ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 514.113.5

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ СИЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

В. И. Субботин (г. Новочеркасск)
geometry@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются связанные с симметрией свойства замкнутых выпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве. Тематика работы частично относится к задаче обобщения класса правильных (платоновых) многогранников. Исторически первым таким обобщением были равноугольно-полуправильные (архимедовы) многогранники. Направление обобщения правильных многогранников, рассматриваемое автором в данной работе связано с осями симметрии выпуклого многогранника.

Выпуклый многогранник называется симметричным, если он имеет хотя бы одну нетривиальную ось симметрии. Все оси симметрии многогранника пересекаются в одной точке, которая называется центром многогранника. Все рассматриваемые в работе многогранники являются многогранниками с центром.

Ранее были перечислены все многогранники, сильно симметричные относительно вращения граней, а также метрически двойственные им-многогранники, сильно симметричные относительно вращения многогранных углов [9] – [15]. Интересно отметить, что среди сильно симметричных многогранников есть ровно восемь таких, которые не являются даже комбинаторно эквивалентными архимедовым, или равноугольно полуправильным многогранникам.

По определению, свойство сильной симметричности многогранника требует глобальной симметричности многогранника относительно каждой оси симметрии, перпендикулярной грани многогранника. Поэтому представляет интерес нахождение более слабых условий симметрии на элементы многогранника.

Дано новое доказательство локального критерия сильной симметричности многогранника, которое основано на свойствах осей двух последовательных вращений.

Рассмотрены также два класса многогранников, обобщающих понятие сильно симметричного относительно вращения граней многогранника: класс многогранников с изолированными несимметричными гранями и класс многогранников с изолированными несимметричными поясами.

Доказано, что каждый многогранник с изолированными несимметричными гранями может быть получен путём отсечения вершин или рёбер некоторого многогранника, сильно симметричного относительно вращения граней; а каждый многогранник с изолированными несимметричными поясами-путём надстраивания осесимметричных усечённых пирамид на некоторых гранях одного из сильно симметричных относительно вращения граней многогранника. При этом в каждом из этих классов существует многогранник с наибольшим числом граней, не считая двух бесконечных серий: усечённых призм; усечённых по двум вершинам и удлинённых бипирамид.

Ключевые слова: сильно симметричные многогранники, ось вращения, изолированные несимметричные грани, локально симметричные грани, изолированные несимметричные пояса граней.

Библиография: 15 наименований.

V. I. Subbotin

Abstract

The paper deals with the symmetry properties of the associated closed convex polyhedra in three-dimensional Euclidean space. Themes work relates in part to the problem of generalization class of regular (Platonic) polyhedra. Historically, the first such generalizations are equiangularly-semiregular (Archimedean) polyhedra. The direction of generalization of regular polyhedra, considered by the author in this paper due to the symmetry axes of the convex polyhedron.

A convex polyhedron is called symmetric if it has at least one non-trivial symmetry axis. All the axis of symmetry of the polyhedron intersect at one point called the center of the polyhedron. All considered the polyhedra are polyhedra with the center.

Previously we listed all polyhedra, strongly symmetrical with respect to rotation of faces, as well as their dual-metrically polyhedra strongly symmetric with respect to the rotation polyhedral angles [9]–[15]. It is interesting to note that among the highly symmetric polyhedra there are exactly eight of which are not even equivalent to combinatorial Archimedean or equiangularly semiregular polyhedra.

By definition, the property of strong symmetry polyhedron requires a global symmetry of the polyhedron with respect to each axis of symmetry perpendicular to the faces of the polyhedron. It is therefore of interest to find weaker conditions on the symmetry elements of the polyhedron.

We give a new proof of the local criterion of strong symmetry of the polyhedron, which is based on the properties of the axes of two consecutive rotations.

We also consider two classes of polyhedra that generalize the concept of a strongly rotationally symmetrical faces of: a class of polyhedra with isolated asymmetrical faces and the class of polyhedra with isolated asymmetrical zone.

