ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-90-100

Об условии удвоения для положительно определенных функций на полуоси со степенным весом[1]

Горбачёв Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: dvgmail@mail.ru

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики института прикладной математики и компьютерных наук, Тульский государственный университет.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Непрерывные неотрицательные положительно определенные функции удовлетворяют следующему свойству:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \leqslant C(R)\int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \quad R\geqslant 1, \tag{$*$}$$

где наименьшая положительная константа $C(R)$ не зависит от f. При $R=2$ это свойство хорошо известно как условие удвоения в нуле. Данные неравенства имеют приложения в теории чисел.

В одномерном случае неравенство $(*)$ изучалось Б.Ф. Логаном (1988), а также недавно А. Ефимовым, М. Гаалом и Сц. Ревешем (2017). Было доказано, что $2R-1\leqslant C(R)\leqslant 2R+1$ для $R=2,3,\ldots$, откуда следует, что $C(R)\sim 2R$. Вопрос о точных константах здесь открыт.

Многомерный вариант неравенства $(*)$ для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ исследовался Д.В. Горбачевым и С.Ю. Тихоновым (2018). В частности доказано, что для непрерывных положительно определенных функций $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$

$$\int_{|x|\leqslant R} f(x)\,dx \leqslant c_nR^n\int_{|x|\leqslant 1} f(x)\,dx,$$

где $c_n\leqslant 2^n n\ln n\,(1+o(1))(1+R^{-1})^n$ при $n\to\infty$. Отсюда на радиальных функциях получаем одномерное весовое неравенство

$$\int_0^R f(x)x^{n-1}\,dx \leqslant c_nR^n\int_0^1 f(x)x^{n-1}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Мы изучаем следующее естественное весовое обобщение данных неравенств:

$$\int_0^R f(x)x^{2\alpha+1}\,dx \leqslant C_\alpha(R)\int_0^1 f(x)x^{2\alpha+1}\,dx, \quad \alpha\geqslant -1/2,$$

где $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ — произвольная четная непрерывная положительно определенная функция относительно веса $x^{2\alpha+1}$. Это понятие было введено Б.М. Левитаном (1951) и означает, что для произвольных $x_1,\ldots,x_N\in\mathbb{R}_+$ матрица $(T_\alpha^{x_i}f(x_j))_{i,j=1}^N$ неотрицательно определенная. Здесь T_α^t — оператор обобщенного сдвига Бесселя–Гегенбауэра. Левитан доказал

[1]Результаты исследований опубликованы при финансовой поддержке ТулГУ в рамках научного проекта № 2017-24ПУБЛ.

аналог классической теоремы Бохнера для таких функций, согласно которому f имеет неотрицательное преобразование Ганкеля (в смысле меры).

Мы доказываем, что для каждого $\alpha \geqslant -1/2$

$$c_1(\alpha)R^{2\alpha+2} \leqslant C_\alpha(R) \leqslant c_2(\alpha)R^{2\alpha+2}, \quad R \geqslant 1.$$

Нижняя оценка тривиально достигается на функции $f(x) = 1$. Для доказательства верхней оценки мы применяем нижние оценки сумм вида $\sum_{k=1}^m a_k T^{x_k}\chi(x)$, где χ — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$, а также свойства свертки Бесселя.

Ключевые слова: положительно определенная функция, условие удвоения, преобразование Ганкеля, оператор обобщенного сдвига Бесселя.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. Об условии удвоения для положительно определенных функций на полуоси со степенным весом // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 90–100.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-90-100

On the doubling condition for non-negative positive definite functions on on the half-line with power weight

Gorbachev Dmitry Viktorovich — professor of the department of applied mathematics and computer science, doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University.
e-mail: dvgmail@mail.ru
Ivanov Valerii Ivanovich — Head of the department of applied mathematics and computer science, doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University.
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

Continuous non-negative positive definite functions satisfy the following property:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \leqslant C(R)\int_{-1}^{1} f(x)\,dx, \quad R \geqslant 1, \qquad (*)$$

where the smallest positive constant $C(R)$ does not depend on f. For $R = 2$, this property is well known as the doubling condition at zero. These inequalities have applications in number theory.

In the one-dimensional case, the inequality $(*)$ was studied by B.F. Logan (1988), as well as recently by A. Efimov, M. Gaál, and Sz. Révész (2017). It has been proven that $2R - 1 \leqslant C(R) \leqslant 2R + 1$ for $R = 2, 3, \ldots$, whence it follows that $C(R) \sim 2R$. The question of exact constants is still open.

