ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 4

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-252-258

Теорема о среднем для неполных рациональных тригонометрических сумм[1]

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2009@live.ru
Салиба Холем Мансур — кандидат физико-математических наук, доцент факультета естественных и прикладных наук университета Нотр-Дам-Луэз.
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Аннотация

При $2k > 0.5n(n+1)+1$ $0 \leq l \leq 0,5k-w-1, w = [\ln n/\ln p,]$ доказана асимптотическая формула для числа решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k \equiv y_1 + \cdots + y_k \pmod{p^m} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv y_1^n + \cdots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

где неизвестные $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ пробегают значения от 1 до p^{m-l} из полной системы вычетов по модулю p^m.

При $2k \leq 0.5n(n+1)+1$ найденная формула не имеет места.

Пусть $1 \leq s < r < \cdots < n, s+r+\cdots+n < 0.5n(n+1), 0 \leq l \leq 0,5k-w-1$. Тогда при $2k > s+r+\cdots+n$ для числа решений системы сравнений

$$\begin{cases} x_1^s + \cdots + x_k^s \equiv y_1^s + \cdots + y_k^s \pmod{p^m} \\ x_1^r + \cdots + x_k^r \equiv y_1^r + \cdots + y_k^r \pmod{p^m} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv y_1^n + \cdots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

где неизвестные $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ принимают значения от 1 до p^{m-l} из полной системы вычетов по модулю p^m, найдена асимптотическая формула. Эта формула не имеет места при $2k \leq s+r+\cdots+n$.

Ключевые слова: неполные рациональные тригонометрические суммы, метод Хуа Локена, показатель сходимости среднего значения неполных тригонометрических сумм

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков, Н. М. Салиба. Теорема о среднем для неполных рациональных тригонометрических сумм // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 252–258.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00-071

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 4

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-252-258

Mean-value theorem for non-complete rational trigonometric sums

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru
Saliba Holem Mansour — Ph.D. Assistant Professors of faculty of natural & applied sciences of Notre Dame University Louaize
e-mail: qwe123@rocketmail.com

Abstract

For $2k > 0.5n(n+1)+1$ $0 \leq l \leq 0,5k-w-1, w = [\ln n/\ln p,]$ the asymptotic formulas was proved for the number of solutions of the system of congruences

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k \equiv y_1 + \cdots + y_k \pmod{p^m} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv y_1^n + \cdots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

where unknowns $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ run values up 1 to p^{m-l} from the complete system residues by modulo p^m.

The finding formula for $2k \leq 0.5n(n+1)+1$ has no the place.

Let be $1 \leq s < r < \cdots < n, s+r+\cdots+n < 0.5n(n+1), 0 \leq l \leq 0,5k-w-1$. Then as $2k > s+r+\cdots+n$ for the number of the system of congruencies

$$\begin{cases} x_1^s + \cdots + x_k^s \equiv y_1^s + \cdots + y_k^s \pmod{p^m} \\ x_1^r + \cdots + x_k^r \equiv y_1^r + \cdots + y_k^r \pmod{p^m} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv y_1^n + \cdots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

where unknowns $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ run values up 1 to p^{m-l} from the complete system residues by modulo p^m, was found the asymptotic formula. This formula has no place as $2k \leq s+r+\cdots+n$.

Keywords: non-complete rational trigonometric sums, Hua Loo-keng's method, the exponent of convergence of the average value of non-complete trigonometric sums

Bibliography: 10 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, H. M. Saliba, 2018, "Mean-value theorem for non-complete rational trigonometric sums", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 252–258.

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследования по методу тригонометрических сумм ([1]-[10]).

Полной рациональной тригонометрической суммой называют сумму вида

$$S(q;F)=\sum_{x=1}^{q}e^{2\pi i\frac{F(x)}{q}},$$

где q — натуральное число, $F(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x$ — многочлен с целыми коэффициентами, которые в совокупности взаимно просты с q. Как известно, асимптотические формулы для числа решений в аддитивных задачах теории чисел содержат в себе их средние значения вида

$$\sigma=\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{\substack{a_n=0\\(a_n,\ldots,a_1,q)=1}}^{q-1}\cdots\sum_{a_1=0}^{q-1}|q^{-1}S(q;F)|^{2k},$$

где степень осреднения $2k$ равна количеству переменных в аддитивной задаче.

