

---

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК  
Том 18 Выпуск 3

---

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-3-254-278

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ  
МНОГОКРАТНОГО НАЛОЖЕНИЯ  
БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ТЕЛ,  
ОБРАЗОВАННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ  
СОЕДИНЕНИЕМ ДЕФОРМИРОВАННЫХ  
ЧАСТЕЙ<sup>1</sup>**

К. М. Зингерман<sup>2</sup> (г. Тверь), Л. М. Zubov<sup>3</sup> (г. Ростов-на-Дону)

**Аннотация**

В статье приведены и развиты разработанные совместно с профессором МГУ им. М.В. Ломоносова В.Ан. Левиным подходы к точному аналитическому решению задач о больших деформациях составных изделий (тел) из несжимаемых изотропных нелинейно-упругих материалов, части которых предварительно деформированы. Решение этих задач представляет интерес при анализе напряжений в элементах конструкций, изготавливаемых из предварительно нагруженных частей. Результаты могут быть использованы для тестирования промышленного программного обеспечения, предназначенного для численного моделирования аддитивных технологий.

Постановка задач осуществляется на основе теории наложения больших деформаций и в рамках этой теории может быть сформулирована следующим образом. Части изделия, первоначально не связанные между собой, подвергаются начальному деформированию и переходят в промежуточное состояние. Затем эти части соединяются между собой. Соединение происходит по некоторым поверхностям, общим для каждой пары соединяемых частей. Далее тело, составленное из нескольких частей, деформируется как единое целое под действием приложенной к нему дополнительной нагрузки и переходит в конечное состояние. Предполагается, что на поверхностях, по которым соединены части тела, выполняются условия идеального контакта, т.е. векторы перемещений в соединяемых частях изделия на этих поверхностях совпадают.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки России в рамках базовой части Государственного задания (проект № 9.7446.2017/8.9).

<sup>2</sup>Зингерман Константин Моисеевич, заведующий кафедрой вычислительной математики Тверского государственного университет, Zingerman.KM@tversu.ru

<sup>3</sup>Zubov Леонид Михайлович, профессор кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ, lmzubov@sfnedu.ru

Точные решения для изотропных несжимаемых материалов найдены с использованием известных универсальных решений и могут быть рассмотрены как обобщение этих решений на случай наложения больших деформаций.

В статье детально рассмотрены следующие задачи:

— задача о напряженно-деформированном состоянии в двух полых круговых упругих цилиндрах (трубах), один из которых был предварительно деформирован и вставлен в другой цилиндр (задача Ламе-Гадолина);

— задача о кручении составного цилиндра;

— задача о больших деформациях изгиба составного бруса, состоящего из нескольких предварительно деформированных частей (слоев). Приведены математические постановки этих задач, методы и некоторые результаты их решения. Исследовано влияние предварительных деформаций на напряженно-деформированное состояние, анализируются нелинейные эффекты.

*Ключевые слова:* нелинейная теория упругости, наложение больших деформаций, предварительно деформированные тела, точные аналитические решения, аддитивные технологии.

*Библиография:* 25 названий.

## EXACT SOLUTIONS OF PROBLEMS OF THE THEORY OF REPEATED SUPERPOSITION OF LARGE STRAINS FOR BODIES CREATED BY SUCCESSIVE JUNCTION OF STRAINED PARTS

K. M. Zingerman (Tver), L. M. Zubov (Rostov-na-Donu)

### Abstract

Large strains of composite solids made of incompressible isotropic nonlinear-elastic materials are analyzed for the case in which the parts of these solids are preliminarily strained. The approaches to exact analytical solutions of these problems are given and developed in cooperation with V.An. Levin. He is a professor at the Lomonosov Moscow University. The solution of these problems is useful for stress analysis in members containing preliminarily stressed parts. The results can be used for the verification of industrial software for numerical modeling of additive technologies.

The problems are formulated using the theory of repeated superposition of large strains. Within the framework of this theory these problems can be formulated as follows. Parts of a member, which are initially separated from one another, are subjected to initial strain and passes to the intermediate state. Then these parts are joined with one another. The joint is performed by some surfaces that are common for each pair of connected parts. Then

the body, which is composed of some parts, is strained as a whole due to additional loading. The body passes to the final state. It is assumed that the ideal contact conditions are satisfied over the joint surfaces. In other words, the displacement vector in the joined parts is continuous over these surfaces.

The exact solutions for isotropic incompressible materials are obtained using known universal solutions and can be considered as generalizations of these solutions for superimposed large strains.

The following problems are considered in detail:

— the problem of stress and strain state in two hollow circular elastic cylinders (tubes) one of which is preliminarily strained and inserted into another cylinder (the Lamé-Gadolin problem);

— the problem of torsion of a composite cylinder;

— the problem of large bending strains of a composite beam consisting of some preliminarily strained parts (layers). The mathematical statements of these problems are given, the methods of solution are presented, and some results of solution are shown. The impact of preliminary strains on the state of stresses and strains is investigated, and nonlinear effects are analyzed.

*Keywords:* nonlinear theory of elasticity, superposition of large strains, prestrained bodies, exact analytical solutions, additive technologies.

*Bibliography:* 25 titles.

## 1. Введение

В статье приведены и развиты разработанные совместно с профессором МГУ им. М.В. Ломоносова В.Ан. Левиным подходы к точному аналитическому решению задач о больших деформациях составных изделий (тел) из несжимаемых изотропных нелинейно-упругих материалов, части которых предварительно деформированы. Решение этих задач представляет интерес при анализе напряжений в элементах конструкций, изготавливаемых из предварительно нагруженных частей. Результаты могут быть использованы для тестирования промышленного программного обеспечения, предназначенного для численного моделирования аддитивных технологий.

Постановка задач осуществляется на основе теории наложения больших деформаций [1, 2, 3, 4, 5] и в рамках этой теории может быть сформулирована следующим образом. Части изделия, первоначально не связанные между собой, подвергаются начальному деформированию и переходят в промежуточное состояние. Затем эти части соединяются между собой. Соединение происходит по некоторым поверхностям, общим для каждой пары соединяемых частей. Далее тело, составленное из нескольких частей, деформируется как единое целое под действием приложенной к нему дополнительной нагрузки и переходит в конечное состояние. Предполагается, что на поверхностях, по которым соединены части тела, выполняются условия идеального

контакта, т.е. векторы перемещений в соединяемых частях изделия на этих поверхностях совпадают.

Точные решения для изотропных несжимаемых материалов найдены с использованием известных универсальных решений [6, 7, 8] и могут быть рассмотрены как обобщение этих решений на случай наложения больших деформаций.

## 2. Задача Ламе-Гадолина

Рассматривается для случая конечной плоской деформации задача о напряженно-деформированном состоянии в двух полых круговых упругих цилиндрах (трубах), один из которых был предварительно деформирован и вставлен в другой цилиндр. Эта задача может быть рассмотрена как обобщение задачи Гадолина [10] на случай наложения конечных деформаций [2]. Отметим, что решение этой задачи при малых деформациях хорошо известно. Это решение приведено, например, в [11].

Постановка задачи в общем случае следующая. Первый цилиндр, к внутренней поверхности которого может быть приложено давление, деформируется под действием этого давления и некоторой нагрузки, приложенной к внешней поверхности, таким образом, что его границы сохраняют круговую форму, а внешний радиус уменьшается на заданную величину. Затем этот цилиндр вставляется во второй (недеформированный) цилиндр, внутренняя поверхность которого совпадает с внешней поверхностью первого цилиндра после предварительной деформации. Цилиндры находятся в промежуточном состоянии (для второго цилиндра оно совпадает с недеформированным). Затем нагрузка, приложенная к внешней поверхности первого цилиндра, «мгновенно» убывает до нуля. Цилиндры приходят во взаимодействие. Вследствие этого в них возникают дополнительные деформации и соответствующие им напряжения. Затем возможно изменение давления, приложенного к внутренней поверхности первого цилиндра. Это также приводит к возникновению дополнительных деформаций и напряжений. Границы цилиндров меняются, и они переходят в конечное (текущее) состояние.

Результаты решения этой задачи могут быть использованы при расчете остаточных напряжений, возникающих при запрессовке полых цилиндров, и при исследовании их возможного разрушения под действием этих напряжений на основе различных критериев [14]. Результаты могут быть также применены для тестирования САЕ-систем на основе метода конечных элементов, учитывающих эффекты, связанные с перераспределением больших деформаций.