A multidimensional version of the inequality $(*)$ for the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ was investigated by D.V. Gorbachev and S.Yu. Tikhonov (2018). In particular, it was proved that for continuous positive definite functions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$$\int_{|x|\leqslant R} f(x)\,dx \leqslant c_n R^n \int_{|x|\leqslant 1} f(x)\,dx,$$

where $c_n \leqslant 2^n n \ln n\,(1+o(1))(1+R^{-1})^n$ при $n\to\infty$. For radial functions, we obtain the one-dimensional weight inequality

$$\int_0^R f(x)x^{n-1}\,dx \leqslant c_n R^n \int_0^1 f(x)x^{n-1}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$$

We study the following natural weight generalization of such inequalities:

$$\int_0^R f(x)x^{2\alpha+1}\,dx \leqslant C_\alpha(R) \int_0^1 f(x)x^{2\alpha+1}\,dx, \quad \alpha\geqslant -1/2,$$

where $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ is an even positive definite function with respect to the weight $x^{2\alpha+1}$. This concept has been introduced by B.M. Levitan (1951) and means that for arbitrary $x_1,\dots,x_N\in\mathbb{R}_+$ matrix $(T_\alpha^{x_i}f(x_j))_{i,j=1}^N$ is semidefinite. Here T_α^t is the Bessel–Gegenbauer generalized translation. Levitan proved an analogue of the classical Bochner theorem for such functions according to which f has the nonnegative Hankel transform (in the measure sense).

We prove that for every $\alpha\geqslant -1/2$

$$c_1(\alpha)R^{2\alpha+2} \leqslant C_\alpha(R) \leqslant c_2(\alpha)R^{2\alpha+2}, \quad R\geqslant 1.$$

The lower bound is trivially achieved on the function $f(x)=1$. To prove the upper bound we apply lower estimates of the sums $\sum_{k=1}^m a_k T^{x_k}\chi(x)$, where χ is the characteristic function of the segment $[0,1]$, and also we use properties of the Bessel convolution.

Keywords: positive definite function, doubling condition, Hankel transform, Bessel generalized translation.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2018, "On the doubling condition for non-negative positive definite functions on on the half-line with power weight" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 90–100.

1. Введение

В работах [11, 4, 8, 2, 5] изучается следующее интересное свойство неотрицательных непрерывных положительно определенных функций:

$$\int_{-R}^R f(x)\,dx \leqslant C(R) \int_{-1}^1 f(x)\,dx, \quad R\geqslant 1, \tag{1}$$

где положительная константа $C(R)$ не зависит от f. Как отмечается в работе [5] при $R=2$ неравенство (1) хорошо известно как условие удвоения в нуле. Оно широко применяется в теории весовых пространств. Соответственно $C(R)$ неформально можно назвать константой удвоения.

Напомним, что функция функция f называется положительно определенной, если для произвольных точек $x_1,\dots,x_N\in\mathbb{R}$ матрица $(f(x_i-x_j))_{i,j=1}^N$ будет неотрицательно определенной. По классической теореме Бохнера непрерывная функция f будет положительно определенной тогда и только тогда, когда

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{ixy}\,d\mu(y),$$

где μ — неотрицательная конечная мера Бореля [12, Chap. 1].

Будем по-прежнему обозначать через $C(R)$ уже наименьшую константу в неравенстве (1). Для нее справедливы оценки [11, 8]

$$2R-1 \leqslant C(R) \leqslant 2R+1, \quad R\in\mathbb{N},$$

из которых следует, что $C(R) \asymp R$ при всех $R \geqslant 1$. Здесь и далее, как обычно, запись $A \asymp B$ означает, что $C_1 B \leqslant A \leqslant C_2 B$, где константы эквивалентности $C_i > 0$ и зависят только от несущественных параметров.

Точное значение константы $C(R)$ неизвестно ни для какого $R = 2, 3, \ldots$. Однако в работе [11] получены точные значения при нечетных R в похожей, но не эквивалентной задаче.

Одна из мотиваций изучения подобных (1) неравенств обусловлена их приложениями в теории чисел. Например, дискретный вариант неравенства (1), полученный в [4], использовался в работе по теории чисел [14]. Также данная проблематика восходит к проблеме Винера об L^2-суммируемости рядов Фурье положительно определенных периодических функций, интегрируемых в квадрате в окрестности нуля (см. [13, 11, 6]).

