

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 539.52:669.14.018

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54

**Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковых и нанокпозиционных материалов<sup>1</sup>**

**Журавлев Геннадий Модестович** — профессор, доктор технических наук, Тульский государственный университет.

*e-mail: technology@tspu.ru*

**Гвоздев Александр Евгеньевич** — главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, профессор, доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Колмаков Алексей Георгиевич** — член-корреспондент РАН, профессор, доктор технических наук, заместитель директора, Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН.

*e-mail: kolmalov@imet.ac.ru*

**Сергеев Александр Николаевич** — заведующий кафедрой технологии и сервиса, старший научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, профессор, доктор педагогических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

*e-mail: technology@tspu.ru*

**Малий Дмитрий Владимирович** — ассистент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

*e-mail: MaliyDmitriy@yandex.ru*

**Аннотация**

В работе рассмотрен подход к решению задач пластического формоизменения с использованием вариационного подхода, который позволяет определить напряженно-деформированное состояние и связанные с ним технологические параметры с учетом совокупности реологических свойств обрабатываемых материалов. На основе первого энергетического принципа механики, строящегося на теоремах об экстремальных свойствах, когда действительному полю скоростей соответствует абсолютный минимум полной мощности процесса формоизменения, составлен энергетический функционал. Энергетический функционал представляет собой баланс мощности внутренних и внешних сил. Под мощностью внутренних сил понимаются затраты мощности пластической деформации; мощности, связанной с наличием поверхностей разрыва скоростей в объеме деформируемой среды; мощности сил трения, на контактной границе с инструментом; инерционная компонента мощности, затрачиваемая на изменение кинетической энергии. Такая постановка дает возможность исследовать так же и процессы высокоскоростного деформирования. Данный функционал характеризует состояние материала при данных условиях обработки. Для решения данного функционала применен метод локальных вариаций, который относится к прямым численным методам вариационного исчисления. Приведен, в качестве примера, алгоритм расчета мощности пластической деформации для процесса обратного выдавливания стакана из изотропного, жесткопластического материала.

<sup>1</sup>Работа выполнена по федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF157717X0271).

*Ключевые слова:* пластическое формоизменение, метод локальных вариаций, изотропная жесткопластическая среда, энергетический функционал, процесс обратного выдавливания.

*Библиография:* 27 названий.

**Для цитирования:**

Г. М. Журавлев, А. Е. Гвоздев, А. Г. Колмаков, А. Н. Сергеев, Д. В. Малий. Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковых и нанокomпозиционных материалов // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 43–54.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

---

UDC 539.52:669.14.018

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54

### Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials

**Zhuravlev Gennady Modestovich** — professor, doctor of technical sciences, Tula State University.

*e-mail: technology@tspu.ru*

**Gvozdev Alexander Evgenievich** — chief researcher of the department of technology and service, professor, doctor of technical sciences, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru*

**Kolmakov Aleksey Georgievich** — corresponding member of RAS, professor, doctor of technical sciences, deputy director, Institute of Metallurgy and Materials Science A.A. Baikova of the Russian Academy of Sciences.

*e-mail: kolmalov@imet.ac.ru*

**Sergeev Alexander Nikolaevich** — head of the department of technology and service, senior researcher of the department of technology and service, professor, doctor of pedagogical sciences, Tula L.N. Tolstoy State Pedagogical University.

*e-mail: technology@tspu.ru*

**Maliy Dmitriy Vladimirovich** — assistant of the department of technology and service, Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: MaliyDmitriy@yandex.ru*

#### Abstract

The paper considers an approach to solving plastic forming problems using a variational approach, which allows to determine the stress-strain state and the technological parameters associated with it, taking into account the combination of rheological properties of the materials being processed. On the basis of the first principle of energy in mechanics, which is built on the theorems on extremal properties, when the absolute minimum of the total power of the form-changing process corresponds to a real velocity field, energy functional has been composed. The energy functional is a power balance of internal and external forces. As the power of internal forces, we understand the cost of power of plastic deformation; power associated with the presence of velocities discontinuity surfaces in the volume of a deformable medium; power of friction forces, on the contact boundary with the tool; inertial component of power expended on the change in kinetic energy. Such a formulation makes it possible to investigate the processes of

high-speed strain in the same way. This functional characterizes the state of the material under these processing conditions. To solve this functional, the method of local variations is applied, which refers to the direct numerical methods of the calculus of variations. An algorithm for calculating the power of plastic strains for the process of reverse extrusion of a glass from an isotropic, rigid-plastic material is given as an example.