### 2.1. Математическая постановка задачи.

В данной задаче можно различать три состояния системы цилиндрических тел: начальное, промежуточное и конечное. Для обозначения этих со-

стояний далее используются индексы 0, 1 и 2 соответственно.

Математическая постановка задачи в координатах промежуточного состояния в обозначениях теории наложения больших деформаций [2] имеет следующий вид:

— для промежуточного состояния (т.е. для определения начальной деформации первого цилиндра) записывается уравнение равновесия

$$\overset{1}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,1} = 0, \quad (1)$$

граничные условия

$$\overset{1}{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,1} \Big|_{\Gamma_1^1} = -P \overset{1}{\mathbf{N}}, \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \Big|_{\Gamma_2^1} = \mathbf{u}_\Gamma, \quad (2)$$

и кинематическое соотношение

$$\boldsymbol{\Psi}_{0,1} = (\overset{1}{\nabla} \mathbf{r}_0)^{-1}. \quad (3)$$

— для конечного состояния (т.е. для задачи о совместном деформировании цилиндров после того, как один из них вставлен в другой) записывается уравнение равновесия

$$\overset{1}{\nabla} \cdot [(\boldsymbol{\Psi}_{1,2})^{*-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2}] = 0, \quad (4)$$

граничные условия

$$\overset{2}{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2} \Big|_{\Gamma_1^2} = -P \overset{2}{\mathbf{N}}, \quad \overset{2}{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2} \Big|_{\Gamma_3^2} = 0, \quad (5)$$

и кинематические соотношения

$$\boldsymbol{\Psi}_{1,2} = \overset{1}{\nabla} \mathbf{r}_2 = \mathbf{I} + \overset{1}{\nabla} \mathbf{u}_2, \quad \boldsymbol{\Psi}_{0,2} = \boldsymbol{\Psi}_{0,1} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{1,2}. \quad (6)$$

Постановка задачи для обоих состояний включает также определяющие соотношения для материала Бартенева–Хазановича [9]

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,n} = 2\mu \mathbf{F}_{0,n}^{1/2} - p_{0,n} \mathbf{I}, \quad \mathbf{F}_{0,n} = \boldsymbol{\Psi}_{0,n}^* \cdot \boldsymbol{\Psi}_{0,n}, \quad n = 1, 2 \quad (7)$$

и условия несжимаемости

$$\det \boldsymbol{\Psi}_{k,n} = 1, \quad n = 1, 2, \quad k < n. \quad (8)$$

Кроме того, в постановку задачи входит условие непрерывности вектора  $\mathbf{r}_2$  и вектора нормальных напряжений  $\overset{2}{\mathbf{N}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{0,2}$  на границе  $\Gamma_2^2$  между цилиндрами в текущем состоянии. Здесь использованы следующие обозначения:  $\boldsymbol{\sigma}_{0,n}$  — тензор истинных полных для  $n$ -го состояния напряжений;  $\boldsymbol{\Psi}_{k,n}$  — аффинор деформации при переходе из состояния  $k$  в состояние  $n$ ;  $\mathbf{F}_{0,n}$  — мера деформации, соответствующая мере Фингера при переходе из состояния  $k$

в состояние  $n$ ;  $\mathbf{u}_n$  — вектор перемещений при переходе из  $(n - 1)$ -го в  $n$ -е состояние;  $\Gamma_1^k$  и  $\Gamma_2^k$  — внутренняя и внешняя граница первого цилиндра в  $k$ -м состоянии соответственно ( $\Gamma_2^k$  при  $k = 1, 2$  является и внутренней границей второго цилиндра в соответствующем состоянии);  $\Gamma_3^k$  — внешняя граница второго цилиндра в  $k$ -м состоянии;  $\mathbf{u}_\Gamma$  — заданный вектор смещения внешней границы первого цилиндра при его начальной деформации;  $P$  — давление, приложенное к внутренней границе первого цилиндра.

Отметим, что вследствие осевой симметрии задачи вектор единичной нормали к границам цилиндров не меняется при деформации, т.е.  $\overset{2}{\mathbf{N}} = \overset{1}{\mathbf{N}}$ . Это позволяет переписать граничные условия (5) и условие непрерывности вектора нормальных напряжений в координатах промежуточного состояния.

Рассмотрим решение задачи в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ . Пусть  $r_0$  — радиальная координата частицы в начальном состоянии,  $r$  — в промежуточном,  $\rho$  — в конечном. Обозначим через  $b$  внутренний радиус первого цилиндра в промежуточном состоянии. Его внешний радиус в этом состоянии без ограничения общности можно считать равным 1. Пусть внешний радиус первого цилиндра в начальном состоянии равен  $1 + e$ , а внешний радиус второго цилиндра до деформации —  $c$ .

## 2.2. Нахождение решения.

Для решения применяется известный подход, основанный на использовании универсального решения задачи об осесимметричной деформации полого цилиндра из несжимаемого изотропного материала при больших деформациях [7]. Отличие состоит в том, что в данном случае деформирование осуществляется в два этапа, поэтому необходимо сначала определить начальные деформации, а затем — дополнительные.

Интегрирование условий несжимаемости (8) с учетом осевой симметрии задачи (и в предположении о том, что движение частиц происходит только в радиальном направлении) позволяет получить выражения для  $r_0$  и  $\rho$  через  $r$  с точностью до постоянной. После подстановки полученных выражений в кинематические и определяющие соотношения и затем в уравнения равновесия получаются линейные дифференциальные уравнения для множителей Лагранжа  $p_{0,n}$  ( $n = 1, 2$ ). Решение этих уравнений позволяет определить  $p_{0,n}$  и затем — напряжения. Постоянные определяются из граничных условий.

Сначала определим начальную деформацию первого цилиндра. Условие несжимаемости (8) при  $n = 1$  может быть записано в виде  $\frac{r_0}{r} \frac{dr_0}{dr} = 1$ , откуда

$$r_0 = \sqrt{r^2 + C}. \quad (9)$$

Диагональные компоненты аффинора начальных деформаций с учетом (9) определяются по формулам

$$(\Psi_{0,1})_{rr} = \left( \frac{dr_0}{dr} \right)^{-1} = \frac{\sqrt{r^2 + C}}{r}, \quad (\Psi_{0,1})_{\theta\theta} = \frac{r}{r_0} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + C}}, \quad (\Psi_{0,1})_{zz} = 1,$$

а недиагональные компоненты равны нулю.

Подстановка этих компонент в определяющие соотношения (7) дает:

$$(\sigma_{0,1})_{rr} = \frac{2\mu\sqrt{r^2+C}}{r} + p_{0,1}, \quad (\sigma_{0,1})_{\theta\theta} = \frac{2\mu r}{\sqrt{r^2+C}} + p_{0,1}. \quad (10)$$

Наконец, после подстановки выражений (10) в уравнение равновесия

$$\frac{d}{dr} [(\sigma_{0,1})_{rr}] + \frac{1}{r} [(\sigma_{0,1})_{rr} - (\sigma_{0,1})_{\theta\theta}] = 0$$

получается дифференциальное уравнение для  $p_{0,1}$ :

$$\frac{d}{dr}(p_{0,1}) = 0,$$

откуда  $p_{0,1} = B$ ,  $B$  — постоянная. Подстановка этого выражения в формулы (10) позволяет получить окончательные выражения для начальных напряжений. Постоянные  $C$  и  $B$  определяются из граничных условий (2), которые могут быть записаны в виде

$$r_0|_{r=1} = 1 + e, \quad (\sigma_{0,1})_{rr}|_{r=b} = -P.$$

В частности, первое из этих условий с учетом (9) позволяет найти  $C$ :

$$C = 2e + e^2. \quad (11)$$

Найдем теперь дополнительные деформации. Характеристики напряженно-деформированного состояния в первом цилиндре будем помечать верхним индексом *int*, а во втором цилиндре — индексом *ext*. Индекс 0,2, указывающий номера состояний (0 — начальное, 2 — конечное), будем для краткости опускать. Тензор дополнительных деформаций  $\Psi_{1,2}$  будем обозначать через  $\Phi$ , чтобы отличать его от тензора полных деформаций  $\Psi_{0,2} = \Psi$ .