Действительная положительно определенная функция обязательно четная. Поэтому неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\int_0^R f(x)\,dx \leqslant C(R) \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Представляет интерес обобщить это неравенство на случай степенного веса следующим образом:

$$\int_0^R f(x) x^{2\alpha+1}\,dx \leqslant C_\alpha(R) \int_0^1 f(x) x^{2\alpha+1}\,dx,$$

где $\alpha \geqslant -1/2$, $C_\alpha(R)$ обозначает наименьшую константу и f — произвольная четная неотрицательная положительно определенная функция относительно веса $x^{2\alpha+1}$.

Последнее понятие было введено в [9, § 11] и связано с понятием оператора обобщенного сдвига Бесселя T_α^t (см. секцию 2): четная функция f называется положительно определенной относительно веса $x^{2\alpha+1}$, если для произвольных $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}_+$ матрица $(T_\alpha^{x_i} f(x_j))_{i,j=1}^N$ неотрицательно определенная. В секции 2 мы также приведем аналог теоремы Бохнера для таких функций. Он опирается на преобразование Ганкеля и был доказан в [9, § 11].

Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Для $\alpha \geqslant -1/2$, $R \geqslant 1$ и произвольной четной неотрицательной непрерывной положительно определенной для веса $x^{2\alpha+1}$ функции f справедливо неравенство*

$$\int_0^R f(x) x^{2\alpha+1}\,dx \leqslant C_\alpha(R) \int_0^1 f(x) x^{2\alpha+1}\,dx, \tag{2}$$

где

$$c_1(\alpha) R^{2\alpha+2} \leqslant C_\alpha(R) \leqslant c_2(\alpha) R^{2\alpha+2}, \quad R \geqslant 1. \tag{3}$$

Нижняя граница в (3) получается элементарно, если рассмотреть функцию $f(x) = 1$. Тогда получаем $C_\alpha(R) \geqslant R^{2\alpha+2}$. Нетривиальной частью является доказательство верхней оценки.

В работе [5] изучен многомерный аналог неравенства (1) для случая положительно определенных функций в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. В частности, рассматривая в [5, Example 2] евклидов шар $B_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant R\}$ радиуса R, находим

$$\int_{B_R^n} f(x)\,dx \leqslant c_n R^n \int_{B_1^n} f(x)\,dx, \tag{4}$$

где c_n — некоторая константа, для которой

$$c_n \leqslant 2^n n \ln n\,(1 + o(1))(1 + R^{-1})^n, \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Вопрос об асимптотической точности этой оценки остается открытым. В [5] также получены нижние оценки константы удвоения, несколько лучше тривиальных.

Как хорошо известно, для полуцелых $\alpha = n/2 - 1$ множество четных функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ можно отождествить с классом радиальных функций на $\mathbb{R}^n$. Поэтому из (4) следует, что

$$\int_0^R f(x)x^{n-1}\,dx \leqslant c_n R^n \int_0^1 f(x)x^{n-1}\,dx.$$

Это неравенство согласуется с верхней оценкой в (3) при $\alpha = n/2 - 1$.

Структура работы следующая. В секции 2 мы дадим необходимые сведения из гармонического анализа на полуоси со степенным весом. Они будут использованы в следующей секции 3, где доказывается теорема 1.

2. Гармонический анализ на полуоси со степенным весом

Хорошо известно, что гармонический анализ в пространствах четных функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со степенным весом $x^{2\alpha+1}$, $\alpha \geqslant -1/2$, базируется на преобразовании Ганкеля (см., например, [1, Chap. 7], [10, Chap. 5], [9]):

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(y) := \int_0^\infty f(x) j_\alpha(xy)\,d\nu_\alpha(x), \quad y \in \mathbb{R}_+, \quad d\nu_\alpha(x) = \frac{x^{2\alpha+1}\,dx}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}.$$

Здесь $j_\alpha(t) = \Gamma(\alpha+1)(2/t)^\alpha J_\alpha(t)$ — нормированная функция Бесселя порядка α. Для нее

$$|j_\alpha(t)| \leqslant j_\alpha(0) = 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Оператор $\mathcal{H}_\alpha$ унитарный в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha)$, $\mathcal{H}_\alpha^{-1} = \mathcal{H}_\alpha$ и справедливо равенство Планшереля