*Keywords:* plastic form changing, local variation method, isotropic rigid-plastic medium, energy functional, process of reverse extrusion.

*Bibliography:* 27 titles.

### For citation:

G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, A. N. Sergeev, D. V. Maliy, 2018, "Application of mathematical method of local variations to solve problems of plastic formification of metal, powder and nanocomposition materials" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 43–54.

## 1. Введение

Для анализа процессов пластического формоизменения в настоящее время в связи с развитием вычислительной техники целесообразно использование вариационного подхода, который позволяет определить напряженно-деформированное состояние и связанные с ним технологические параметры с учетом совокупности реологических свойств обрабатываемых материалов. Постановка задачи осуществляется на основе первого энергетического принципа механики, строящегося на теоремах об экстремальных свойствах, когда действительному полю скоростей соответствует абсолютный минимум полной мощности процесса формоизменения по сравнению с ее значением, определенным через произвольное кинематически возможное поле скоростей деформаций.

## 2. Результаты и анализ исследований

При исследовании процессов пластической деформации на основе метода баланса мощностей записывается некоторое энергетическое уравнение – функционал, составляющие которого полностью характеризуют состояние деформируемой среды в данных условиях обработки. Функционал, представляет собой разность мощностей внутренних и внешних сил, действующих на систему.

Под мощностью внутренних сил понимаются затраты мощности описываемые выражением:

$$W_{2=CB} = W_{?} + W_{@07} + W_{B@} + W_{8=} \quad (1)$$

где:  $W_{?}$  – пластическая компонента мощности;  $W_{@07}$  – компонента мощности, связанная с наличием поверхностей разрыва скоростей в объеме деформируемой среды;  $W_{B@}$  – компонента мощности сил трения, на контактной границе с инструментом;  $W_{8=}$  – инерционная компонента мощности, затрачиваемая на изменение кинетической энергии.

Построен энергетический функционал, который характеризует состояние деформируемой среды как изотропное, жесткопластическое, который будет иметь вид [1].

$$\int_V \tau_s H dV + \int_F \tau_s [\nu] dF + \int_{F_k} \mu [\nu_k] dF_k + \int_V \alpha dV - \int_{F^*} x V_0 dF^* = 0 \quad (2)$$

где  $\tau_s$  – предел текучести сдвига;  $H$  – интенсивность скорости деформации сдвига;  $V$  – объем тела;  $[V]$  – величина разрыва касательных составляющих скоростей на поверхностях дискретных элементов;  $F$  – площадь поверхности разрыва;  $\mu$  – коэффициент трения;  $[\nu_k]$  – скорость скольжения металла по инструменту;  $F_k$  – площадь контактной границы с инструментом;  $a$  –

скоростная функция, учитывающая влияние инерционного воздействия;  $X$  – вектор поверхностных сил;  $V_0$  – вектор скорости движения инструмента (скорости деформирования;  $F^*$  – площадь поверхности воздействия внешних сил.

Скоростная функция  $a$  представляет собой сумму двух частей:

$$\alpha = \rho\alpha_1 + \rho\alpha_2 \quad (3)$$

где  $\alpha_1 = \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t}$   $\alpha_2 = \omega^2 \frac{\partial \omega}{\partial z} + v^2 \frac{\partial v}{\partial r}$

При этом  $\alpha_1$  – предполагает дискретизацию по времени, а  $\alpha_2$  – только по координатным осям  $r$  и  $z$ .

Составленный таким образом функционал решается методом локальных вариаций [2]. Суть метода заключается в варьировании с достаточно малым шагом заданного произвольного, но кинематически возможного для рассматриваемых процессов формоизменения, поля скоростей перемещения, нахождения соответствующих каждому варьированному значению поля скоростей значений функционала и выборе среди них минимального. При этом составляющая, связанная с внешними силами, в варьировании не участвует [3]. Подобное поэтапное решение приводит в итоге к получению действительного поля скоростей перемещения, членам которого соответствуют минимальные значения мощностей, то есть к реализации первого экстремального принципа. Следует отметить, что данный метод относится к прямым численным методам решения вариационных задач, и применим к решению задач для функций любого числа переменных. Этот подход дает возможность строить решения при помощи не очень гладких локализованных функций [4-7].