Хуа Ло-кен [2] доказал, что ряд σ сходится при $2k>0,5n(n+1)+2$ и расходится при $2k\le 0,5n(n+1)+2$. Как показал второй автор этой статьи [6], для многочлена вида

$$F(x)=a_nx^n+\cdots+a_rx^r+a_mx^m,$$

где $1\le m<r<\cdots<n, m+r+\cdots+n<0,5n(n+1)$, ряд

$$\sigma'=\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{\substack{a_n=0\\(a_n,\ldots,a_r,a_m,q)=1}}^{q-1}\cdots\sum_{a_r=0}^{q-1}\sum_{a_m=0}^{q-1}|q^{-1}S(q;F)|^{2k}$$

будет сходиться при $2k>m+r+\cdots+n+1$ и расходиться при $2k\le m+r+\cdots+n+1$.

2. Неполные суммы и их средние значения

Рассмотрим неполную рациональную тригонометрическую сумму вида

$$S(p^m;m-l,f(x))=\sum_{x=1}^{p^{m-l}}e^{2\pi i f(x)},\tag{1}$$

$$f(x)=\sum_{s=1}^{n}\frac{a_sx^s}{p^{m_s}},(a_s,p)=1,m_s\le m;l>0.$$

Оценка такой суммы найдена в работе [9]. Её среднее значение $N(p^m;m-l)$ имеет вид

$$N(p^m;m-l)=p^{-mn}\sum_{\max\{m_n,\ldots,m_1\}\le m}1\times$$

$$\times\sum_{\substack{a_n=0\\(a_n,p)=1}}^{p^{m_n}-1}\cdots\sum_{\substack{a_1=0\\(a_1,p)=1}}^{p^{m_1}-1}|S(p^m;m-l,f(x))|^{2k}.\tag{2}$$

При $l=0$ сумма $S(p^m;f)=S(p^m;m,f)$ будет полной рациональной тригонометрической суммой. Асимптотика среднего значения полных сумм получена в работе [10].

Положим $t = \max\{m_1, \ldots, m_n\}$. Из (2) получим

$$N(p^m; m-l) = p^{-mn} \sum_{t=0}^{m} \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,\ldots,a_1,p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} \left| S\left(p^m; m-l, \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x}{p^t}\right) \right|^{2k} =$$

$$= p^{2k(m-l)-mn} \sum_{t=0}^{m-l} \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,\ldots,a_1,p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} \left| p^{-t} S\left(p^t; \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x}{p^t}\right) \right|^{2k} +$$

$$+ p^{-mn} \sum_{t=m-l+1}^{m} \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,\ldots,a_1,p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} \left| S\left(p^t; m-l, \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x}{p^t}\right) \right|^{2k} =$$

$$= p^{2k(m-l)-mn)} \sigma(p^{m-l}) + \sigma'. \tag{3}$$

Запишем все рациональные коэффициенты многочлена в экспоненте суммы как дроби со знаменателем p^m. Получим

$$N(p^m; m-l) = p^{-mn} \sum_{a_n=0}^{p^m-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^m-1} \left| S\left(p^m; m-l, \frac{g(x)}{p^m}\right) \right|^{2k}, g(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s x^s,$$

что равно числу решений следующей системы сравнений

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_k \equiv y_1 + \cdots + y_k \pmod{p^m} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_1^n + \cdots + x_k^n \equiv y_1^n + \cdots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

где неизвестные $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^{m-l}.

Справедливы следующие утверждения.

Пусть $w = [\ln n / \ln p]$, $\quad p^\tau \| (na_n, \ldots, 2a_2, a_1)$, тогда $\tau \le w$.