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,d\nu_\alpha(x) = \int_0^\infty |\mathcal{H}_\alpha(f)(x)|^2\,d\nu_\alpha(x).$$

Нам понадобится оператор обобщенного сдвига Бесселя (или Гегенбауэра) $T^t = T^t_\alpha$, подробно изученный во многих работах (см., например, [9, 3, 7]). При $\alpha > -1/2$ он имеет вид

$$T^t f(x) = c_\alpha \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + t^2 - 2xt\cos\theta}) \sin^{2\alpha}\theta\,d\theta, \quad x, t \in \mathbb{R}_+,$$

где нормировочная константа

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}$$

выбрана из условия $T^t 1 = 1$; при $\alpha = -1/2$

$$T^t f(x) = \frac{f(x+t) + f(|x-t|)}{2}.$$

Другое полезное интегральное представление для T^t при $\alpha > -1/2$, следующее:

$$T^x f(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} f(z) V_\alpha(x,y,z)\,d\nu_\alpha(z), \tag{7}$$

где $V_\alpha(x,y,z)\,d\nu_\alpha(z)$ — вероятностная мера,

$$V_\alpha(x,y,z) = 2^{1-\alpha}\Gamma(\alpha+1)c_\alpha[((x+y)^2 - z^2)(z^2 - (x-y)^2)]^{\alpha-1/2}(xyz)^{-2\alpha}.$$

Оператор T^t — линейный, симметричный, самосопряженный, положительный,

$$T^0 f(x) = f(x), \quad \mathcal{H}_\alpha(T^t f)(x) = j_\alpha(tx)\mathcal{H}_\alpha(f)(x).$$

Он позволяет определить коммутативную свертку Бесселя

$$(f_1 *_\alpha f_2)(x) = \int_0^\infty T^x f_1(t) f_2(t)\, d\nu_\alpha(t),$$

для которой

$$\mathcal{H}_\alpha(f_1 *_\alpha f_2) = \mathcal{H}_\alpha(f_1)\mathcal{H}_\alpha(f_2).$$

Она неотрицательна для неотрицательных функций. Из представления (7) вытекают свойства локальности оператора T^t, в частности

$$\operatorname{supp}(f_1 *_\alpha f_2)(x) \subset [0, a_1 + a_2],$$

если $\operatorname{supp} f_i \subset [0, a_i]$.

Напомним, что четная функция называется положительно определенной относительно веса $x^{2\alpha+1}$, если матрица $(T^{x_i} f(x_j))_{i,j=1}^N$ неотрицательно определенная для произвольных $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}_+$. В [9, § 11] доказан следующий аналог теоремы Бохнера: если f — непрерывна, то условие положительной определенности эквивалентно представлению

$$f(x) = \int_0^\infty j_\alpha(xt)\, d\sigma(t),$$

где σ — неубывающая функция ограниченной вариации. Отметим, что при $\alpha \geqslant -1/2$ нормированная функция Бесселя является положительно определенной в обычном смысле, поэтому функция f также будет положительно определенной в обычном смысле. Обратное, вообще говоря, неверно.

Если $f \in CL^1(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha)$, то

$$d\sigma(t) = \mathcal{H}_\alpha(f)(t)\, d\nu_\alpha(t), \quad \mathcal{H}_\alpha(f) \geqslant 0.$$

Для положительно определенных относительно веса $x^{2\alpha+1}$ функций f имеем многие привычные свойства положительно определенных функций, в частности, ограниченность $|f(x)| \leqslant f(0)$, $x \in \mathbb{R}_+$, а также тот факт, что $f(\lambda x)$ — положительно определенная для любого $\lambda > 0$.

3. Доказательство теоремы 1

При $\alpha = -1/2$ теорема 1 известна, поэтому пусть $\alpha > -1/2$.

Напомним, что достаточно доказать неравенство $C_\alpha(R) \leqslant c_2(\alpha) R^{2\alpha+2}$. Нам будет удобно установить этот факт в следующем эквивалентном виде:

$$\int_0^R f(x)\, d\nu_\alpha(x) \leqslant A_0^{-1} \int_0^2 f(x)\, d\nu_\alpha(x), \quad R \geqslant 2, \tag{8}$$

где

$$A_0 = A_0(R) \asymp R^{-2\alpha-2} \tag{9}$$

с константами эквивалентности, зависящими только от α. Действительно, чтобы привести неравенство (8) к виду (2) достаточно выполнить замены R на $2R$ и $f(x)$ на $f(2x)$.