Проведем, в качестве примера, расчет мощности пластической деформации для процесса обратного выдавливания стакана схема, которого представлена на (рис. 1) [8].

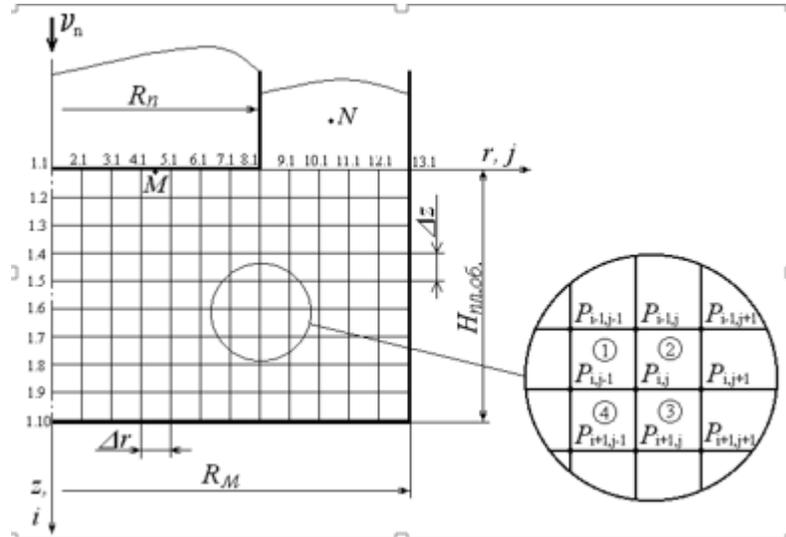


Рис. 1: Схема процесса обратного выдавливания стакана

На основе конечно-элементной дискретизации сплошной среды представим рассматриваемую среду в виде системы дискретных элементов, а состояние элемента опишем с помощью обобщенных клеточных переменных с использованием вариационных принципов механики [7, 9-12].

Разобьем область пластической деформации (деформируемой среды) на четырехугольные элементы; для чего проведем в плоскости, проходящей через оси  $z$  и  $r$ , два семейства прямых:

$$r = a + j \cdot \Delta r; \quad (4)$$

$$z = b + i \cdot \Delta z, \quad (5)$$

где  $a$  и  $b$  – произвольны;  $\Delta r > 0$ ,  $\Delta z > 0$ .

Прямые этих семейств пересекаются в точках  $P_{ij}$ , и разбивают плоскость на равные прямоугольники со сторонами  $\Delta r$  и  $\Delta z$ .

На основании априорной информации зададим значения составляющей скорости перемещений по оси  $r$  в узловых точках  $P_{ij}$  из кинематически возможных значений

Представим функционал записанным для частного случая высокоскоростного деформирования при отсутствии его компонента связанного с наличием разрыва касательных составляющих скоростей, исключая при этом член, определяющий мощность поверхностных сил [3, 13]:

$$I = \sum I_{ij}, \quad (6)$$

где  $I_{ij}$  - функционал от функции по ячейке с вершинами  $P_{i-1,j-1}$ ,  $P_{i+1,j-1}$ ,  $P_{i+1,j+1}$ ,  $P_{i-1,j+1}$ .

Запишем функционал в виде:

$$\begin{aligned} I_{ij} = \tau_s \left(\frac{2}{3}\right)^{0,5} & \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)^2 + \left(2\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \left(-\frac{v}{r} - 2\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 \right]^{0,5} R_i \cdot drdz + \\ & + \rho \left[ \left(\omega \frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \omega^2 \frac{\partial \omega}{\partial z} + v^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right] R_i \cdot drdz + 2\mu\tau_s \left(v_0 \frac{R_i^2}{R_m^2 - R_n^2}\right) \pi R_m (R_m - R_n) \end{aligned} \quad (7)$$