It is proved that every polyhedron with isolated asymmetrical faces can be obtained by cutting off the vertices or edges of a polyhedron, highly symmetrical with respect to rotation faces; and each polyhedron with isolated asymmetrical zone by build axially symmetric truncated pyramids on some facets of one of the highly symmetric with respect to rotation of the faces of the polyhedron.In each of these classes there are the largest number of polyhedron faces excluding two infinite series: truncated prisms; truncated on two apex and elongated bipyramid.

*Keywords:*strongly symmetric polyhedrons, the axis of rotation, isolated asymmetrical face, locally symmetric faces, isolated asymmetrical zone.

Bibliography: 15 title.

1. Введение

В данной статье рассмотрены обобщения одного класса сильно симметричных выпуклых многоганников в трёхмерном евклидовом пространстве, а именно, сильно симметричных многогранников относительно вращения граней, [9]–[15]. Эти обобщения можно рассматривать как расширения класса правильных многогранников. Другие обобщения правильных многогранников можно найти, например в работах [1]–[6], [8].

Напомним, что замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется сильно симметричным относительно вращения граней, если ось вращения каждой грани, перпендикулярная ей и проходящая через её относительную внутреннность, является осью симметрии всего многогранника; при этом ось вращения предполагается нетривиальной и порядок оси вращения не обязательно совпадает с порядком оси вращения грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника.

В [13] приведён локальный критерий сильной симметричности многогранника в терминах симметрии звёзд граней:

для того, чтобы многогранник был сильно симметричным относительно вращения граней, необходимо и достаточно, чтобы некоторая нетривиальная ось вращения каждой грани, рассматриваемой как фигура, отделённая от многогранника, являлась осью вращения звезды этой грани.

Под звездой грани A понимается совокупность грани A и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с A;

В данной статье приводится новое, более простое доказательство указанного локального критерия, а также даны его применения для некоторых классов многогранников, связанных с сильно симметричными.

2. О локальном критерии сильной симметричности

Доказательство приведённого выше локального критерия сильной симметричности можно провести следующим образом.

Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Сначала покажем, что все локальные оси симметрии звёзд граней проходят через одну точку. Обозначим O_1 — ось вращения некоторой грани A. Покажем, что все оси граней, принадлежащих звезде грани A, проходят через одну точку, расположенную на оси O_1. Рассмотрим две грани B и C звезды грани A, эквивалентные относительно O_1 и третью грань D с осью вращения O_2 той же звезды, переводящую грань B в грань C . Ось O_1 переводит грань C в некоторую эквивалентную грань E. Но при помощи оси O_1 можно вращением перевести грань B в грань E . Итак, последовательные вращения, переводящие грань B в грань C при помощи оси O_2, а затем грань C — в грань E при помощи оси O_1, — два этих вращения эквивалентны одному вращению относительно оси O_1. Но как известно, если два последовательных вращения относительно двух различных осей имеют результирующее вращение, то две первоначальные оси вращения пересекаются в одной точке. Таким образом, оси вращения граней, входящих в звезду грани A, пересекаются в одной точке на локальной оси вращения грани A. Рассматривая теперь грань звезды грани A, имеющую общие элементы с гранями, не входящими в звезду A, аналогичным рассуждением, последовательно переходя к соседним граням, убеждаемся, что все локальные оси вращения многогранника пересекаются в одной точке.

Далее, для того, чтобы убедиться, что локальное вращение звезды грани A приведёт к самосовмещению всего многогранника, расссмотрим совокупность (эквивалентных относительно оси вращения грани A) граней P, Q, R, S,..., принадлежащих звезде грани A.