3.1. Шаг 1

Пусть χ_I — характеристическая функция интервала $I \subset \mathbb{R}_+$ и $\chi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

Воспользуемся идеей доказательства теоремы 1 из работы [5]. Положим $x_k = k - 1$, где $k = 1, \dots, m$ и x_m — целое число из промежутка $[R + 1/2, R + 3/2)$.

Определим функции

$$A(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k T^{x_k} \chi(x), \quad B(x) = (\chi *_\alpha A)(x),$$

где a_k — некоторые положительные числа, для которых

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 1. \tag{10}$$

Мы выберем числа a_k позднее таким образом, что будет выполняться неравенство

$$A(x) \geqslant A_0, \quad x \in [0, R + 1], \tag{11}$$

где A_0 — константа в (8). Если (11) верно, то

$$B(x) \geqslant A_0 \mathcal{H}_\alpha(\chi)(0), \quad x \in [0, R], \tag{12}$$

где

$$\mathcal{H}_\alpha(\chi)(0) = \int_0^1 d\nu_\alpha(t) = \nu_\alpha(1).$$

Действительно,

$$B(x) = \int_0^\infty \chi(t) T^x A(t)\, d\nu_\alpha(t) = \int_0^1 T^t A(x)\, d\nu_\alpha(t).$$

Если $x \in [0, R]$, то $x + t \leqslant R + 1$ при $t \in [0, 1]$, поэтому

$$T^t A(x) = \int_{|x-t|}^{x+t} A(z) V_\alpha(x, y, z)\, d\nu_\alpha(z) \geqslant A_0 \int_{|x-t|}^{x+t} V_\alpha(x, y, z)\, d\nu_\alpha(z) = A_0 T^t 1 = A_0$$

и (12) верно.

3.2. Шаг 2

Имеем

$$\mathcal{H}_\alpha(B) = \mathcal{H}_\alpha(\chi) \mathcal{H}_\alpha(A),$$

где

$$\mathcal{H}_\alpha(A)(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathcal{H}_\alpha(T^{x_k} \chi)(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k j_\alpha(x_k x) \mathcal{H}_\alpha(\chi)(x).$$

Отсюда и из (6), (10) для любого $x \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{H}_\alpha(B)(x) = (\mathcal{H}_\alpha(\chi)(x))^2 \sum_{k=1}^{m} a_k j_\alpha(x_k x) \leqslant (\mathcal{H}_\alpha(\chi)(x))^2 = \mathcal{H}_\alpha(\chi *_\alpha \chi)(x).$$

Возьмем произвольную четную неотрицательную непрерывную положительно определенную относительно веса $x^{2\alpha+1}$ функцию f. Тогда

$$f(x) = \int_0^\infty j_\alpha(xt)\, d\sigma(t), \quad d\sigma \geqslant 0,$$

и

$$I_1 = \int_0^\infty B(x)f(x)\,d\nu_\alpha(x) = \int_0^\infty \mathcal{H}_\alpha(B)(t)\,d\sigma(t) \leqslant \int_0^\infty \mathcal{H}_\alpha(\chi *_\alpha \chi)(t)\,d\sigma(t)$$
$$= \int_0^\infty (\chi *_\alpha \chi)(x)f(x)\,d\nu_\alpha(x) = I_2.$$

Свертка $\chi *_\alpha \chi$ является положительно определенной относительно веса $x^{2\alpha+1}$, поэтому

$$(\chi *_\alpha \chi)(x) \leqslant (\chi *_\alpha \chi)(0) = \nu_\alpha(1).$$

Кроме того, $\operatorname{supp}(\chi *_\alpha \chi) \subset [0,2]$. Следовательно,

$$I_2 = \int_0^2 (\chi *_\alpha \chi)(x)f(x)\,d\nu_\alpha(x) \leqslant \nu_\alpha(1)\int_0^2 f(x)\,d\nu_\alpha(x).$$

С другой стороны, с учетом неотрицательности функции $B(x)$ и оценки (12)

$$I_1 \geqslant \int_0^\infty B(x)f(x)\,d\nu_\alpha(x) \geqslant A_0\nu_\alpha(1)\int_0^R f(x)\,d\nu_\alpha(x).$$

Таким образом, приходим к нужному неравенству (8).

