ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 519.2+511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ НЕПОЛНЫХ СУММ ГАУССА

И. С. Тимергалиев, Р. Н. Бояринов (г. Москва)

К 75–летию
профессора А. Л. Шмелькина

Аннотация

Доказана теорема о распределении значений неполных сумм Гаусса. Получены асимптотические формулы для дробных моментов этих сумм.

ON THE DISTRIBUTION OF ABSOLUTE VALUES OF INCOMPLETE GAUSSIAN SUMS

I. S. Timergaliev, R. N. Boyarinov

Abstract

The theorems on the distribution of absolute values incomplete Gauss sums are proved. Asymptotic formulas of the fractional moments of incomplete Gauss sums are proved.

Пусть p — простое, c — целое, $(c;p) = 1$, числа h и x целые в пределах $0 < h < p$ и $0 \leq x < p$, а $\chi(n)$ — комплексный характер по модулю p. Пусть

$$S_h(x) = \sum_{n=x+1}^{x+h} \chi(n) \cdot e^{2\pi icn/p}.$$

Рассмотрим нормированную неотрицательную величину

$$\xi = \xi_p(x) = \left| \frac{S_h(x)}{\sqrt{h}} \right|.$$

В работах [1], [2] доказаны асимптотические формулы для четных моментов величины ξ. В настоящей работе уточнены остаточные члены в асимптотических формулах и доказаны теоремы о распределении значений величины ξ

с равномерными оценками остаточного члена в формуле для функции распределения величины ξ. При рассуждениях будем следовать работе [2].

Пусть $m_a(p) = \frac{1}{p}\sum\limits_{x=0}^{p-1}\xi_p^a(x)$ — a-й момент рассматриваемой случайной величины.

Нижеследующие утверждения будем доказывать при $h = [\ln p]$.

Теорема 1. *Существует такое $p_0 > 0$, что при всех $p > p_0$ и для всех $r \leq \sqrt{h}$ для четных моментов рассматриваемой случайной величины ξ верно равенство*

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{4r!}{h}\right).$$

Доказательство. Предположим, что x принимает значения из интервала $0 \leq x < p$ с одинаковой вероятностью $1/p$. Тогда момент порядка $2r$ случайной величины $\xi_p(x)$ будет равен

$$m_{2r}(p) = \frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}\xi_p^{2r}(x) = \frac{1}{ph^r}\sum_{x=0}^{p-1}|S_h(x)|^{2r} =$$

$$= \frac{1}{ph^r}\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{n_1,\ldots,n_{2r}=1}^{h}\chi\left(\frac{(x+n_1)\cdot\ldots\cdot(x+n_r)}{(x+n_{r+1})\cdot\ldots\cdot(x+n_{2r})}\right)\cdot$$

$$\cdot e^{2\pi i c(n_1+\ldots+n_r-n_{r+1}-\ldots-n_{2r})/p} =$$

$$= \frac{1}{ph^r}\sum_{n_1,\ldots,n_{2r}=1}^{h}e^{2\pi i c(n_1+\ldots-n_{2r})/p}\sum_{x=0}^{p-1}\chi\left(\frac{(x+n_1)\cdot\ldots\cdot(x+n_r)}{(x+n_{r+1})\cdot\ldots\cdot(x+n_{2r})}\right) =$$

$$= \frac{1}{ph^r}\left(J_1 + J_2 + J_3\right),$$

где в сумму J_s, $s = 1, 2, 3$ входят наборы $(n_1, \ldots, n_{2r})$ из класса K_s. Класс K_1 состоит только из тех наборов, для которых $(q_{r+1}, \ldots, q_{2r})$ есть перестановка набора $(q_1, \ldots, q_r)$. В класс K_2 входят только те наборы, для которых рациональная функция, стоящая под знаком характера, является m-ой степенью, где m — минимальное натуральное число, такое что $\chi^m = \chi_0$ (так как χ — комплексный характер, то $m \geq 3$). Кроме того, набор из K_2 не входит в K_1, то есть $(q_{r+1}, \ldots, q_{2r})$ не является перестановкой набора $(q_1, \ldots, q_r)$. Все оставшиеся наборы отнесем к классу K_3.