Определим, следуя Хуа Ло-кену ([2],p.217), решения

$$x = \xi_1 + p\xi_2 + \cdots + p^{s-1}\xi_s + \ldots \tag{4}$$

сравнения $f'(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ следующим образом

$$p^{-\tau_0} f'(\xi_1) \equiv 0 \pmod{p}, p^{u_1} g_{\xi_1}(x) = f(\xi_1 + px) - f(\xi), \tag{5}$$

где коэффициенты полиномов $g_{\xi_1}(x)$ и число p не имеют общего множителя, отличного от 1, и далее по аналогии для $s \ge 1$ положим

$$p^{-\tau_{s-1}} g_{(\xi_1,\ldots,\xi_{s-1})}(\xi_s) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{6}$$

$$p^{u_r} g_{(\xi_1,\ldots,\xi_r)}(x) = g_{(\xi_1,\ldots,\xi_{r-1})}(\xi_r + px) - g_{(\xi_1,\ldots,\xi_{r-1})}(\xi_r), \tag{7}$$

$$k_s = k_{s-1} - u_s, l_s = l_{s-1} - u_s + 1. \tag{8}$$

Лемма 1. *Пусть неравенства $k_{r-1} \ge 2(l_{r-1} + w + 1), k_r < 2(l_r + w + 1)$ определяют число r. Тогда имеем*

$$S(p^k; k-l, f) = \sum_{(\xi_1,\ldots,\xi_r)} e\left(\frac{f(\xi_1)}{p^k} + \frac{g_{\xi_1}(\xi_2)}{p^{k_1}} + \cdots + \frac{g_{\xi_1,\ldots,\xi_{r-1}}(\xi_r)}{p^{k_{r-1}}}\right) \times$$

$$\times S(p^{k_r}; k_r - l_r, g_{(\xi_1,\dots,\xi_r)}).$$

Лемма 2. *Пусть r — наименьшее число по всем решениям $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$, определённым в (4)–(8), и удовлетворяющим неравенствам $k_{r-1} \geq 2(l_{r-1} + w + 1), k_r < 2(l_r + w + 1)$. Тогда*

$$|S(p^k; k - l, f)| \leq (n-1)p^{k-l-r}.$$

Доказательство лемм 1 и 2 ([9], теоремы 1 и 2).

Теорема 1. *Пусть $n \geq 2, m$ — натуральные числа, p — простое число. Тогда при $2k > \frac{n(n+1)}{2} + 1$, $0 \leq l \leq 0,5k - w - 1$ и $m \to \infty$ имеем*

$$N(p^m; m - l) = p^{2k(m-l)-mn}(\sigma_p + O(m^n p^{((m-1)/n))(0,5n(n+1)+1-2k)}),$$

где

$$\sigma_p = 1 + \sum_{t=1}^{+\infty} A(p^t), A(p^t) = \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,\dots,a_1,p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} |p^{-t} S(p^t; (a_n x^n + \dots + a_1 x)/p^t)|^{2k},$$

$$S(p^t; (a_n x^n + \dots + a_1 x)/p^t) = \sum_{x=1}^{p^t} e^{2\pi i \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x}{p^t}}.$$

Доказательство. Так как ряд σ_p сходится при $2k > \frac{n(n+1)}{2} + 1$ и

$$A(p^t) \leq n^{2k}(tp)^n p^{((t-1)/n)(0,5n(n+1+1-2k))}$$

(см.[5], с.69), то из формулы (1), пользуясь оценками лемм 1 и 2, имеем

$$N(p^m; m - l) = p^{2k(m-l)-mn}\sigma(p^{m-l}) + \sigma' =$$

$$= p^{2k(m-l)-mn}(\sigma_p + O(m^n p^{((m-1)/n)(0,5n(n+1+1-2k))})) + \sigma',$$

где сумма σ' определена в (3) и имеет вид

$$\sigma' = p^{-mn} \sum_{t=m-l+1}^{m} \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,\dots,a_1,p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_1=0}^{p^t-1} \left| S\left(p^t; m - l, \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x}{p^t}\right)\right|^{2k}.$$

Теорема 1 доказана.

Утверждение следующей теоремы 2 основано на сходимости ряда σ'_p при $2k > s+r+\dots+n$ (см.[4], с.71, теорема 5).