3.3. Шаг 3. Выбор a_k и константы A_0 в (11)

Нам потребуются равномерные оценки снизу для действий оператора обобщенного сдвига $T^{x_k}\chi(x)$ на характеристическую функцию отрезка $[0,1]$ при x, достаточно близких к x_k.

Лемма 1. *Пусть для* $k = 1,\dots,m$

$$\mu_k = \min\{T^{x_k}\chi(x)\colon |x-x_k| \leqslant 1/2\}.$$

Тогда

$$\mu_k \asymp x_k^{-2\alpha-1}.$$

Доказательство. Вначале убедимся, что $\mu_k > 0$. Действительно, при $k = 1$ имеем $T^{x_1}\chi(x) = T^0\chi(x) = \chi(x)$ и $\mu_1 = 1$. Если $k \geqslant 2$, то $x + x_k \geqslant 1$, $|x-x_k| \leqslant 1/2$ и

$$T^{x_k}\chi(x) = \int_{|x-x_k|}^{x+x_k} \chi(z)V_\alpha(x,x_k,z)\,d\nu_\alpha(z) = \int_{|x-x_k|}^{1} V_\alpha(x,x_k,z)\,d\nu_\alpha(z) \geqslant \mu_k > 0.$$

Покажем, что $\mu_k \asymp x_k^{-2\alpha-1}$. Достаточно проверить большие x_k. Пусть x такое, что $|x-x_k| \leqslant 1/2$. Имеем

$$T^{x_k}\chi(x) = c_\alpha \int_0^\pi \chi\bigl(\sqrt{x^2 + x_k^2 - 2xx_k\cos\theta}\bigr)\sin^{2\alpha}\theta\,d\theta.$$

Здесь интегрирование можно ограничить на отрезок $[0,\theta_{x,x_k}]$, где

$$\theta_{x,x_k} = \arccos\frac{x^2+x_k^2-1}{2xx_k}.$$

Нетрудно видеть, что если $x_k \to \infty$ и $|x-x_k| \leqslant 1/2$, то равномерно по x в этом промежутке

$$\theta_{x,x_k} \asymp x_k^{-1}.$$

Поэтому для некоторой константы $c>0$

$$T^{x_k}\chi(x) \geqslant c_\alpha \int_0^{cx_k^{-1}} \sin^{2\alpha}\theta\,d\theta \asymp x_k^{-2\alpha-1}.$$

Лемма доказана. □

Положим

$$a_k=\mu_k^{-1}A_0,\quad k=1,\dots,m,\quad A_0^{-1}=\sum_{k=1}^{m}\mu_k^{-1}$$

и покажем (11).

Действительно, пусть $x\in[0,R+1]$. Тогда найдется точка x_k, такая что $|x-x_k|\leqslant 1/2$. Поэтому

$$A(x)=\sum_{j=1}^{m}a_jT^{x_j}\chi(x)\geqslant a_kT^{x_k}\chi(x)\geqslant a_k\mu_k=A_0^{-1}.$$

Осталось показать (9). Имеем $x_k=k-1$ и $m<R+3$, поэтому при $R\to\infty$

$$A_0\asymp\sum_{k=1}^{m}\mu_k^{-1}\asymp\sum_{k=1}^{m}x_k^{2\alpha+1}\asymp\sum_{0\leqslant k<R+2}k^{2\alpha+1}\asymp R^{2\alpha+2}.$$

Здесь константы эквивалентности зависят только от α. Этот факт завершает доказательство теоремы 1.

3.4. Финальные замечания

Отметим, что приведенное доказательство достаточно грубое и не дает хорошей оценки константы $c_2(\alpha)$. По аналогии с неравенством (5) было бы интересно выяснить порядок поведения $c_2(\alpha)$ при $\alpha\to\infty$. Однако это представляется непростой задачей, особенно в контексте нахождения точного порядка роста, где этот порядок неизвестен и в многомерном случае. Также представляет интерес улучшить тривиальную оценку $c_1(\alpha)\geqslant 1$ для нижней границы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bateman G., Erdélyi A., et al., Higher Transcendental Functions. Vol. II. New York: McGraw Hill Book Company, 1953.