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно.

$$\frac{1}{ph^r}J_1 = \frac{1}{ph^r}\sum_{(n_1,\ldots,n_{2r})\in K_1}p = \frac{1}{h^r}\sum_{(n_1,\ldots,n_{2r})\in K_1}1 = \frac{1}{h^r}T_1,$$

где T_1 — количество наборов в классе K_1. Очевидно, что

$$r!h(h-1)(h-2)\ldots(h-r+1) \leq T_1 \leq r!h^r.$$

Обозначим

$$\prod = h(h-1)(h-2)\dots(h-r+1) = h^r\left(1-\frac{1}{h}\right)\dots\left(1-\frac{r-1}{h}\right).$$

Поделив равенство на h^r и прологарифмировав его, получаем равенство

$$\ln\frac{\prod}{h^r} = \sum_{k=1}^{r-1}\ln\left(1-\frac{k}{h}\right).$$

Так как верно неравенство $k \le r-1 < \sqrt{h}$, то $1-\frac{k}{h} > 1-\frac{1}{\sqrt{h}}$. Тогда при $h \ge 4$, получаем:

$$\frac{k/h}{1-\frac{k}{h}} \le \frac{k}{h-\sqrt{h}} \le \frac{2k}{h}.$$

Поскольку верно, что $\ln\left(1-\frac{k}{h}\right) > -\frac{k/h}{1-\frac{k}{h}}$, то с учетом полученного выше неравенства имеем следующее:

$$\ln\frac{\prod}{h^r} > \sum_{k=1}^{r-1}-\frac{2k}{h} = -\frac{r(r-1)}{h},$$

откуда следует неравенство на $\prod$:

$$h^r e^{-\frac{r(r-1)}{h}} < \prod.$$

А с учетом того, что $e^{-\frac{r(r-1)}{h}} > 1-\frac{r(r-1)}{h} > 1-\frac{r^2}{h}$, получаем что

$$h^r\left(1-\frac{r^2}{h}\right) < h(h-1)(h-2)\dots(h-r+1).$$

Таким образом, верны следующие неравенства

$$r!\left(1-\frac{r^2}{h}\right) \le \frac{1}{ph^r}J_1 \le r! < r!\left(1+\frac{r^2}{h}\right),$$

или $\frac{1}{ph^r}J_1 = r! + \theta\cdot r!\frac{r^2}{h}$, где $0<\theta<1$.

Оценим J_2. Пусть $f(x) = (x+n_1)\cdot\ldots(x+n_r)$ и $g(x) = (x+n_{r+1})\cdot\ldots(x+n_{2r})$. В силу того, что $(q_1,\dots,q_{2r}) \in K_2$, то $f(x) = d(x)f_0^m(x), g(x) = d(x)g_0^m(x)$, где $d(x)$ — многочлен, делители которого являются многочленами степени меньшей, чем m. Степени многочленов f и g можно представить в виде $r = d+mt_0$, где d — степень многочлена $d(x)$, t_0 — степень многочленов f_0 и g_0. Тогда количество наборов в классе K_2 не превосходит

$$r!^2 h^d h^{2t_0} = r!^2 h^{r-(m-2)t_0}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{ph^r}J_2 = \frac{1}{h^r}\sum_{(n_1,\ldots,n_{2r})\in K_2} e^{2\pi i a(n_1+\ldots-n_{2r})/p} \le \frac{1}{h^r}r!^2 h^{r-(m-2)t_0} \le \frac{r!^2}{h}.$$

Пусть теперь $(n_1,\ldots,n_{2r})\in K_3$. В силу оценки А.Вейля

$$\left|\sum_{x=0}^{p-1}\chi\left(\frac{(x+n_1)\cdot\ldots\cdot(x+n_r)}{(x+n_{r+1})\cdot\ldots\cdot(x+n_{2r})}\right)\right| \le 2r\sqrt{p}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{ph^r}J_3 \le \frac{1}{ph^r}h^{2r}2r\sqrt{p} = 2rh^r\cdot p^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, верно, что $m_{2r}(p) = r! + \theta\left(r!\frac{r^2}{h} + \frac{r!^2}{h} + \frac{2rh^r}{\sqrt{p}}\right)$. Из неравенств $\frac{r^2}{h} \le \frac{2r!}{h}$, которое верно для всех r, и $\frac{2rh^r}{\sqrt{p}} \le \frac{r!^2}{h}$, которое выполняется при $r \le \sqrt{\ln p}$ и $h = [\ln p]$, следует требуемое утверждение.