Применив конечно-разностную систему для аппроксимации частных производных, например, для ячейки 1 (рис. 1) с вершинами  $ij$ ,  $P_{i-1j}$ ,  $P_{i-1j-1}$ ,  $P_{ij-1}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta r}, & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta z}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial r} &= \frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{\Delta r}, & \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j}}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя полученные формулы, функционал для точки  $i,j$  можно представлять в виде сумму:

$$I_{ij} = (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) R_i drdz + 2\mu\tau_s \left(v_0 \frac{R_m^2}{R_m^2 - R_n^2}\right) \pi R_m (R_m - R_n)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 = & \left\{ \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left[ \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r}\right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(-2 \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta z} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{\Delta r}\right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \tau_s \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0,5} \cdot \left[ \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r}\right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(-2 \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} - \frac{u_{ij}}{r_i}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta z} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{\Delta r}\right)^2 \right] \right\}^{0,5} + \\ & + \rho \cdot \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \cdot u_{ij}^2 + \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{ij}}{\Delta z} \cdot \omega_{ij}^2 \right) \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & \left\{ \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left[ \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{ij} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \left( 2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left( -2 \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{ij} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{\Delta r}}{\Delta z} \right)^2 \right] + \\
& + \tau_s \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{0,5} \cdot \left[ \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{ij} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \left( 2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left( -2 \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{ij} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{\Delta r}}{\Delta z} \right)^2 \right]^{0,5} + \\
& \left. + \rho \cdot \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \cdot u_{ij}^2 + \frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{\Delta z} \cdot \omega_{ij}^2 \right) \right\} \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & \left\{ \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left[ \left( \frac{u_{ij} - u_{i-1,j} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \left( 2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left( -2 \cdot \frac{u_{ij} - u_{i-1,j} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{\Delta r}}{\Delta z} \right)^2 \right] + \\
& + \tau_s \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{0,5} \cdot \left[ \left( \frac{u_{ij} - u_{i-1,j} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \left( 2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i-1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left( -2 \cdot \frac{u_{ij} - u_{i-1,j} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{\Delta r}}{\Delta z} \right)^2 \right]^{0,5} + \\
& \left. + \rho \cdot \left( \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \cdot u_{ij}^2 + \frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{\Delta z} \cdot \omega_{ij}^2 \right) \right\} \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 = & \left\{ \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot \left[ \left( \frac{u_{ij} - u_{i-1,j} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \left( 2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{ij} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left( -2 \cdot \frac{u_{ij} - u_{i-1,j} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1} + \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{\Delta r}}{\Delta z} \right)^2 \right] + \\
& + \tau_s \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^{0,5} \cdot \left[ \left( \frac{u_{ij} - u_{i-1,j} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \left( 2 \cdot \frac{u_{ij}}{r_i} + \frac{u_{i-1,j} - u_{ij}}{\Delta r} \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left( -2 \cdot \frac{u_{ij} - u_{i-1,j} - \frac{u_{ij}}{r_i}}{\Delta r} \right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{u_{i,j+1} - u_{ij} + \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{\Delta r}}{\Delta z} \right)^2 \right]^{0,5} + \\
& \left. + \rho \cdot \left( \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta r} \cdot u_{ij}^2 + \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{\Delta z} \cdot \omega_{ij}^2 \right) \right\} \cdot r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta z.
\end{aligned}$$

Через минимизацию суммы значений функционала, на основании значений заданного поля скоростей, вычислим действительные значения поля  $v_{i,j}$ . Для этого, выбрав достаточно малую величину шага, значительно меньшую  $\Delta v \ll V_0$ , но  $\Delta v > 0$  (например,  $\Delta v = 0,01$ ), будем изменять значения первоначально заданного поля скоростей на величину шага в большую и меньшую стороны  $v_{i,j} \pm \Delta v$ . Это повлечет за собой изменение значений мощности в ячейках, представляющих собой непосредственное окружение для данной точки.

В каждом приближении для внутренней точки  $P_{ij}$  вычисляется четыре значения мощности  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ , сумма которых, соответствует определенной величине скорости в данной точке поля. Определяется минимальное значение этих четырех сумм и значение скорости  $v_{ij}$ , соответствующее минимуму функционала в данной точке, это значение скорости и приравнивается данной точке.