Условие несжимаемости  $\det \Psi_{1,2} = 1$  может быть записано в виде  $\frac{\rho}{r} \frac{d\rho}{dr} = 1$ , откуда

$$\rho = \sqrt{r^2 + Q}, \quad (12)$$

$Q$  — постоянная. Поскольку должно выполняться условие непрерывности  $\rho$  на границе между цилиндрами, значение этой постоянной будет одним и тем же для обоих цилиндров.

Ненулевые компоненты аффинора дополнительных деформаций с учетом (12) определяются следующим образом:

$$\Phi_{rr} = \frac{d\rho}{dr} = \frac{r}{\sqrt{r^2+Q}}, \quad \Phi_{\theta\theta} = \frac{\rho}{r} = \frac{\sqrt{r^2+Q}}{r}, \quad \Phi_{zz} = 1. \quad (13)$$

Для ненулевых компонент аффинора полных деформаций в первом цилиндре имеют место следующие выражения:

$$\Psi_{rr}^{\text{int}} = (\Psi_{0,1})_{rr} \Phi_{rr} = \frac{\sqrt{r^2+2e+e^2}}{\sqrt{r^2+Q}}, \quad \Psi_{\theta\theta}^{\text{int}} = (\Psi_{0,1})_{\theta\theta} \Phi_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{r^2+Q}}{\sqrt{r^2+2e+e^2}},$$

$$\Psi_{zz}^{\text{int}} = 1.$$

Во втором цилиндре начальные деформации отсутствуют, поэтому полные деформации в нем равны дополнительным.

После подстановки компонент этих тензоров в определяющие соотношения (7) имеем:

$$\sigma_{rr}^{\text{int}} = \frac{2\mu\sqrt{r^2 + 2e + e^2}}{\sqrt{r^2 + Q}} + p^{\text{int}}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{int}} = \frac{2\mu\sqrt{r^2 + Q}}{\sqrt{r^2 + 2e + e^2}} + p^{\text{int}}, \quad (14)$$

$$\sigma_{rr}^{\text{ext}} = \frac{2\mu r}{\sqrt{r^2 + Q}} + p^{\text{ext}}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{ext}} = \frac{2\mu\sqrt{r^2 + Q}}{r} + p^{\text{ext}}. \quad (15)$$

Уравнение равновесия (4) для внутреннего цилиндра может быть записано в виде

$$\frac{d}{dr} [\sigma_{rr}^{\text{int}}/\Phi_{rr}] + \frac{1}{r} [\sigma_{rr}^{\text{int}}/\Phi_{rr} - \sigma_{\theta\theta}^{\text{int}}/\Phi_{\theta\theta}] = 0.$$

Аналогично записывается уравнение равновесия для внешнего цилиндра. Подставляя в эти уравнения выражения (13), (14), (15), получаем дифференциальные уравнения для множителей Лагранжа

$$\frac{d}{dr}(p^{\text{ext}}) = 0, \quad \frac{d}{dr}(p^{\text{int}}) = 0,$$

откуда

$$p^{\text{int}} = B^{\text{int}}, \quad p^{\text{ext}} = B^{\text{ext}}, \quad (16)$$

$B^{\text{int}}$  и  $B^{\text{ext}}$  — постоянные. Подстановка этих выражений в формулы (14), (15) позволяет получить окончательные выражения для напряжений. Постоянные  $Q$ ,  $B^{\text{int}}$  и  $B^{\text{ext}}$  определяются из граничных условий (5) и условия непрерывности нормальных напряжений на границе между цилиндрами. С учетом сделанного выше замечания о неизменности единичных нормалей к цилиндрическим поверхностям при деформации эти условия могут быть записаны в виде

$$\sigma_{rr}^{\text{int}}|_{r=b} = -P, \quad \sigma_{rr}^{\text{ext}}|_{r=c} = 0, \quad \sigma_{rr}^{\text{ext}}|_{r=1} = \sigma_{rr}^{\text{int}}|_{r=1}.$$

После подстановки в эти условия выражений (14), (15), (16) они запишутся в виде

$$\frac{2\mu\sqrt{b^2 + 2e + e^2}}{\sqrt{b^2 + Q}} + B^{\text{int}} = -P, \quad \frac{2\mu c}{\sqrt{c^2 + Q}} + B^{\text{ext}} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{2\mu\sqrt{1 + 2e + e^2}}{\sqrt{1 + Q}} + B^{\text{int}} - \frac{2\mu}{\sqrt{1 + Q}} - B^{\text{ext}} = 0. \quad (18)$$

Выражая  $B^{\text{int}}$  и  $B^{\text{ext}}$  из уравнений (17) и подставляя полученные выражения в (18), получаем уравнение

$$2\mu \left[ \frac{\sqrt{1 + 2e + e^2}}{\sqrt{1 + Q}} - \frac{\sqrt{b^2 + 2e + e^2}}{\sqrt{b^2 + Q}} - \frac{1}{\sqrt{1 + Q}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + Q}} \right] = P,$$

из которого может быть найдена постоянная  $Q$ . Решив это нелинейное уравнение численно, можно найти  $B^{\text{int}}$  и  $B^{\text{ext}}$  из уравнений (17).

### 2.3. Результаты числовых расчетов.

Рассмотрим некоторые числовые результаты. Отметим, что в данной задаче более естественно задавать в качестве исходного данного внутренний радиус первого цилиндра не в промежуточном, а в начальном состоянии. Этот радиус (обозначим его  $b_0$ ) связан с радиусом  $b$  в промежуточном состоянии соотношением

$$b = \sqrt{b_0^2 - 2e - e^2},$$

которое можно получить, подставив  $r = b$  и  $r_0 = b_0$  в (9) с учетом (11).

Для тонкостенных цилиндров наблюдается немонотонная зависимость напряжений в первом цилиндре от параметра  $e$ , т.е. при некотором значении  $e$  напряжения с дальнейшим ростом  $e$  начинают убывать. В качестве примера рассмотрим случай  $c = 1.1$ ,  $b_0 = (1 + e)/1.1$ . Для этого случая на рис. 1 дана зависимость напряжения  $\sigma_{rr}$  на границе между цилиндрами от  $e$ , а на рис. 2 показаны зависимости напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  на границах цилиндров от  $e$ . Сплошная линия на этом рисунке соответствует напряжению на внутренней границе первого цилиндра, пунктирная линия с длинными штрихами — напряжению на его внешней границе (эти два напряжения взяты с противоположным знаком), штрихпунктирная линия — напряжению на внутренней границе второго цилиндра, пунктирная линия с короткими штрихами — напряжению на его внешней границе.

[tbh]

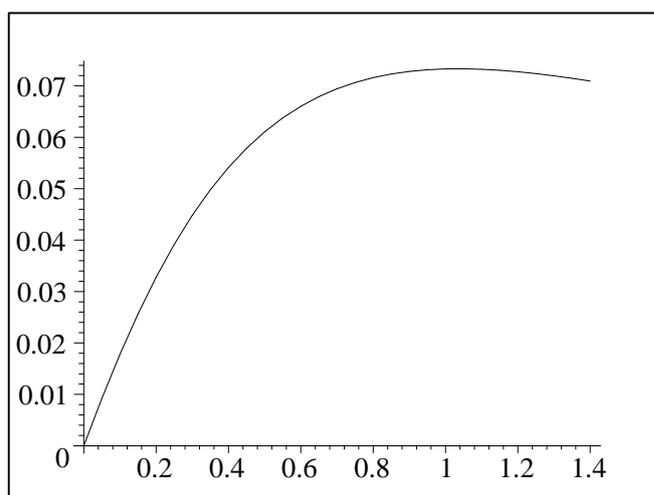


Рис. 1: Зависимость напряжения  $\sigma_{rr}$  на границе между цилиндрами от  $e$  для материала Бартенева–Хазановича при  $c = 1.1$ ,  $b_0 = (1 + e)/1.1$ . Напряжение взято с противоположным знаком

На всех рисунках напряжения отнесены к модулю  $\mu$ .