Оценим меру μ больших значений суммы $S_h(x)$: $\mu = \frac{\nu}{p}$, где $\nu = \#\{x : |S_h(x)| \ge \lambda\sqrt{h}\}$ — количество x, для которых выполняется неравенство в скобках.

Теорема 2. *При $\lambda > 0$ для меры μ больших значений суммы $S_h(x)$ верно неравенство*

$$\mu < 15\cdot e^{-\frac{2\lambda}{e}}.$$

Доказательство. Очевидно, что при $\lambda > \sqrt{h}$ будет верно, что $\nu = 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda \le \sqrt{h}$. Рассмотрим $\lambda \ge e$. Тогда

$$\frac{\nu}{p}\lambda^{2r}h^r = \frac{\nu}{p}(\lambda\sqrt{h})^{2r} \le \frac{1}{p}\sum_{x=0}^{p-1}|S_h(x)|^{2r} = h^r m_{2r}(p).$$

Оценим $m_{2r}(p) = \frac{1}{ph^r}(J_1+J_2+J_3)$ сверху с учетом оценок полученных в ходе доказательства теоремы 1:

$$m_{2r}(p) \le r! + \frac{r!^2}{h} + \frac{2rh^r}{\sqrt{p}} \le 2r!^2 < 2r^{2r},$$

для всех p начиная с некоторого p_0.

Получаем, что $\mu \le 2\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{2r}$.

Для $r = \left[\frac{\lambda}{e}\right]$ верны неравенства $\frac{\lambda}{e} - 1 < r \le \frac{\lambda}{e} < \sqrt{h}$.

С учетом данных неравенств получаем:

$$\mu \le 2e^{-2r} < 2e^2\cdot e^{-\frac{2\lambda}{e}} < 15\cdot e^{-\frac{2\lambda}{e}}.$$

Если $0 < \lambda < e$, то воспользуемся тривиальной оценкой $\mu \le 1$. При таких λ верно, что $1 \le \frac{15}{e^2} \le 15e^{-\frac{2\lambda}{e}}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0 > 0$, что для любого $p > p_0$ справедливо равенство*:

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

где $F_p(\lambda)$ — функция распределения величины $\xi_p(x)$ и $|R_p| \le 810\frac{(\ln\ln\ln p)^2}{\sqrt{\ln\ln p}}$.

Доказательство. Пусть $h = [\ln p]$.

В теореме 1 было показано, что существует такое p_1, что для любого $p > p_1$ можно записать $m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{4r!}{h}\right)$.

Пусть $r \le \frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}$. Тогда $\ln r \le \ln\ln\ln p$. Следовательно, $r\ln r \le \frac{2\ln\ln p}{\ln\ln\ln p}$. Существует такое p_2, что для любого $p > p_2$ верно

$$r! < r^r < e^{\frac{2\ln\ln p}{\ln\ln\ln p}} < (\ln p)^{\frac{1}{3}}$$

Таким образом, для $p > \max(p_0; p_1)$ и при $r \le \frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}$ верно равенство:

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\sqrt{\ln p}}\right),$$

где $|\theta| \le 1$.

Положим $N = \left[\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}\right] + 1$. Так как $\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2} < N < \frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}$ и для данного N выполнены условия теоремы 1 из [3], [5], то

$$F_p(\lambda) = 1 - e^{-\lambda^2} + R_p,$$

где $|R_p| \le 6\left(\frac{134\left(\ln\left(\frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}\right)+1\right)}{\sqrt{\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}} + \frac{1}{2^{\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}} + \frac{3^{\frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}}{\sqrt{\ln p}}\right)$.