После выполнения вышеописанной процедуры, для всех внутренних точек пластической области, автоматически определяется: суммарное значение мощности пластической деформации, и строится соответствующее ему скорректированное поле скоростей для узловых точек. Процесс перебора повторяется снова. Он заканчивается тогда, когда разница в значениях функционала на  $n$ -й и  $n-1$ -й итерациях становится не более априорно заданного малого числа, то есть функционал фактически перестает убывать. Таким образом, находится минимума функционала, то есть минимум мощности пластической деформации и соответствующему ему массив, действительного поля составляющей скорости перемещения вдоль оси  $r$  для узловых точек.

По полученной мощности деформации определяется:

– технологическая сила  $P = W/V$ ,

где  $W$  – мощность пластической деформации;  $V$  – скорость деформирования.

– удельная сила деформирования  $q = P/F$ ;

где  $F$  – площадь поперечного сечения пуансона.

Таким образом, осуществляется расчет силовых параметров процесса пластического формоизменения.

Действительное поле скоростей, в свою очередь, позволяет провести дальнейший анализ напряженно-деформированного состояния, рассчитать по известным основным соотношениям: компоненты тензора деформаций, скорости деформаций, интенсивности скоростей деформаций и соответствующие им напряжения для узловых точек исследуемого процесса, что определяет пластические возможности рассматриваемого процесса формоизменения.

Для численного решения задач методом локальных вариаций была разработано программное обеспечение расчета мощности деформации [14]. Программа предназначена для нахождения минимума функционала и соответствующему этому минимуму полю составляющей скорости перемещения вдоль оси  $r$  и может быть применено для создания малоотходных процессов получения и обработки металлических, порошковых и нанокпозиционных материалов с заданными свойствами [15-26].

### 3. Заключение

Рассмотренный математический метод локальных вариаций может найти широкое применение при создании ресурсосберегающих технологий процессов обработки металлов и сплавов давлением [27].

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория обработки металлов давлением / И.Я. Тарновский, А.А. Поздеев, О.А. Ганаго и др. – М.: Металлургиздат, 1963. – 672 с.
2. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики управления. – М.: Наука, 1973. – 238 с.
3. Обработка сталей и сплавов в интервале температур фазовых превращений: монография. Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 320 с.

4. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е. Пластическая дилатансия и деформационная повреждаемость металлов и сплавов: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 114 с.
5. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Колмаков А.Г. Формирование механических свойств углеродистых сталей в процессах вытяжки с утонением // Технология металлов. 2015. № 11. С. 17-29.
6. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е., Сергеев Н.Н., Провоторов Д.А. Влияние деформационной повреждаемости на формирование механических свойств малоуглеродистых сталей // Производство проката. 2015. № 12. С. 9-13.
7. Комплексные задачи теории пластичности: монография / Н.Д. Тутышкин, А.Е. Гвоздев, В.И. Трегубов, Ю.В. Полтавец, Е.М. Селедкин, А.С. Пустовгар, В.И. Золотухин, Г.М. Журавлев; под ред. Н.Д. Тутышкина, А.Е. Гвоздева. 2-е изд., перераб. и доп. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. – 408 с.
8. Гвоздев А.Е., Журавлёв Г.М., Колмаков А.Г., Провоторов Д.А., Сергеев Н.Н. Расчет деформационной повреждаемости в процессах обратного выдавливания металлических изделий // Технология металлов. 2016. № 1. С. 23-32.
9. Гвишиани А. Д. Характеры представлений дискретных серий группы  $SL(2, K)$ , где  $K$  не дискретное несвязное локально компактное поле. Функциональный анализ и его приложения. (1973), Т.7. Вып. 1. 16–32.
10. Гвишиани А.Д. Представления целочисленной группы  $SL(2)$  над локальным неархимедовым полем в пространстве функций на плоскости Лобачевского // Вестник МГУ. Сер1. Математика и механика. 1977. No 5. С. 22-29.
11. Гетманов В. Г., Гвишиани А. Д., Сидоров Р. В. Применение метода локальных аппроксимаций в задаче снижения погрешностей системы векторный-скалярный магнитометр для наблюдений геомагнитного поля с магнитными бурями // Глобальная электрическая цепь: Материалы Второй Всероссийской конференции. Геофизическая обсерватория «Борок» – филиал Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН; Ответственный редактор С.В. Анисимов. 2015. С. 130.
12. Макаров Э.С., Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М. Теория пластичности дилатирующих сред: монография / Под ред. проф. А.Е. Гвоздева. – 2-е изд., перераб. и доп. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. – 337 с.
13. Макаров Э.С., Ульченкова В.Э., Гвоздев А.Е., Сергеев Н.Н., Сергеев А.Н. Сопряженные поля в упругих, пластических, сыпучих средах и металлических труднодеформируемых системах: монография / под ред. проф. А.Е. Гвоздева. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 526 с.
14. Гвоздев А.Е., Бреки А.Д., Дорохин Ю.С., Журавлев Г.М., Клементьев Д.С., Кутепов С.Н., Малий Д.В., Медведев П.Н., Минаев И.В., Сергеев А.Н., Хонелидзе Д.М. Программный комплекс расчета мощности сил, поверхностного и фрикционного взаимодействия слитковых, порошковых и нанокпозиционных металлических систем // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018661010. - 2018.
15. Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г., Маляров А.В., Сергеев Н.Н., Тихонова И.В., Пруцков М.Е. Условия проявления неустойчивости цементита при термоциклировании углеродистых сталей // Материаловедение. 2014. № 10. С. 31-36.