[tbh]

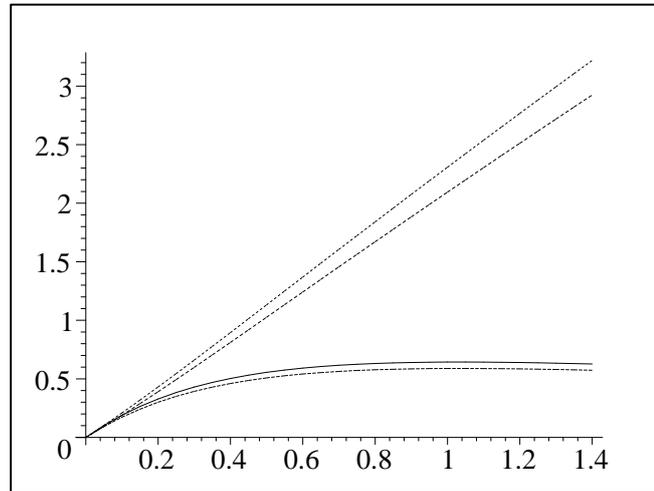


Рис. 2: Зависимости напряжения  $\sigma_{\theta\theta}$  на границах цилиндров от  $e$  для материала Бартенева–Хазановича при  $c = 1.1$ ,  $b_0 = (1 + e)/1.1$

### 3. Кручение составного цилиндра с предварительно деформированным включением

В данном параграфе приведено решение статической задачи о кручении составного цилиндра из несжимаемых нелинейно-упругих материалов. Цилиндр содержит центральное круговое цилиндрическое включение, которое предварительно скручено и растянуто (или сжато) вдоль оси и скреплено с ненапряженным внешним полым цилиндром. Точное аналитическое решение этой задачи для произвольных нелинейно-упругих изотропных несжимаемых материалов получено [12, 13] на основе универсального решения для несжимаемого материала — решения задачи о кручении, растяжении и изменении диаметра круглого цилиндра [15, 6, 7, 16]. Детальный анализ решения выполнен для случая, когда цилиндры изготовлены из материалов типа Муни [17].

Постановка задачи в рамках теории наложения больших деформаций может быть сформулирована следующим образом. В начальном состоянии во внутреннем цилиндре отсутствуют напряжения и деформации. Этот цилиндр подвергается начальному деформированию — скручиванию и осевому растяжению или сжатию, которое вследствие несжимаемости материала цилиндра сопровождается изменением его диаметра. В результате этой деформации цилиндр переходит в промежуточное состояние, в котором он находится в равновесии. Далее этот цилиндр вставляется в полый недеформированный цилиндр, внутренний радиус которого совпадает с радиусом первого (сплошного) цилиндра. Цилиндры скрепляются и подвергаются совместной дополнительной деформации — скручиванию и осевому растяжению или сжатию,

которое, как и ранее, сопровождается изменением диаметров цилиндров. Составной цилиндр переходит в конечное состояние, в котором он находится в равновесии. Боковая поверхность составного цилиндра в этом состоянии считается свободной от нагрузок, а к его основаниям приложены осевая сила и крутящий момент (рис. 3).

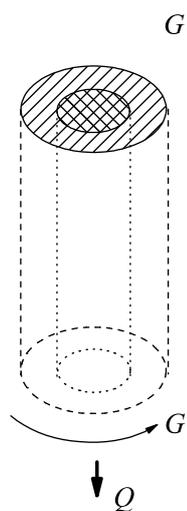


Рис. 3: Схема нагружения составного цилиндра.  $Q$  — осевая сила,  $G$  — крутящий момент.

Решение этой задачи позволяет, в частности, исследовать эффект Пойнтинга, который состоит в изменении длины цилиндрического тела при кручении [18]; исследование этого эффекта для однородного цилиндра из несжимаемого материала выполнено в [19].

### 3.1. Основные обозначения.

Для краткости будем опускать в этом параграфе нижние индексы у тензоров, описывающих переход из начального в конечное состояние.

$\sigma = \sigma_{0,2}$  — тензор напряжений Коши,

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{0,2}$  — мера деформации Фингера,

$\Psi = \Psi_{0,2}$  — аффинол полной деформации,

$\Psi_{\text{init}} = \Psi_{0,1}$  — аффинол начальной деформации, соответствующей переходу из начального состояния в промежуточное,

$\Psi_{\text{add}} = \Psi_{1,2}$  — аффинол дополнительной деформации, т.е. деформации при переходе из промежуточного состояния в конечное;

$\text{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$  — след тензора второго ранга  $\mathbf{A}$ ,

$\mathbf{R}$  — радиус-вектор частицы в конечном состоянии,

$x_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) — декартовы координаты частиц в начальном (недеформированном) состоянии,  $x'_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) — в промежуточном,  $X_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — в конечном.

$\mathbf{i}_k$  — координатные орты декартовых координат,

$p$  — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию.

$\rho, \theta, \zeta$  — цилиндрические координаты частиц внутреннего цилиндра в естественном (недеформированном) состоянии;

$r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты частиц внутреннего цилиндра в промежуточном (предварительно напряженном) состоянии и частиц внешнего цилиндра в естественном (недеформированном) состоянии;

$R, \Phi, Z$  — цилиндрические координаты частиц цилиндров в конечном состоянии.

Указанные координаты связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho \cos \theta, & x_2 &= \rho \sin \theta, & x_3 &= \zeta \\x'_1 &= r \cos \varphi, & x'_2 &= r \sin \varphi, & x'_3 &= z, \\X_1 &= R \cos \Phi, & X_2 &= R \sin \Phi, & X_3 &= Z.\end{aligned}$$

$\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\zeta, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$  — орты, касательные координатным линиям цилиндрических координат:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \mathbf{i}_1 \cos \theta + \mathbf{i}_2 \sin \theta, & \mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{i}_1 \sin \theta + \mathbf{i}_2 \cos \theta, & \mathbf{e}_\zeta &= \mathbf{i}_3; \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi, & \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi, & \mathbf{e}_z &= \mathbf{i}_3; \\ \mathbf{e}_R &= \mathbf{i}_1 \cos \Phi + \mathbf{i}_2 \sin \Phi, & \mathbf{e}_\Phi &= -\mathbf{i}_1 \sin \Phi + \mathbf{i}_2 \cos \Phi, & \mathbf{e}_Z &= \mathbf{i}_3.\end{aligned}$$

### 3.2. Начальная деформация внутреннего цилиндра.

Начальная (предварительная) деформация включения представляет собой осевое растяжение-сжатие и кручение и задается отображением [16, 6, 7, 15]

$$\begin{aligned}r &= r(\rho), & \varphi &= \theta + \psi_0 \zeta, & z &= \lambda_0 \zeta \\ \psi_0 &= \text{const}, & \lambda_0 &= \text{const}\end{aligned}\tag{19}$$

Тензор  $\Psi_{\text{init}}$ , отвечающий начальной деформации (19), имеет следующее выражение

$$\Psi_{\text{init}} = \frac{dr}{d\rho} \mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_r + \frac{r}{\rho} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\varphi + \psi_0 r \mathbf{e}_\zeta \mathbf{e}_\varphi + \lambda_0 \mathbf{e}_\zeta \mathbf{e}_z\tag{20}$$

В (19), (20)  $\psi_0$  и  $\lambda_0$  — угол закручивания и кратность осевого удлинения, определяющие начальную деформацию включения.