Пусть некоторая грань M имеет общие элементы как с гранью P, так и с гранью Q. Такая грань M всегда существует при достаточно большом числе граней многогранника. Так как грани P, Q, R, S,... тоже обладают локальными осями симметрии, то мы получаем совокупность граней M, N, L,.... По доказанному выше все локальные оси вращения пересекаются в одной точке и грани M, N, L,... тоже по условию имеют локальные оси симметрии. Поэтому при вращении вокруг оси, проходящей через грань A, и при переходе грани P в грань Q, грани Q — в грань R и т.д., грань M переходит в N, N переходит в L, и т.д. Таким образом, при вращении вокруг оси грани A самосовмещается не только звезда грани A, но и совокупность граней M, N, L,. . . . Продолжая добавлять таким образом грани к уже самосовмещающейся совокупности граней, мы получим, что при вращении многогранника вокруг оси грани A многогранник самосовмещается, то есть локальная ось вращения грани A является осью вращения всего многогранника. Утверждение доказано. □

Заметим, что для случая n-мерных систем Делоне известны условия симметричности и правильности, найденные в [7].

3. Многогранники с изолированными несимметричными гранями

Всюду в дальнейшем грань многогранника, через которую не проходит локальная ось вращения её звезды, будем называть несимметричной; в противном случаесимметричной. Если в звезде некоторой симметричной грани A имеется некоторая несимметричная грань F, то под звездой грани A понимается объедиение звёзд граней A и F, а сама грань A называется локально симметричной.

Далее будут рассматриваться классы многогранников, некоторые грани которых являются несимметричными и подчинены некоторым условиям. При этом устанавливается, что все такие многогранники могут быть получены из сильно симметричных многогранников. Несимметричная грань F многогранника называется изолированной, если все грани, входящие в звезду F, симметричны. Если в многограннике каждая несимметричная грань изолирована, то многогранник называется многогранником с изолированными несимметричными гранями.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *При условии локальной симметричности каждой симметричной грани всякий многогранник F с изолированными несимметричными гранями может быть получен путём усечения вершин или рёбер из некоторого многогранника, сильно симметричного относительно вращения граней.Существует многогранник F с максимальным числом граней 182, причём этот многогранник единственный за исключением бесконечной серии усечённых призм.*

Доказательство. Рассмотрим плоскости, содержащие несимметричные грани. Будем сдвигать параллельно эти плоскости в направлении внешности многогранника; при этом будем следить за тем, чтобы локальная симметричность остальных граней не нарушалась. Осуществляя таким образом параллельные сдвиги плоскостей несимметричных граней, мы добьёмся того, что полупространства, определяемые плоскостями граней многогранника, образуют многогранник P с локально симметричными гранями. Из доказанного локального критерия сильной симметричности следует, что P является сильно симметричным относительно вращения граней. Заметим, что оси симметрии многогранника P не обязательно совпадают по числу и по порядку с осями симметрии первоначального многогранника F. Осуществляя теперь обратный параллельный сдвиг первоначальных плоскостей, мы получим данный многогранник F с изолированными симметричными гранями.

Для того, чтобы указать многогранник с изолированными симметричными гранями и с максимальным числом граней, нам необходимо выбрать сильно симметричный многогранник с наибольшим числом вершин и граней. Таким многогранником, согласно [10] является усечённый икосододекаэдр. Производя на этом многограннике наибольшее число возможных усечений вершин или рёбер, получим, что искомое число получается усечением вершин усечённого икосододекаэдра, т.е 182. Теорема доказана. □

4. Многогранники с изолированными поясами

Поясом P несимметричных граней выпуклого многогранника в трёхмерном евклидовом пространстве называется такая последовательность несимметричных граней, что каждые две соседние грани имеют только одно общее ребро — соединительное; последняя грань пояса также имеет только одно общее ребро с первой гранью. Помимо соединительных рёбер имеются две компоненты связности множества рёбер пояса P.

Первая компонента — рёбра, которые предполагаются образующими стороны некоторой грани G. Это множество — внутренняя граница пояса.

Вторая компонента — множество рёбер, не являющихся ни соединительными, ни внутренними; рёбра второй компоненты образуют внешнюю границу пояса, которую будем предполагать плоским многоугольником, каждая сторона которого является ребром грани, не входящей ни в один пояс; причём различные рёбра внешней границы входят в границу различных граней.