16. Gvozdev A.E., Bogolyubova D.N., Sergeev N.N., Kolmakov A.G., Provotorov D.A., Tikhonova I.V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2015. Т. 6. № 1. С. 32-40.
17. Гвоздев А.Е., Колмаков А.Г., Провоторов Д.А., Сергеев Н.Н., Боголюбова Д.Н. Зависимость показателей сверхпластичности труднодеформируемых сталей р6м5 и 10р6м5-мп от схемы напряженного состояния // *Деформация и разрушение материалов*. 2015. № 11. С. 42-46.
18. Расчет процессов обработки материалов давлением методом конечных элементов: монография / под ред. проф. А.Е. Гвоздева / Е.М. Селедкин, А.Е. Гвоздев, А.Н. Сергеев, Н.Е. Стариков, А.А. Калинин. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 113 с.
19. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2017. Т. 8. № 4. С. 509-514.
20. Gvozdev A.E., Sergeyev N.N., Minayev I.V., Tikhonova I.V., Sergeyev A.N., Khonelidze D.M., Maliy D.V., Golyshev I.V., Kolmakov A.G., Provotorov D.A. Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2017. Т. 8. № 1. С. 148-152.
21. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Starikov N.E., Provotorov D.A., Sergeyev N.N., Khonelidze D.M. On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon // *Inorganic Materials: Applied Research*. 2017. Т. 8. № 1. С. 126-129.
22. Макаров Э.С., Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сергеев А.Н., Минаев И.В., Бреки А.Д., Малий Д.В. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем // *Чебышевский сборник*. 2017. Т. 18. № 4 (64). С. 268-284.
23. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сапожников С.В. К теоретическому анализу процесса компактирования порошковых материалов прессованием // *Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле*. 2017. № 4. С. 273-283.
24. Журавлев Г.М., Гвоздев А.Е., Чеглов А.Е., Сергеев Н.Н., Губанов О.М. Вариант определения максимального пластического упрочнения в инструментальных сталях // *Сталь*. 2017. № 6. С. 26-39.
25. Шоршоров М.Х., Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Кутепов С.Н., Кузовлева О.В., Селедкин Е.М., Клементьев Д.С., Калинин А.А. Моделирование процессов ресурсосберегающей обработки слитковых, порошковых, наноструктурных и композиционных материалов: монография, 2-е издание, исправленное и дополненное. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 359 с.
26. A. D. Breki, S. E. Aleksandrov, K. S. Tyurikov, A. G. Kolmakov, A. E. Gvozdev, A. A. Kalinin. Antifriction Properties of Plasma-Chemical Coatings Based on SiO<sub>2</sub> with MoS<sub>2</sub> Nanoparticles under Conditions of Spinning Friction on ShKh<sub>15</sub> Steel // *Inorganic Materials: Applied Research*, 2018, Volume 9, Issue 4, pp 714–718. Doi: 10.1134/S2075113318040081.
27. Шоршоров М.Х., Базык А.С., Казаков М.В., Гвоздев А.Е., Пустовгар А.С., Егоров Е.В., Герасин А.Н., Сидоров Б.П. Сверхпластичность сталей и сплавов и ресурсосберегающие технологии процессов обработки металлов давлением: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 158 с.