На основании (20) из условия несжимаемости

$$\det \Psi_{\text{init}} = \frac{r}{\rho} \frac{dr}{d\rho} \lambda_0 = 1$$

находим функцию  $r(\rho)$ :

$$r(\rho) = \lambda_0^{-\frac{1}{2}} \rho \quad (21)$$

С учетом (21) выражение (20) принимает вид

$$\Psi_{\text{init}} = \lambda_0^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\varphi) + \psi_0 r \mathbf{e}_\zeta \mathbf{e}_\varphi + \lambda_0 \mathbf{e}_\zeta \mathbf{e}_z \quad (22)$$

### 3.3. Деформации и напряжения в составном цилиндре.

Рассмотрим задачу о кручении и растяжении-сжатии составного цилиндра. Цилиндрический стержень, подвергнутый описанной выше начальной деформации, вставляется в полый круговой цилиндр, находящийся в естественном, ненапряженном состоянии. После скрепления центрального включения с внешним цилиндром составной цилиндр подвергается кручению и растяжению-сжатию как одно целое силами, приложенными к торцам цилиндра. Внешний цилиндр в ненапряженном состоянии занимает область  $0 \leq z \leq l$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $r_1 \leq r \leq r_0$ . Отсюда находится радиус включения:  $0 \leq \rho \leq \lambda_0^{\frac{1}{2}} r_1$ . За отсчетную конфигурацию составного цилиндра примем такую, в которой точки тела имеют цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Эта конфигурация является естественной для внешней цилиндрической оболочки и предварительно напряженной для центрального включения. Решение задачи о совместном кручении и осевом растяжении-сжатии составного цилиндра ищем в виде

$$R = R(r), \quad \Phi = \varphi + \psi z, \quad Z = \lambda z, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (23)$$

где  $\psi$  и  $\lambda$  — угол закручивания и кратность удлинения составного цилиндра ( $\psi, \lambda = \text{const}$ ). Условие несжимаемости позволяет определить функцию  $R(r)$ :

$$R(r) = \lambda^{-\frac{1}{2}} r \quad (24)$$

При помощи (23), (24) вычисляется аффиноор дополнительной деформации  $\Psi_{\text{add}}$

$$\Psi_{\text{add}} = \lambda^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\Phi) + \psi R \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\Phi + \lambda \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z \quad (25)$$

Аффиноор  $\Psi$  полной деформации для внутреннего цилиндра представляется в виде

$$\Psi = \Psi_{\text{init}} \cdot \Psi_{\text{add}}; \quad \Psi_{\text{add}} = \frac{\partial X_k}{\partial x'_m} \mathbf{i}_m \mathbf{i}_k, \quad \Psi_{\text{init}} = \frac{\partial x'_m}{\partial x_s} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_m \quad (26)$$

Для внешнего цилиндра начальная деформация отсутствует, поэтому для него  $\Psi = \Psi_{\text{add}}$ .

Обозначив через  $R_1$  и  $R_0$  соответственно радиус внутреннего цилиндра и внешний радиус внешнего цилиндра в конечном (деформированном) состоянии, на основании (24) имеем

$$R_1 = R(r_1) = \lambda^{-\frac{1}{2}} r_1, \quad R_0 = R(r_0) = \lambda^{-\frac{1}{2}} r_0. \quad (27)$$

Определяющее соотношение для произвольного изотропного несжимаемого материала имеет вид [6]

$$\boldsymbol{\sigma} = \chi_1(I_1, I_2)\mathbf{F} - \chi_2(I_1, I_2)\mathbf{F}^{-1} - p\mathbf{I}, \quad (28)$$

здесь  $\mathbf{F}$  — мера деформации Фингера:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \boldsymbol{\Psi}, \quad (29)$$

$$\chi_1 = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \chi_2 = 2\frac{\partial W}{\partial I_2},$$

$W(I_1, I_2)$  — функция удельной потенциальной энергии упругого материала,  $I_1, I_2$  — инварианты деформации:  $I_1 = \text{tr}\mathbf{F}$ ,  $I_2 = \text{tr}(\mathbf{F}^{-1})$ . Далее будем обозначать функции  $\chi_1, \chi_2$ , характеризующие механические свойства материала внутреннего цилиндра, через  $\chi_1^0$  и  $\chi_2^0$ , чтобы отличить их от функций  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , характеризующих механические свойства материала внешнего цилиндра.

Учитывая (29), (26), (25), можно получить выражения меры деформации Фингера  $\mathbf{F}$ , обратного тензора  $\mathbf{F}^{-1}$  и инвариантов деформации во внутреннем цилиндре  $0 \leq R < R_1$  и во внешнем полем цилиндре  $R_1 < R \leq R_0$ . Далее, используя (28), можно получить выражение тензора напряжений Коши в составном цилиндре как функции координат  $R, \Phi, Z$  в конечном состоянии. Это выражение подставляется в уравнение равновесия, что позволяет найти функцию  $p = p(R)$ . Зная эту функцию, можно найти окончательные выражения для напряжений [13]. Эти выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости. С использованием этих выражений определяются продольная сила  $Q$  и крутящий момент  $G$ , приложенные к каждому основанию цилиндра:

$$Q = 2\pi \int_0^{R_0} \sigma_Z R dR, \quad G = 2\pi \int_0^{R_0} \tau_{Z\Phi} R^2 dR \quad (30)$$

### 3.4. Результаты численных расчетов.

При описании численных результатов будем использовать следующие представления для постоянных материалов:

$$C_1 = \frac{\mu(1 + \beta)}{4}, \quad C_2 = \frac{\mu(1 - \beta)}{4}, \quad C_1^0 = \frac{\mu_0(1 + \beta_0)}{4}, \quad C_2^0 = \frac{\mu_0(1 - \beta_0)}{4}, \quad (31)$$

здесь  $\mu_0$  и  $\mu$  — модули сдвига материалов внутреннего и внешнего цилиндров соответственно,  $\beta_0$  и  $\beta$  — безразмерные постоянные. Отметим, что условиями положительности потенциальной энергии деформации являются неравенства [6]

$$\mu > 0, \quad \mu_0 > 0, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad -1 \leq \beta_0 \leq 1.$$

Численные расчеты были выполнены при следующих значениях параметров: модуль сдвига включения  $\mu_0 = 2\mu$ ,  $\beta_1 = \beta = -0.24$ ,  $r_0 = 1.75r_1$ , угол начального закручивания  $\psi_0 = (r_1)^{-1}$ . кратность начального осевого удлинения  $\lambda_0 = 2$ .

Была исследована зависимость угла закручивания  $\psi$  от кратности осевого удлинения  $\lambda$  при полной деформации для случая, когда осевая сила равна 0. Эта зависимость приведена на рис. 4 для разных значений  $\lambda_0$ . Угол закручивания отнесен к величине  $(r_1)^{-1}$ .

Из рисунка можно видеть, что в составном цилиндре имеет место эффект Пойнтинга, т.е. кручение цилиндра сопровождается его осевым растяжением или сжатием. Если  $\lambda_0 < 1$ , то при сравнительно малых по модулю углах закручивания имеет место осевое сжатие ( $\lambda < 1$ ), а в остальных случаях — растяжение. Если же  $\lambda_0 > 1$ , то при любых углах закручивания имеет место осевое растяжение.

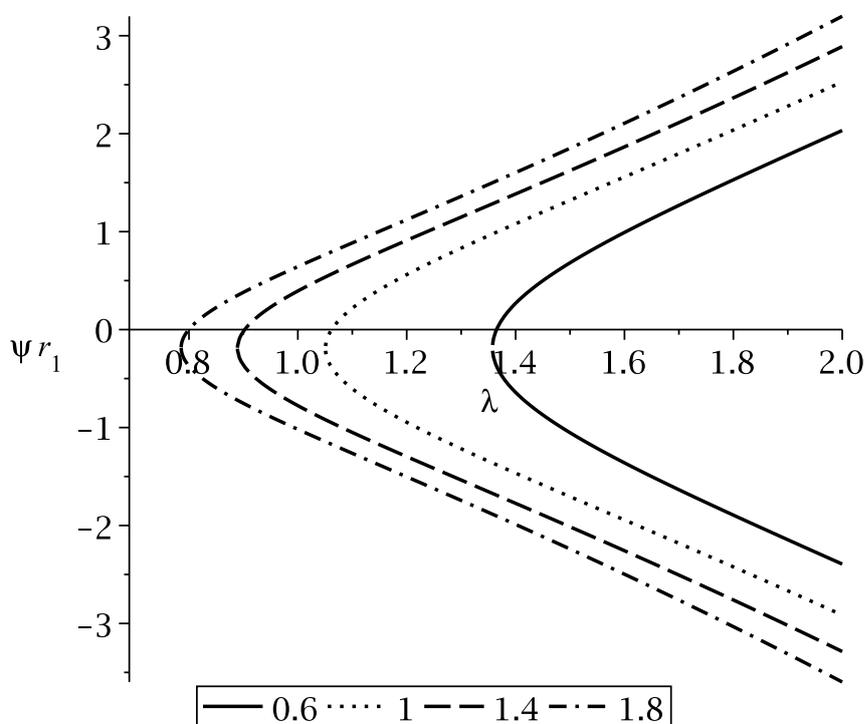


Рис. 4: Зависимость угла закручивания  $\psi$  от кратности осевого удлинения  $\lambda$  для разных значений  $\lambda_0$  (эти значения указаны под рисунком).

