, No.1, 1976, 209–220.

12. Hua,L.-K. On an exponential sums, J. Chinese Math. Soc., **2**, 1940, 301–312.

13. Chen,J.-R. On Professor Hua's estimate on exponential sums, Acta Sci. Sinica, **20**, 1977, No. 6, 711–719.

14. Романов Н. П. Теория чисел и функциональный анализ: сборник трудов/Под общ. ред. В. Н. Чубарикова. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. — 478 с.

15. Шихсадилов,М. Ш. Об одном классе осцилирующих интегралов, Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех. **5**, 2015, 61–63.

16. Arkhipov,G. I., Karatsuba,A. A., Chubarikov,V. N. Trigonometric integrals, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **43**, No.5, 1979, 971–1003.

17. Titchmarsh,E. C. The Theory of the Riemann Zeta-function, 2nd ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

18. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N., Karatsuba, A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis, De Gruyter expositions in mathematics; 39, Berlin, New York, 2004.

19. Hua,L.-K. Additive theory of prime numbers. Trudy MIAN SSSR., **22**, 1947, 1–179.

20. Montgomery,H. L. Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysys, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics, No. 84, 1994.

21. Hua,L.-K. On the number of solutions of Tarry's problem, Acta Sci. Sinica, **1**, 1953, 1–76.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M. 1981, "Osnovy teorii chisel."(Russian) [Foundations of the theory of numbers] Ninth revised edition *"Nauka", Moscow* 176 pp.

2. Vinogradov, I. M. 1980, "Metod trigonometricheskikh summ v teorii chisel." , (Russian) [The method of trigonometric sums in the theory of numbers] Second edition. *"Nauka", Moscow*, 144 pp.

3. Chubarikov, V. N. 1976, "On a multiple trigonometric integral" , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 227, № 6, pp. 1308–1310.

4. Chubarikov, V. N. 1976, "Multiple rational trigonometric sums and multiple integrals" , *Mat. Zametki* , vol. 20, № 1 pp. 61–68.

5. Arkhipov, G. I. 2013, "Selected Works" , *Orel: Publisher Oryol State University*, 464 pp.

6. Arkhipov, G. I., Karatsuba, A. A. & Chubarikov, V. N. 1987, "Teoriya kratnykh trigonometricheskikh summ" , (Russian) [Theory of multiple trigonometric sums] *"Nauka", Moscow*, 368 pp.

7. Arkhipov, G. I., Sadovnichii, V. A. & Chubarikov, V. N. 2006, "Lectures on mathematical analysis" , *Drofa, Moscow*, 640 pp.

8. Vinogradov, I. M. 1936, "A new method of estimation of trigonometrical sums" , *Math. USSR-Sb.*, vol. 43, No. 1, pp. 175–188.

9. Hua, L.-K. 1949, "An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications" , *Quart. J. Math.*, vol. 20, pp. 48–61.

10. Arkhipov, G. I. 1975, "A theorem on the mean value of the modulus of a multiple trigonometric sum" , *Math. Notes*, vol. 17, pp. 84–90.

11. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. 1976, "Multiple trigonometric sums" , *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, vol. 40, No. 1, pp. 209–220.

12. Hua, L.-K. 1940, "On an exponential sums" , *J. Chinese Math. Soc.*, vol. 2, pp. 301–312.

13. Chen, J.-R. 1977, "On Professor Hua's estimate on exponential sums" , *Acta Sci. Sinica*, vol. 20, No. 6, pp. 711–719.

14. Romanov, N. P. 2013, "Number Theory and Functional Analysis: Proceedings / Under total. Ed. V. N. Chubarikov." , *Tomsk: Publishing house of Tomsk State University*, 478 pp.

15. Shihsadilov, M. Sh. 2015, "A class of oscillating integrals", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat., Mech.* № 5, pp. 61–63.

16. Arkhipov, G. I., Karatsuba, A. A. & Chubarikov, V. N. 1979, "Trigonometric integrals", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* vol. 43, No. 5, pp. 971–1003.

17. Titchmarsh, E. C. 1986, "The Theory of the Riemann Zeta-function", 2nd ed., *The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.*

18. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. & Karatsuba, A. A. 2004, "Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis", De Gruyter expositions in mathematics; 39, *Berlin, New York.*

19. Hua, L.-K. 1947, "Additive theory of prime numbers", *Trudy MIAN SSSR.*, vol. 22, pp. 1–179.

20. Montgomery, H. L. 1994, "Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysys", *CBMS, Regional Conference Series in Mathematics*, No. 84.

21. Hua, L.-K. 1953, "On the number of solutions of Tarry's problem", *Acta Sci. Sinica*, vol. 1, pp. 1–76.

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 20.05.2015