Существует p_3 такое, что для всех $p > p_3$ верна цепочка

$$\frac{3^{\frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}}{\sqrt{\ln p}} = \frac{\ln p^{\frac{2\ln 3}{(\ln\ln\ln p)^2}}}{\sqrt{\ln p}} \le \frac{(\ln p)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\ln p}} = \frac{1}{(\ln p)^{\frac{1}{4}}}.$$

Существует p_4 такое, что для всех $p > p_4$ верна цепочка

$$2^{\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}} = (\ln p)^{\frac{\ln 2}{(\ln\ln\ln p)^2}} > \ln\ln p.$$

С учетом того, что

$$\frac{134\left(\ln\left(\frac{2\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}\right) + 1\right)}{\sqrt{\frac{\ln\ln p}{(\ln\ln\ln p)^2}}} \le \frac{135(\ln\ln\ln p)^2}{\sqrt{\ln\ln p}},$$

для всех $p > p_0 = \max(p_1, p_2, p_3, p_4)$ получаем

$$|R_p| \le 810\frac{(\ln\ln\ln p)^2}{\sqrt{\ln\ln p}}.$$

Докажем справедливость следующей теоремы о дробных моментах:

Теорема 4. *Пусть $\xi_p(x)$ — величина, определенная выше. Тогда найдется такое $p_0 > 0$, что для любого $p > p_0$ и $0 < a < \frac{1}{2^5}\ln\ln\ln p$ справедливо равенство*:

$$m_a(p) = \Gamma(0.5a+1) + \theta R_p$$

где $\Gamma(\cdot)$ *— гамма–функция Эйлера,* $|\theta| \le 1$ *и*

$$R_p = \begin{cases} R_1, \quad 0 < a < 30; \\ R_2, \quad 30 \le a \le \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\ln\ln\ln p}; \\ R_3, \quad \frac{1}{2^{22}}\sqrt{\ln\ln\ln p} < a \le \frac{1}{2^5}\ln\ln\ln p; \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{26}\ln\ln\ln\ln p}{\ln\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_2 = 2^7\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{18}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln\ln p}}{a}\right)}{\ln\ln\ln p}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_3 = 2^3\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln\ln p}}{2^{26}}\right).$$

Доказательство. Пусть $h = [\ln p]$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3, получим, что существует такое $p_0 > 0$, что при $p > p_0$ и при $r \le \ln\ln\ln p$ верно равенство

$$m_{2r}(p) = r!\left(1 + \theta\frac{1}{\ln\ln p}\right),$$

где $|\theta| \le 1$.

Положим $\rho = \frac{1}{2^4}$. Поскольку

$$\left[\frac{1}{2^4}\ln\ln\ln p\right] + 1 < \ln\ln\ln p,$$

то можно применить теорему 1 из [4], [5].

В данном случае $\sigma_{2\nu} \equiv \nu!$, $\delta = 1$ и $f(p) = \ln\ln p$, откуда получаем требуемое утверждение.

Заметим, что более лучший результат можно получить из общей теоремы о дробных моментах из [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жимбо Э. К., Чубариков В. Н. О распределении арифметических функций по простому модулю // Дискрет. мат. 2001. Т. 13, № 3. С. 32—41.

2. Жимбо Э. К. О распределении значений модулей неполных сумм Гаусса // Вестник Московского Университета. Сер. Математика. Механика. 2001. № 2. С. 67—69.

3. Бояринов Р. Н. О скорости сходимости распределений случайных величин // Доклады РАН. 2010. Т. 435, № 3. С. 295—297.

4. Бояринов Р. Н. О дробных моментах случайных величин // Доклады РАН. 2010. Т. 436, № 3. С. 299—301.

5. Бояринов Р. Н. Вероятностные методы в теории чисел и приложения в теории аргумента дзета-функции Римана: дис. ... д-ра.физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2012.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Поступило 14.09.2013