Как отмечено в [20, 21], знак эффекта Пойнтинга в нелинейно-упругих материалах зависит от того, выполняются ли для этих материалов дополнительные неравенства, в частности, так называемое эмпирическое неравенство. Указано, что если материал несжимаемый и удовлетворяет эмпирическому неравенству, то для такого материала возможен только положительный эффект Пойнтинга, т.е. при кручении однородного стержня, изготовленного из такого материала, длина стержня увеличивается. Для материала типа Муни эмпирические неравенства совпадают с условиями положительности потенциальной энергии деформации, т.е.  $\mu > 0$ ,  $-1 < \beta < 1$ . Таким образом, при выполнении этих неравенств в стержне из материала типа Муни возможен только положительный эффект Пойнтинга, т.е.  $\lambda > 1$ . А для

составных предварительно нагруженных стержней из материалов типа Муни, как видно из рис. 4, возможно как удлинение, так и укорочение. Это нетривиальный эффект, вызванный предварительной деформацией внутренней части стержня.

## 4. Изгиб составного бруса с предварительно деформированными слоями

В данном параграфе решена плоская задача о больших деформациях изгиба составного бруса, состоящего из нескольких предварительно деформированных частей (слоев). Получено [23] точное аналитическое решение этой задачи для случая, когда брус изготовлен из изотропных нелинейно-упругих несжимаемых материалов. Решение является универсальным для данного класса материалов и обобщает известное универсальное решение для однородного бруса [6, 7, 16].

Механическая постановка задачи следующая. Брус в форме прямоугольного параллелепипеда из несжимаемого материала, находящиеся в ненапряженном состоянии, подвергаются начальной деформации — растяжению или сжатию — и переходят в промежуточное состояние. Начальная деформация каждого бруса однородна, но различна для разных брусьев. Для некоторых брусьев начальная деформация может отсутствовать. Далее эти брусья соединяются между собой (рис. 5). Предполагается, что на гранях, по которым происходит соединение, выполняются условия идеального контакта, т.е. совпадают перемещения соединяемых брусьев. К торцам составного бруса прикладывается изгибающий момент. Далее составной брус деформируется как единое целое. Под действием изгибающего момента и вследствие начальной деформации слоев происходит его изгиб. Брус переходит в конечное состояние.

### 4.1. Основные уравнения постановки задачи

Используются те же основные обозначения, что и в предыдущем параграфе.

Постановка задачи осуществляется в координатах промежуточного состояния и включает следующие уравнения.

Уравнение равновесия (массовые силы отсутствуют)

$$\mathop{\text{div}}^1 \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (32)$$

Здесь  $\mathbf{D}^k$  — несимметричный тензор напряжений Пиолы, определенный в конфигурации  $k$ -го состояния. Этот тензор выражается через тензор истинных напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  следующим образом:

$$\mathbf{D}^1 = (\det \mathbf{F}_{\text{add}}) (\boldsymbol{\Psi}_{\text{add}}^T)^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (33)$$

Упругий потенциал  $W$  и определяющие соотношения для несжимаемых изотропных нелинейно-упругих материалов [6]:

$$W = W(I_1, I_2), \quad (34)$$

$$\mathbf{D} = [\chi_1(I_1, I_2) + I_1 \chi_2(I_1, I_2)] \Psi_{\text{init}}^T \cdot \Psi - \chi_2(I_1, I_2) \Psi_{\text{init}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \Psi - p (\Psi_{\text{add}}^T)^{-1}, \quad (35)$$

$$\chi_1 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \chi_2 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad I_1 = \text{tr } \mathbf{G}, \quad I_2 = \text{tr } (\mathbf{G}^{-1}). \quad (36)$$

Здесь  $I_1, I_2$  — инварианты деформации,  $\chi_1, \chi_2$  — функции отклика материала,  $p$  — множитель Лагранжа, определяющий давление в несжимаемом теле.

Условия несжимаемости материала:

$$\det \Psi_{\text{init}} = \det \Psi_{\text{add}} = \det \Psi = 1. \quad (37)$$

Кинематические соотношения:

$$\mathbf{G} = \Psi \cdot \Psi^T, \quad \Psi = \Psi_{\text{init}} \cdot \Psi_{\text{add}}. \quad (38)$$

Рассмотрим плоскую деформацию прямоугольного составного бруса, занимающего в промежуточном состоянии область  $0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h$  (рис. 5). Через  $x, y, z$  обозначены декартовы координаты частицы бруса в промежуточном состоянии. Размер по координате  $z$ , один и тот же для всех слоев, значения не имеет. Брус состоит из  $n$  слоев,  $k$ -й слой занимает в промежуточном состоянии область  $h_{k-1} \leq y \leq h_k$  ( $0 = h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{n-1} \leq h_n = h$ ). Начальная (предварительная) деформация  $k$ -го слоя ( $k = 1, \dots, n$ ) относительно начального ненапряженного состояния материала однородна и задается следующим аффином деформации ( $\lambda_{(k)} = \text{const}$ ):

$$\Psi_{\text{init}} = \lambda_{(k)} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_{(k)}^{-1} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad (39)$$

где  $\mathbf{i}_j$  — координатные орты.

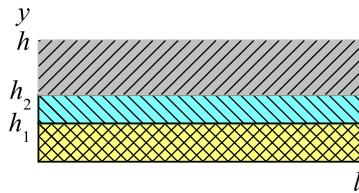


Рис. 5: Форма составного бруса в промежуточном состоянии

Если  $k$ -й слой бруса не был предварительно напряжен, то промежуточное состояние этого слоя совпадает с начальным,  $\lambda_{(k)} = 1$  и  $\Psi_{\text{init}} = \mathbf{I}$ .

Материалы слоев составного бруса могут различаться. Будем далее обозначать функцию потенциальной энергии деформации  $k$ -го слоя ( $h_{k-1} \leq y < h_k$ ) через  $W^{(k)}$ , а соответствующие функции отклика через  $\chi_1^{(k)}$  и  $\chi_2^{(k)}$ :

$$\chi_1^{(k)} = 2 \frac{\partial W^{(k)}}{\partial I_1}, \quad \chi_2^{(k)} = 2 \frac{\partial W^{(k)}}{\partial I_2}.$$

Отметим, что для рассматриваемого класса задач  $I_1 = I_2$  вследствие условия несжимаемости и условия плоской деформации.

#### 4.2. Нахождение решения задачи.

Дополнительную деформацию составного бруса будем разыскивать в виде, соответствующем нелинейному чистому изгибу [22]

$$X = \rho(y) \sin \beta x, \quad Y = \rho(y) \cos \beta x, \quad Z = z, \quad \beta = \text{const.} \quad (40)$$

где  $X, Y, Z$  — декартовы координаты точек бруса в конечном состоянии. При деформации (40) каждая прямая  $y = \text{const}$  превращается в дугу окружности с радиусом  $\rho(y)$ . Геометрический смысл параметра  $\beta$  состоит в том, что  $\beta x$  — угол поворота сечения  $x = \text{const}$  вокруг оси, ортогональной плоскости бруса. Форма составного бруса в конечном состоянии показана на рис. 6. Отметим, что при  $\beta > 0$  брус изгибается выпуклостью вверх, а при  $\beta < 0$  — выпуклостью вниз.