## REFERENCES

1. Tarnovsky I.Ya., Pozdeev A.A., Ganago O.A., et al. 1963, *Teoriya obrabotki metallov davleniem [Theory of metal forming]*. Moscow: Metallurgizdat, 672 p.
2. Chernousko F.L., Banichuk N.V. 1973, *Variacionnyye zadachi mekhaniki upravleniya [Variational problems of control mechanics]*. Moscow: Nauka, 238 p.
3. Zhuravlev G.M., Gvozdev A.E. 2016, *Obrabotka staley i splavov v intervale temperatur fazovyh prevrashchenij [Processing of steels and alloys in the temperature range of phase transformations]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 320 p.
4. Zhuravlev G.M., Gvozdev A.E. 2014, *Plasticheskaya dilatatsiya i deformatsionnaya povrezhdaemost metallov i splavov [Plastic dilatancy and deformation damage of metals and alloys]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 114 p.
5. Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M., Kolmakov A.G. 2015, "Formirovanie mekhanicheskikh svoystv uglirodistykh staley v processah vytyazhki s utoneniem [Formation of mechanical properties of carbon steels in the processes of drawing with thinning]", *Tekhnologiya metallov*. No. 11. pp. 17-29.
6. Zhuravlev G. M., Gvozdev A. E., Sergeev N. N., Provotorov D. A. 2015, "Vliyanie deformatsionnoy povrezhdaemosti na formirovanie mekhanicheskikh svoystv malouglerodistykh staley [Influence of deformation damage on the formation of mechanical properties of low-carbon steels]", *Proizvodstvo prokata*. No. 12. pp. 9-13.
7. Tutyshkin N. D., Gvozdev A. E., Tregubov V. I., et al. 2015, *Kompleksnyye zadachi teorii plastichnosti [Complex problems of plasticity theory]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 408 p.
8. Gvozdev A.E., Zhuravlev G. M., Kolmakov A.G., et al. 2016, *Raschet deformatsionnoy povrezhdaemosti v processah obratnogo vydavlivaniya metallicheskih izdelij [Calculation of deformation damage in the processes of reverse extrusion of metal products]* *Tekhnologiya metallov*. No. 1. pp. 23-32.
9. Gvishiani A.D. 1973, "Characters of representations of discrete series of groups in  $SL(2, K)$ , where  $K$  is a nondiscrete unconnected locally compact field", *Functional Analysis and Its Applications*., Vol. 7. No. 1. pp. 16-32.
10. Gvishiani A.D. 1977, "Predstavleniya celochislennoj grupy  $SL(2)$  nad lokalnym nearhimedovym polem v prostranstve funktsij na ploskosti Lobachevskogo [Representations of an integer group  $SL(2)$  over a local non-Archimedean field in the function space on the Lobachevsky plane]", *Vestnik MGU. Seriya 1. Matematikai mekhanika*. No 5. pp. 22-29.
11. Getmanov V.G., Gvishiani A.D., Sidorov R.V. 2015, "Primenenie metoda lokal'nykh approksimatsiy v zadache snizheniya pogreshnostey sistemy vektornyj-skalyarnyj magnitometr dlya nablyudenij geomagnitnogopolya s magnitnymi buriyami [Application of the method of local approximations in the problem of reducing the errors of the vector-scalar magnetometer system for observations of the geomagnetic field with magnetic storms]", *Globalnaya ehlektricheskaya cep: Materialy Vtoroj Vserossiyskoj konferencii. Geofizicheskaya observatoriya «Borok»*. Borok: Filigran, 130 p.
12. Makarov E.S., Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M. 2015, *Teoriya plastichnosti dilatiruyushchih sred [Theory of plasticity gelatinous environments]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 337 p.