Грань G многогранника при этом называется изолированной поясом P граней. Совокупность грани G и её изолирующего пояса называется островом. Звездой острова S называется остров S вместе со всеми гранями, имеющими некоторые вершины общими с вершинами S.

Теорема 2. *Всякий выпуклый многогранник F с максимальным числом изолированных поясов такой, что через каждую изолированную поясом грань G проходит локальная ось симметрии звезды острова, может быть получен из одного из сильно симметричных относительно вращения многогранников [15] путём последовательного надстраивания над некоторыми гранями усечённых осесимметричных пирамид. Существует ровно три таких многогранника с максимальным числом граней, равным 182, не считая бесконечные серии усечённых призм и удлинённых усечённых бипирамид.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1 рассмотрим плоскости, содержащие изолированные, но уже локально симметричные грани. Будем сдвигать параллельно эти плоскости, следя за тем, чтобы не нарушалась локальная симметричность островов. Указанным параллельными переносами мы добьёмся того, что останутся только внешние границы поясов. Каждая полученная внешняя граница, очевидно, является границей некоторой грани. Таким образом, применяя локальный критерий симметричности, видим, что полученный многогранник является сильно симметричным относительно вращения граней. Осуществляя теперь построение усечённых пирамид с осью симметрии грани, получим первоначальный многогранник. Для доказательства второй части теоремы снова рассмотрим усечённый икосододекаэдр– многогранник сильно симметричный и с максимальным числом граней. Усечённые пирамиды здесь можем надстраивать либо над 4-уголными, либо над 6-угольными, либо над 10-угольными гранями. В трёх этих случаях получаем одно и то же число граней – 182. Теорема доказана. □

Заключение

Полученные классы многогранников с изолированными несимметричными гранями и изолированными несимметричными поясами расширяют класс сильно симметричных относительно вращения граней многогранников и относятся к многогранникам с центром. Условия локальной симметрии на симметричные грани полностью характеризуют эти классы в классе выпуклых многогранников.Следует отметить, что если не ограничиваться условием выпуклости многогранников с изолированными несимметричными поясами, а локальные условия симметрии оставить такими же, как и в случае выпуклых многогранников, то получим класс симметричных невыпуклых многогранников нулевого рода.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коши О. Исследование о многогранниках // УМН. 1944. Т. 10. С. 5–17.
2. Coxeter H. S. M. Regular polytopes, London-NY., 1963. 648p.
3. Ефремович В. А. Трёхмерные правильные многогранники // УМН. 1947. Т. 2, вып. 5. С. 197.
4. Грек А. С. Правильные многогранники на замкнутой поверхности с эйлеровой характеристикой, равной -3 // Известия высших учебных заведений, сер. Математика. 1966. № 6. С. 50–53.
5. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. № 2. 220 с.
6. Стрингхем В. И. Правильные фигуры в n-мерном пространстве // УМН. 1944. № 10. С. 22-–33.
7. Долбилин Н. П. Критерий кристалла и локально антиподальные множества Делоне // Труды Международной конференции “Квантовая топология”, Вестник Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2014. № 17. С. 5—16.
8. Тимофеенко А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сб.. 2011. Т. 12 №2, С. 118-–126.
9. Субботин В. И. О вполне симметричных многогранниках // Материалы Международной конференции по дискретной геометрии и её приложениям, посвящ. 70-летию проф. С. С.Рышкова. М.: МГУ. 2001. С. 88–89.
10. Субботин В. И. Перечисление многогранников, сильно симметричных относительно вращения // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону. 2002. С. 77–78.
11. Субботин В. И. О двух классах симметричных многогранников // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. №3. С. 17–19.
12. Subbotin V. I. Characterization of polyhedral partitioning a space // Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations. Kiev, September, 22-28, 2003. p. 46.
13. Субботин В. И. О многогранниках, сильно симметричных относительно вращения // Чебышевский сборник. 2006. Т. VII, № 2(18). С. 168–171.
14. Субботин В. И. Многогранники с максимальным числом несимметричных граней // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников. Материалы Международной конф., посвящ. 100-летию Н. В. Ефимова. М.: Макс-Пресс. 2010. С. 60–61.