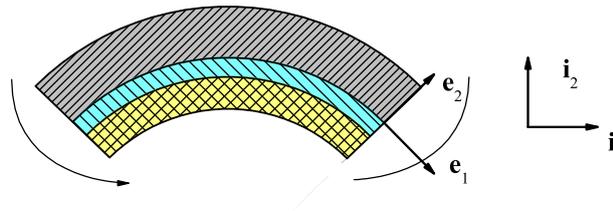


Рис. 6: Форма составного бруса в конечном состоянии

Аффинор дополнительной деформации, отвечающий отображению (40), имеет вид

$$\Psi_{\text{add}} = \beta \rho \mathbf{i}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{d\rho}{dy} \mathbf{i}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3, \quad (41)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1 \cos \beta x - \mathbf{i}_2 \sin \beta x, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_1 \sin \beta x + \mathbf{i}_2 \cos \beta x.$$

Для  $k$ -го слоя бруса в соответствии с формулами (38), (39), (41)

$$\Psi = \lambda_{(k)} \beta \rho \mathbf{i}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_{(k)}^{-1} \frac{d\rho}{dy} \mathbf{i}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3. \quad (42)$$

Вычисляемая на основании (38), (41), (42) мера деформации Коши–Грина для  $k$ -го слоя бруса (в области  $h_{k-1} < y < h_k$ ) имеет следующий вид:

$$\mathbf{G} = \lambda_{(k)}^2 \beta^2 \rho^2 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_{(k)}^{-2} \left( \frac{d\rho}{dy} \right)^2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3. \quad (43)$$

Эта мера деформации не зависит от координаты  $x$ , что обеспечивает сведение исходной двумерной задачи к одномерной.

Функция  $\rho(y)$  находится из условия несжимаемости

$$\beta \rho \frac{d\rho}{dy} = 1. \quad (44)$$

Уравнение (44) имеет следующее решение:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + 2\beta^{-1}y, \quad \rho_0 = \rho(0), \quad (45)$$

где  $\rho_0$  — неизвестная постоянная.

Подстановка полученных выражений в определяющие соотношения позволяет найти напряжения. Подставив выражения для напряжений в уравнения равновесия, можно найти функцию  $p$  для каждого слоя бруса. Для нахождения постоянных интегрирования используются граничные условия

$$D_{22}^{(1)}(0) = 0, \quad D_{22}^{(n)}(h) = 0, \quad (46)$$

обозначающие отсутствие нагружения оснований составного бруса, и условия сопряжения на поверхностях раздела слоев

$$D_{22}^{(k-1)}(h_k) = D_{22}^{(k)}(h_k), \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (47)$$

Для того, чтобы удовлетворить краевым условиям на концах бруса  $x = 0$ ,  $x = l$  в интегральном смысле, определим главный вектор  $\mathbf{f}$  и главный момент  $\mathbf{M}$  сил, действующих в сечении  $x = \text{const}$  при деформации вида (40). Из уравнений равновесия и граничных условий (46), (47) вытекает, что  $\mathbf{f} = 0$  [24, 25]. Поскольку главный вектор равен нулю, главный момент не зависит от точки приведения (полюса). Выбирая за полюс центр окружностей, в которые переходят при изгибе бруса прямые  $y = \text{const}$ , получим

$$\mathbf{M} = M \mathbf{i}_3, \quad M = M(\beta) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} D_{11}^{(k)} \rho dy. \quad (48)$$

Согласно (48) изгибающий момент одинаков во всех сечениях бруса. Это означает, что реализация деформации изгиба (40) требует приложения к концам бруса только изгибающих моментов, величина которых определяется формулой (48). Функция  $M(\beta)$  является основной характеристикой, определяющей сопротивление составного бруса при изгибе.

### 4.3. Результаты численных расчетов

Приведем некоторые результаты численных расчетов для материала Трелоара (неогуковского материала) [6], когда  $\chi_1^{(k)} = \mu_k = \text{const}$ ,  $\chi_2^{(k)} = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

На рис. 7, 8 даны результаты расчетов для трехслойного бруса ( $n = 3$ ) при  $h_2 = 3h_1$ ,  $h_3 = h = 5h_1$ ,  $\mu_2 = 2\mu_1$ ,  $\mu_3 = \mu_1$ ,  $\lambda_{(1)} = \lambda_{(3)} = 1$  (т.е. нижний и верхний слои предварительно не деформированы и имеют одинаковые свойства, а предварительно деформирован только средний слой; кратность  $\lambda_{(2)}$  начального удлинения этого слоя в направлении оси  $x$  будем обозначать через  $\lambda$ ).

На рис. 7 показаны зависимости изгибающего момента  $M$  от параметра  $\beta$  для разных значений начального удлинения  $\lambda$ . Эти зависимости монотонны и асимптотически стремятся к некоторым предельным значениям, зависящим от  $\lambda$ , при  $\beta \rightarrow \pm\infty$ .

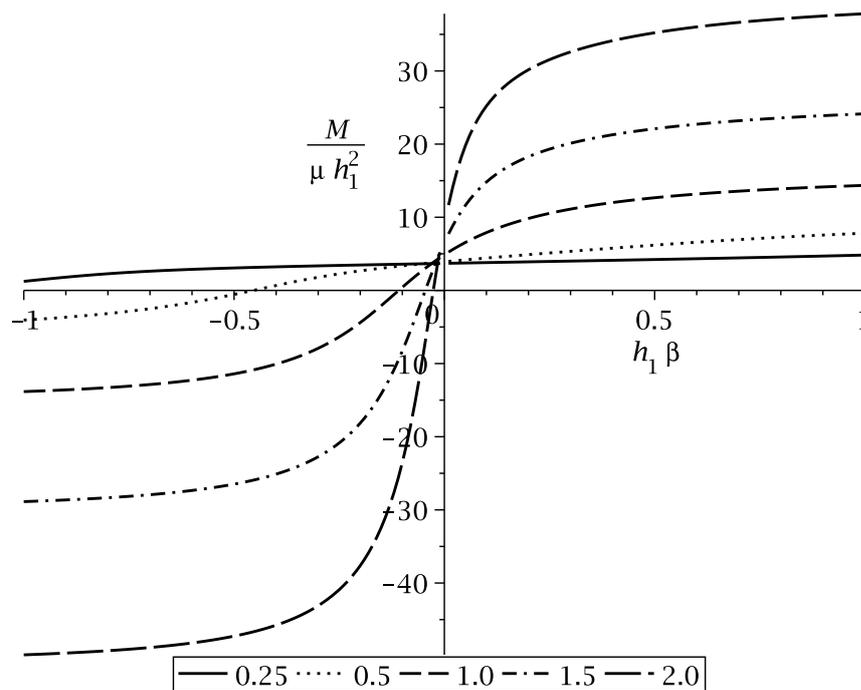


Рис. 7: Зависимости изгибающего момента  $M$  от параметра  $\beta$  для разных значений кратности начального удлинения  $\lambda$  для материала Трелоара (значения  $\lambda$  указаны под рисунком)

На рис. 8 приведена зависимость параметра  $\beta$  от кратности начального удлинения  $\lambda$  для случая  $M = 0$ , т.е. при отсутствии внешних нагрузок. Можно видеть, что если средний слой бруса предварительно растянут в направлении оси  $x$  (т.е. при  $\lambda > 1$ ), то брус изгибается выпуклостью вверх, а если этот слой предварительно сжат ( $\lambda < 1$ ), то брус изгибается выпуклостью вниз.

Отметим также, что зависимость  $\lambda(\beta)$  при отсутствии внешних нагрузок немонотонна и имеет точку максимума при  $\lambda \approx 1.75$ . Это означает, что в случае предварительного растяжения среднего слоя существует предельный относительный угол поворота поперечных сечений бруса при отсутствии внешних нагрузок.

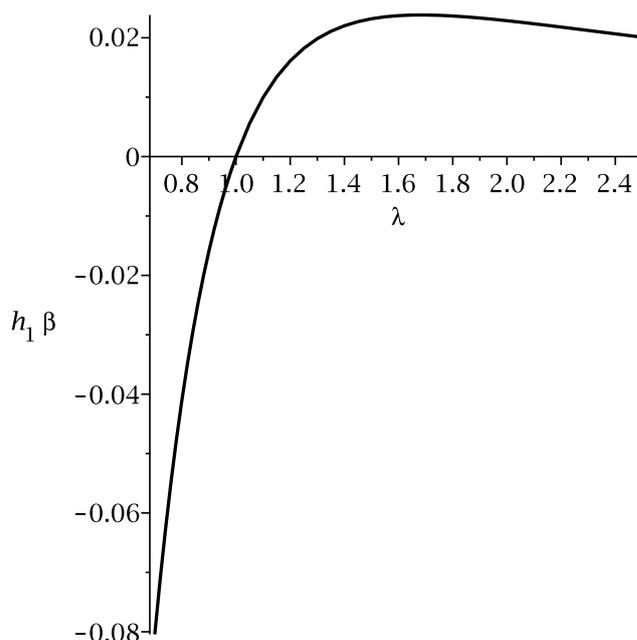


Рис. 8: Зависимость параметра  $\beta$  от кратности начального удлинения  $\lambda$  для материала Трелоара при отсутствии изгибающего момента