13. Makarov E.S., Elenkova E.V., Gvozdev A.E., et al. 2016, *Sopryazhennye polya v uprugih, plasticheskikh, sypuchih sredah i metallicheskih trudnodeformiruemym sistemah [Conjugate fields in elastic, plastic, free-flowing media and metallic hard-to-deform systems]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 2016. 526 p.
14. Gvozdev A.E., Breki A.D., Dorokhin Y.S., et al. 2018, "Programmnyj kompleks rascheta moshchnosti sil, poverhnostnogo i frikcionnogo vzaimodejstviya slitkovykh, poroshkovykh i nanokompozicionnykh metallicheskih sistem [Software package for calculating the power of forces, surface and friction interaction of ingot, powder and nanocomposite metal systems]", *Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programmy dlya EVM №2018661010*.
15. Gvozdev A. E., Kolmakov A.G., Malyarov A.V., et al. 2014, "Usloviya proyavleniya nestabil'nosti cementita pri termociklirovanii uglerodistykh stalej [Conditions for the manifestation of instability of cementite during thermal Cycling of carbon steels]", *Materialovedenie*. No 10. pp. 31-36.
16. Gvozdev A.E., Bogolyubova D.N., Sergeev N.N., et al. 2015, "Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation", *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 6. No 1. pp. 32-40.
17. Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., Provotorov D.A., et al. 2015, "Zavisimost' pokazatelej sverhplastichnosti trudnodeformiruemym stalej R6M5 i 10R6M5-MP ot skhemy napryazhennogo sostoyaniya [The dependence of the parameters of superplastic difficult-to-deform steels R6M5 and 10p6m5-MP from the scheme of the stress state]", *Deformaciya i razrushenie materialov*. No 11. pp. 42-46.
18. Seledkin E.M., Gvozdev A.E., Sergeev A.N., et al. 2016, *Raschet processov obrabotki materialov davleniem metodom konechnykh ehlementov [Calculation of materials processing by pressure by finite element method]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 113 p.
19. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G. 2017, "Application of generalized pascal triangle for description of oscillations of friction forces", *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 8. No 4. pp. 509-514. Doi: 10.1134/S2075113317040049.
20. Gvozdev A.E., Sergeyev N.N., Minayev I.V., et al. 2017, "Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting", *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 8. No 1. pp. 148-152. Doi: 10.1134/S2075113317010178.
21. Breki A.D., Gvozdev A.E., Kolmakov A.G., et al. 2017, "On friction of metallic materials with consideration for superplasticity phenomenon", *Inorganic Materials: Applied Research*. Vol. 8. No 1. pp. 126-129. Doi: 10.1134/S2075113317010087.
22. Makarov E.S., Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M., et al. "Primenenie teorii plastichnosti dilatiruyushchih sred k processam uplotneniya poroshkov metallicheskih sistem [Application of the theory of plasticity of dilating media to the processes of compaction of powders of metal systems]", *Chebyshevskij sbornik*. Vol. 18. No 4(64). pp. 268-284.
23. Gvozdev A.E., Zhuravlev G.M., Sapozhnikov S.V. 2017, "K teoreticheskomu analizu processa kompaktirovaniya poroshkovykh materialov pressovaniem [Theoretical analysis of the process of compacting powder materials by pressing]", *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o Zemle*. No 4. pp. 273-283.

24. Zhuravlev G.M., Gvozdev A.E., Cheglov A.E. 2017, "Variant opredeleniya maksimal'nogo plasticheskogo uprochneniya v instrumental'nyh stalyah [The alternative definition of maximum plastic work hardening of the steels]" , *Stal'*. No 6. pp. 26-39.
25. Shorshorov M.H., Gvozdev A.E., Sergeev A. N., et al. 2018, *Modelirovanie processov resursosberegayushchej obrabotki slitkovykh, poroshkovykh, nanostrukturnykh i kompozitsionnykh materialov [Modeling of processes of resource-saving processing of ingot, powder, nanostructured and composite materials]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 359 p.
26. Breki A. D., Aleksandrov S. E., Tyurikov K. S., et al. 2018, "Antifriction Properties of Plasma-Chemical Coatings Based on SiO<sub>2</sub> with MoS<sub>2</sub> Nanoparticles under Conditions of Spinning Friction on ShKh<sub>15</sub> Steel" , *Inorganic Materials: Applied Research* Volume 9, Issue 4, pp. 714-718. Doi: 10.1134/S2075113318040081.
27. Shorshorov M.H., Basic A.S., Kazakov M.V., et al. 2018, *Sverhplastichnost' stalej i splavov i resursosberegayushchie tekhnologii processov obrabotki metallov davleniem [Superplasticity of steels and alloys and resource-saving technologies of metal forming processes]* monograph. Tula: Izd-vo TulGU, 158 p.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018