Теорема 2. *Пусть $1 \leq s < r < \dots < n, m$ — натуральные числа, количество чисел $s, r, \dots, n$ равно l, причём $l < n$, и пусть $p > n$ — простое число, $N_l(p^m)$ — число решений системы сравнений*

$$\begin{cases} x_1^s + \dots + x_k^s \equiv y_1^s + \dots + y_k^s \pmod{p^m} \\ x_1^r + \dots + x_k^r \equiv y_1^r + \dots + y_k^r \pmod{p^m} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n \equiv y_1^n + \dots + y_k^n \pmod{p^m}, \end{cases}$$

где неизвестные $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю p^m. Тогда при $2k > s + r + \dots + n$ и $m \to \infty$ имеем

$$N_l(p^m) = p^{m(2k-l)}(\sigma'_p + O(m^n p^{((m-1)/n))(s+r+\dots n-2k)}),$$

$$\sigma'_p = 1 + \sum_{t=1}^{+\infty} A_l(p^t), A_l(p^t) = \sum_{\substack{a_n=0 \\ (a_n,\dots,a_r,a_s,p)=1}}^{p^t-1} \cdots \sum_{a_r=0}^{p^t-1} \sum_{a_s=0}^{p^t-1} |p^{-t} S(p^t; a_n x^n + \dots + a_r x^r + a_s x^s)|^{2k},$$

$$S(p^t; (a_n x^n + \dots + a_r x^r + a_s x^s)/p^t) = \sum_{x=1}^{p^t} e^{2\pi i \frac{a_n x^n + \dots + a_r x^r + a_s x^s}{p^t}}.$$

3. Заключение

Было бы интересно получить асимптотические формулы теорем 1 и 2 для более коротких неполных рациональных тригонометрических сумм. Авторы предполагают продолжить исследование подобных вопросов для кратных рациональных тригонометрических, начатые вторым автором настоящей статьи [7]-[6]. Но ещё больший интерес представляют оценки очень коротких рациональных тригонометрических и арифметических сумм.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.
2. Hua L.-K. Selected Papers. — New York Inc.: Springer Verlag, 1983, p. 888.
3. Архипов Г. И. Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.
4. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. 1987.
5. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N., Karatsuba A.A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.
6. Чубариков В. Н. Об асимптотических формулах для интнграла И.М.Виноградова и его обобщений // Тр.МИАН., 1981, т.157, 214–232.
7. Чубариков В. Н. Кратные полные рациональные арифметические суммы от значений многочлена // Докл.РАН., 2018, т.478, № 1, 22–24.
8. Архипова Л. Г., Чубариков В. Н., Показатель сходимости особого ряда одной многомерной проблемы // Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2018. № 5. 59-62.
9. Saliba H. M. On non-complete rational trigonometric sums // Чебышевский сборник. 2018. т. 19. № 3.
10. Чубариков В. Н., Об одной теореме о среднем // Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2019. № 1. 59-62.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M., 1980, *Metod trigonometricheskih summ v teorii chisel.* M.: Nauka.
2. Hua L.-K. 1983, *Selected Papers.* New York Inc.: Springer Verlag, p. 888.
3. Arhipov G. I. 2013, *Izbrannye trudy.* Orel: Izd-vo Orlovskogo gos.un-ta, p. 464.

4. Arhipov G. I., Karacuba A. A., Chubarikov V. N. 1987, *Teoriya kratnyh trigonometricheskih summ.* M.: Nauka.

5. Arkhipov G.I., Chubarikov V.N., Karatsuba A.A. 2004, *Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis.* Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39).

6. Chubarikov V. N. 1981, "Ob asimptoticheskih formulah dlya intngrala I. M. Vinogradova i ego obobshchenij" , *Tr.MIAN.,* vol. 157, pp. 214–232.

7. Chubarikov V. N. 2018, "Kratnye polnye racional'nye arifmeticheskie summy ot znachenij mnogochlena" , *Dokl.RAN.*, 2018, vol. 478, № 1, pp. 22–24.

8. Arhipova L. G., Chubarikov V. N., 2018, "Pokazatel' skhodimosti osobogo ryada odnoj mnogomernoj problemy" , *Vestn. Mosk. un-ta. Ser.I, Matematika, mekhanika.* № 5. pp. 59-62.

9. Saliba H. M. 2018, "On non-complete rational trigonometric sums" , *Chebyshevskii sbornik.* vol. 19. № 3.

10. Chubarikov V. N., 2019, "Ob odnoj teoreme o srednem" , *Vestn. Mosk. un-ta. Ser.I, Matematika, mekhanika.* 2019. № 1. pp. 59-62.

Получено 27.07.2018
Принято в печать 22.10.2018