Авторы благодарят профессора В.Ан. Левина (МГУ им. М.В. Ломоносова) за совместное обсуждение подходов к постановке задач и результатов их решения.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levin V.A. Theory of repeated superposition of large deformations. Elastic and viscoelastic bodies// International Journal of Solids and Structures. 1998. V. 35. P. 2585–2600.
2. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1999. 224 с.
3. Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: Физматлит, 2002. 272 с.
4. V.A. Levin, K.M. Zingerman, A.V. Vershinin, E.I. Freiman, A.V. Yangirova. Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in

- previously loaded viscoelastic bodies at finite strains // International Journal of Solids and Structures. 2013. Vol. 50. Issue 20-21. P. 3119–3135.
5. Levin V.A., Vershinin A.V. Non-stationary plane problem of the successive origination of stress concentrators in a loaded body. Finite deformations and their superposition // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24. P. 2229–2239.
  6. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
  7. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. — 592 с.
  8. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear, and flexure // Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1949. A252. P. 173–195.
  9. Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. 1960. Т. 2, № 1. С. 20–28.
  10. Гадолин А.В. Теория орудий, скрепленных обручами. Артиллерийский журнал. 1861, № 12.
  11. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994. 560 с.
  12. Левин В.А., Зубов Л.М., Зингерман К.М. Кручение составного нелинейно упругого цилиндра с предварительно напряжённым включением // Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 5. С. 507–510.
  13. Levin V.A., Zubov L. M., Zingerman K. M. The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains // Int. J. Solids a. Struct. 2014. V. 51. № 6. P. 1403–1409.
  14. Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г. (под редакцией В.А. Левина) Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М.: Физматлит, 2004. — 407 с.
  15. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1955. 445 с.
  16. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials // Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1948. A240. P. 459–508.
  17. Mooney M.A. Theory of large elastic deformation // Journal of Applied Physics. 1940. № 11. P. 582–592.
  18. Poynting J. H. On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted // Proc. R. Soc. Lond. A 1909 **82**, p. 546–559.

19. Zubov L.M. О прямом и обратном эффекте Пойнтинга в упругих цилиндрах // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 2. С. 194–196.
20. Mihai L.A., Goriely A. Positive or negative Poynting effect? The role of adscititious inequalities in hyperelastic materials // Proc. R. Soc. A. 2011. V. 467. P. 3633–3646.
21. Moon H., Truesdell C. Interpretation of adscititious inequalities through the effects pure shear stress produces upon an isotropic elastic solid // Arch. Ration. Mech. Anal. 1974. V. 55. P. 1–17.
22. Зеленина А. А, Zubov Л.М. Нелинейная теория чистого изгиба призматических упругих тел// Прикл. мат. и мех. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 416–424.
23. Левин В.А., Zubov Л.М., Zingerman К.М. Точное решение задачи о нелинейном изгибе составного бруса с предварительно деформированным слоем при конечных деформациях // Докл. РАН. 2015. Т. 460, № 2. С. 155–158.
24. Levin V.A., Zubov L. M., Zingerman K. M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains // Int. J. Solids a. Struct. 2015. V. 67–68. P. 244–249.
25. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains. Part 2. Solution for different types of incompressible materials // International Journal of Solids and Structures. 2016. V.100-101. P.558-565.

## REFERENCES

1. Levin V.A. Theory of repeated superposition of large deformations. Elastic and viscoelastic bodies. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. V. 35. P. 2585–2600.
2. Levin, VA 1999, *Mnogokratnoe nalozhenie bol'shih deformaciy v uprugih i vyazkouprugih telah [Repeated superposition of large deformations in elastic and viscoelastic bodies]*, Fizmatlit, Moscow.
3. Levin, VA & Zingerman, KM 2002, *Ploskie zadachi mnogokratnogo nalozheniya bol'shih deformaciy. Metody resheniya. [Plane problems of repeated superposition of large strains. Methods of solution]* Fizmatlit, Moscow.
4. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V., Freiman, E.I., Yangirova, A.V. 2013. "Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains" *Int. J. Solids and Structures*. Vol. 50. Issue 20-21. P. 3119–3135.

5. Levin V.A., Vershinin A.V. 2008. "Non-stationary plane problem of the successive origination of stress concentrators in a loaded body. Finite deformations and their superposition" *Communications in Numerical Methods in Engineering*. Vol. 24. P. 2229–2239.
6. Lurie, A.I. 1980, *Nelineynaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]* Nauka, Moscow.
7. Truesdell, C. 1972, *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Baltimore, Maryland, The Johns Hopkins University.
8. Rivlin R.S. 1949. "Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear, and flexure." *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Vol. A252. P. 173–195.
9. Bartenev, G.M., Khazanovich, T.N. 1960. "The law of high-elastic strains of mesh polymers". *Vysokomolekulyarnye soedineniya*. Vol. 2, № 1. P. 20–28.
10. Gadolin, A.V., 1861. "Theory of cannons fastened by bands." *Artilleriyskiy zhurnal*. 1861, № 12.
11. Sedov, L.I. 1994, *Mekhanika Sploshnoy Sredy [Mechanics of Continuous Medium]* Vol. 2. Nauka, Moscow.
12. Levin, V.A., Zubov, L.M. & Zingerman, K.M. 2013 "Torsion of a composite nonlinear elastic cylinder with a prestressed inclusion," *Doklady Physics*, Vol. 58, No. 12, pp. 540–543.
13. Levin V.A., Zubov L.M. & Zingerman K.M. 2014. "The torsion of a composite, nonlinear-elastic cylinder with an inclusion having initial large strains" *Int. J. Solids a. Struct.* Vol. 51. № 6. P. 1403–1409.
14. Levin, V.A., Morozov, E.M. & Matvienko Yu.G. (Ed. by V.A. Levin). 2004, *Izbrannyye Nelineinye Zadachi Mehaniki Razrusheniya [Selected Nonlinear Problems of Fracture Mechanics]* Fizmatlit, Moscow.
15. Green, A.E., & Adkins, J.E., 1960. *Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics*. Oxford, Clarendon Press.
16. Rivlin R.S. 1948. "Large elastic deformations of isotropic materials" *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Vol. A240. P. 459–508.
17. Mooney, M.A. 1940. "Theory of large elastic deformation," *Journal of Applied Physics*. № 11. P. 582–592.
18. Poynting J. H. 1909, "On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted," *Proc. R. Soc. Lond. A*. Vol. 82, pp. 546–559.

19. Zubov, L.M., 2001. "Direct and inverse Poynting effects in elastic cylinders," *Doklady Physics* Vol. 46, pp. 675–677.
20. Mihai, L.A., Goriely, A., 2011. "Positive or negative Poynting effect? The role of adscititious inequalities in hyperelastic materials," *Proc. R. Soc. A* V. 467. P. 3633–3646.
21. Moon, H., Truesdell, C. 1974. "Interpretation of adscititious inequalities through the effects pure shear stress produces upon an isotropic elastic solid," *Arch. Ration. Mech. Anal.* Vol. 55. P. 1–17.
22. Zelenina, A.A., & Zubov, L.M., 2000. "The non-linear theory of the pure bending of prismatic elastic solids," *J. Appl. Math. Mech.* Vol. 64, pp. 399–406.
23. Levin, V.A., Zubov L.M., Zingerman, K.M., 2015. "Exact solution of the nonlinear bending problem for a composite beam containing a prestressed layer at large strains," *Doklady Physics*. Vol. 60, No. 1. P. 24–27.
24. Levin V.A., Zubov L.M., & Zingerman, K.M. 2015. "An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains," *Int. J. Solids a. Struct.* Vol. 67–68. P. 244–249.
25. Levin V.A., Zubov L.M., & Zingerman, K.M. 2016. "An exact solution for the problem of flexure of a composite beam with preliminarily strained layers under large strains. Part 2. Solution for different types of incompressible materials," *International Journal of Solids and Structures*. Vol.100–101. P.558–565.

Тверской государственный университет.

Южный федеральный университет.

Получено 10.07.2017

принято в печать 14.09.2017