15. Субботин В. И. О симметричных многогранниках с несимметричными гранями // Материалы Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», посвящ. 80-летию акад. О. Б. Лупанова. М.: МГУ, 2012. С. 398–400.

REFERENCES

1. Cauchy, O. 1944, "Recherches sur les Polyédres" ,*Uspechi matematicheskih nauk"*, vol. 10, pp. 5–17.

2. Coxeter, H. S. M. 1963, "Regular polytopes" , *London, N-Y.*, 648p.

3. Efremovich, V. A. 1947, "Three-dimensional regular polyhedra" , *Uspechi matematicheskih nauk* , vol. 2, issue 5, p. 197.

4. Grek, A. S. 1966, "Regular polyhedra on a closed surface with the Euler characteristic equal to -3" , *Izvestija vischih uchebnyh zavedeniy, ser. Matematika* , vol. 6, pp. 50–53.

5. Zalgaller, V. A. 1967, "Convex polyhedra with regular faces" , *Zapiski nauchnych seminarov LOMI*, vol. 2, 220 p.

6. Stringham, W. I. 1944, "Regular figures in n-dimensional space" , *Uspechi matematicheskih nauk* , № 10, pp. 22—33.

7. Dolbilin, N. P. 2014, "The criterion of the crystal and the locally antipodal sets Delaunay"; *Proceedings of the International Conference "Quantum Topology". Vestnik Chelyabinskogo universiteta. Matematika. Mechanika. Informatika.*, № 17, pp. 5—16.

8. Timofeenko, A. V. 2011, "On convex polyhedra with equiangular and parquet faces" , *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, № 2(38), pp. 118—126. (Russian).

9. Subbotin, V. I. 2001, "On Completely symmetrical polyhedra" , *Megdunarudnoy conferencii po diskretnoy geometrii i eyo prilogeniyam, posviash. 70-letiju prof. S. S. Ryshkova (Proc. Int. Conf. on discrete geometry and its applications), Moskow,* pp. 88–89.

10. Subbotin, V. I. 2002, "The enumeration of polyhedra, strongly symmetrical with respect to rotation" , *Trudy megdunarodnoy shkoly-seminara po geometrii i analizu pamyti N. V. Efimova (Proc. Int. School-Seminar on Geometry and Analysis), Rostov-on-Don*, pp. 77–78.

11. Subbotin, V. I. 2003, "On two classes of symmetric polyhedra" , *Izvestiya vuzov. Sev.-kavk. region. Estestv. nauki*, №3. pp. 17–19.

12. Subbotin, V. I. 2003, "Characterization of polyhedral partitioning a space" , *Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations, Kiev,* p. 46.

13. Subbotin, V. I. 2006, "About polyhedra strongly symmetric with respect to rotation" , *Chebyshevskiy sbornik* , vol. VII, №2(18), pp. 168–171.

14. Subbotin, V. I. 2010, "Polyhedra with the maximum number of asymmetrical faces", *Materialy megdunarodnoy konferencii "Metricheskaja geometriya poverchnostey i mnogogrannikov", posvjachennoi 100-letiyu N. V. Efimova (Proc. Int. Conf. "Metric geometry of surfaces and polyhedra"), Moscow,* pp. 60–61.

15. Subbotin, V. I. 2012, "On symmetric polyhedra with asymmetrical faces", *Materialy megdunarodnogo seminara "Diskretnaja matematika i ejo prilogeniya", posvjachennogo 80-letiyu O. B. Lupanova (Proc. Int. Seminar "Discrete Mathematics and Its Applications"), Moscow,* pp. 398–400.

ЮРГПУ(НПИ)
Получено 03.05.2015