2. Gaál M., Révész Sz. Gy. Integral comparisons of nonnegative positive definite functions on locally compact abelian groups // arXiv:1803.06409 [math.FA].

3. Ghobber S., Jaming P. The Logvinenko–Sereda theorem for the Fourier–Bessel transform // Integral Transforms and Special Functions. 2013. Vol. 24, no. 6. P. 470–484.

4. Gorbachev D.V. Certain inequalities for discrete, nonnengative, positive definite functions // Izv. Tul. Gos. Univ. Est. nauki 2015. No. 2. P. 5–12. [in Russian]

5. Gorbachev D.V., Tikhonov S.Yu. Doubling condition at the origin for non-negative positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2018 (in press); arXiv:1612.08637 [math.CA].

6. Gorbachev D.V., Tikhonov S.Yu. Wiener's problem for positive definite functions // Math. Z. 2018. Vol. 289, no. 3-4. P. 859–874, DOI 10.1007/s00209-017-1978-9.

7. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Y. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2018. P. 1–51. DOI 10.1007/s00365-018-9435-5.

8. Efimov A., Gaál M., Révész Sz. Gy. On integral estimates of nonnegative positive definite functions // Bull. Aust. Math. Soc. 2017. Vol. 96, no. 1. P. 117–125.

9. Levitan B.M. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions // Uspekhi Mat. Nauk. 1951. Vol. 6, no. 2. P. 102–143. [in Russian]

10. Levitan B.M., Sargsjan I.S. Introduction to spectral theory: Selfadjoint ordinary differential operators. Transl. Math. Monogr. Vol. 39. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1975.

11. Logan B.F. An interference problem for exponentials // Michigan Math. J. 1988. Vol. 35. P. 369–393.

12. Rudin W. Fourier analysis on groups. New York: Interscience Publ., 1962.

13. Shapiro H.S. Majorant problems for Fourier coefficients // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1975. Vol. 26. P. 9–18.

14. Shteinikov Yu.N. On the set of joint representatives of two congruence Classes // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2015. Vol. 290, no. 1. P. 189–196.

REFERENCES

1. Bateman G., Erdélyi A., et al., Higher Transcendental Functions. Vol. II. New York: McGraw Hill Book Company, 1953.

2. Gaál M., Révész Sz. Gy. Integral comparisons of nonnegative positive definite functions on locally compact abelian groups // arXiv:1803.06409 [math.FA].

3. Ghobber S., Jaming P. The Logvinenko–Sereda theorem for the Fourier–Bessel transform // Integral Transforms and Special Functions. 2013. Vol. 24, no. 6. P. 470–484.

4. Gorbachev D.V. Certain inequalities for discrete, nonnengative, positive definite functions // Izv. Tul. Gos. Univ. Est. nauki 2015. No. 2. P. 5–12. [in Russian]

5. Gorbachev D.V., Tikhonov S.Yu. Doubling condition at the origin for non-negative positive definite functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2018 (in press); arXiv:1612.08637 [math.CA].

6. Gorbachev D.V., Tikhonov S.Yu. Wiener's problem for positive definite functions // Math. Z. 2018. Vol. 289, no. 3-4. P. 859–874, DOI 10.1007/s00209-017-1978-9.

7. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Y. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2018. P. 1–51. DOI 10.1007/s00365-018-9435-5.

8. Efimov A., Gaál M., Révész Sz. Gy. On integral estimates of nonnegative positive definite functions // Bull. Aust. Math. Soc. 2017. Vol. 96, no. 1. P. 117–125.

9. Levitan B.M. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions // Uspekhi Mat. Nauk. 1951. Vol. 6, no. 2. P. 102–143. [in Russian]

10. Levitan B.M., Sargsjan I.S. Introduction to spectral theory: Selfadjoint ordinary differential operators. Transl. Math. Monogr. Vol. 39. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1975.

11. Logan B.F. An interference problem for exponentials // Michigan Math. J. 1988. Vol. 35. P. 369–393.

12. Rudin W. Fourier analysis on groups. New York: Interscience Publ., 1962.

13. Shapiro H.S. Majorant problems for Fourier coefficients // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1975. Vol. 26. P. 9–18.

14. Shteinikov Yu.N. On the set of joint representatives of two congruence Classes // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2015. Vol. 290, no. 1. P. 189–196.

Получено 29.05.2018
Принято в печать 17.08.2018