ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-243-251

Аналог теоремы даффина-шеффера для одного класса рядов дирихле с конечнозначными коэффициэнтами

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.
e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru
Матвеева Ольга Андреевна — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Аннотация

Известная теорема, доказанная Доффиным и Шеффером, утверждает, что ограниченность степенного ряда с конечнозначными коэффициентами в некотором секторе единичного круга равносильна периодичности его коэффициентов, начиная с некоторого номера. В работе указывается класс рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, ограниченными в любой полосе правой полуплоскости комплексной плоскости константой, зависящей только от высоты полосы, для которых доказан аналог теоремы Даффина-Шеффера.

Ранее аналог теоремы Даффина-Шеффера был получен авторами для рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами. Методика доказательства этого результата позволила, в частности, решить известную проблему обобщенных характеров, поставленную в 1950 году Ю.В. Линником и Н.Г. Чудаковым.

В данной работе эта методика использована при доказательстве аналога Даффина-Шеффера для указанного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами.

Ключевые слова: аппроксимационные полиномы Дирихле, аналитическое продолжение рядов Дирихле целым образом на комплексную плоскость, условие периодичности, начиная с некоторого номера, коэффициентов ряда Дирихле.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева. Аналог теоремы Даффина-Шеффера для одного класса рядов дирихле с конечнозначными коэффициэнтами // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 243–251.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 4

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-243-251

Analogue of the Duffin – Scheffer theorem for one class of Dirichlet series with finite-valued coefficients

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics and systems analysis, Saratov State Technical University.
e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru
Matveeva Olga Andreevna — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of computer algebra and number theory, Saratov State University.
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Abstract

The well-known theorem, proved by Doffin and Scheffer, states that the boundedness of a power series with finite-valued coefficients in a certain sector of the unit circle is equivalent to the periodicity of its coefficients, starting from a certain number. The paper indicates the class of Dirichlet series with finite-valued coefficients bounded in any strip of the right half-plane of the complex complex plane by a constant depending only on the height of the strip, for which an analogue of Dauffin – Scheffer theorem is proved.

Earlier, an analogue of the Dauffin – Scheffer theorem was obtained by the authors for Dirichlet series with multiplicative coefficients. The method of proving this result allowed, in particular, to solve the well-known problem of generalized characters posed in 1950 by Yu.V. Linnik and N.G. Eccentric

In this paper, this technique is used to prove an analogue of the Duffin – Scheffer theorem for the indicated class of Dirichlet series with multiplicative coefficients.

Keywords: Dirichlet approximation polynomials, analytic continuation of the Dirichlet series to the complex plane, condition for periodicity of coefficients of Dirichlet series.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva, 2018, "Analogue of the Duffin – Scheffer theorem for one class of Dirichlet series with finite-valued coefficients" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 243–251.

1. Введение

Цель данной работы - для определенного класса рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами доказать аналог известной в теории степенных рядов теоремы Даффина-Шеффера, которая утверждает (см.[1]), что ограниченность в некотором секторе единичного круга степенного ряда с конечнозначными коэффициентами равносильна периодичности, начиная с некоторого места, коэффициентов этого ряда. Легко привести пример ряда Дирихле с конечнозначными, непериодичными коэффициентами, который ограничен в некоторой полосе : $0 < \sigma < \infty, |t| < \delta, (s = \sigma + it)$. Поэтому в работе изучаются ряды Дирихле с конечнозначными коэффициентами, которые ограничены в любой области: $0 < \sigma < \infty, |t| \le T$, константой, зависящей только от величины T.

В основе изучения таких рядов Дирихле лежит аппроксимационный подход, разработанный в работах авторов [2]-[7], суть которого заключается в построении полиномов Дирихле, приближающих ряд Дирихле в правой полуплоскости комплексной плоскости и переносе отдельных свойств полиномов Дирихле на ряд Дирихле.

Ранее в работах [8]-[10] авторы получили условие периодичности коэффициентов для определенных классов рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, выраженное в терминах поведения этих рядов на мнимой оси. В работе [8] получено условие аналитического продолжения ряда Дирихле целым образом на комплексную плоскость. В работах [9] и [10] показаны периодичность коэффициентов таких рядов Дирихле.

В данной работе показано, что основные идеи работ [8]-[10] удается перенести на ряды Дирихле

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, s = \sigma + it, \tag{1}$$

удовлетворяющих условиям:

1. a_n – конечнозначные коэффициенты;
2. сумматорная функция коэффициентов $S(x) = \sum_{n \ge x} a_n$ является ограниченной функцией;
3. для соответствующего степенного ряда $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ выполняются условия:
   - существует конечный предел вида
   $$\lim_{x \to 1-0} q(x) = \alpha_0. \tag{2}$$
   - для любого натурального k найдется такое $0 < \delta_k < 1$, что для всех $x \in [1 - \delta_k, 1]$
   $$|q(x) - \alpha_0| < \frac{C}{\ln^k(1-x)}, \tag{3}$$
   где константа C не зависит от x и k;
4. ряд Дирихле (1) не имеет нулей при $\sigma \ge \sigma_0 > 1$. Более того, при $\sigma > 1 + \delta : |f(s)| > C$, где константа C зависит только от δ.

Замечание 1. *Условие (3) является более слабым, чем условие существование у ряда $q(x)$ в точке $x = 1$ односторонней производной вида*

$$\lim_{x \to 1-0} q^{'}(x) = \alpha_1$$

Замечание 2. *Ниже будет показано, что свойства 1.-3. обеспечивают ограниченность ряда Дирихле (1) в любой полосе, т.е. при* $0 < \delta < \infty, |t| \leq T$ *:*

$$|f(s)| < C,$$

где константа C *зависит только от* T*.*

Замечание 3. *В дальнейшем в работе рассматриваются только ряды Дирихле (1), удовлетворяющих условиям 1.-4.*

2. Аппроксимационные полиномы, их свойства

Последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$ называется последовательностью аппроксимационных полиномов для ряда Дирихле (1), если выполняются условия (см. [6]-[8]) :

1. В любой полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, последовательность полиномов $Q_n(s)$ равномерно сходится к функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1);

2. Пусть $\varepsilon_n \to 0$. Тогда для любого ε_{n_0} наблюдается такое n_1, что при $n \geq n_1$ в полосе $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$. Выполняется неравенство

   $$|f(s) - Q_n(s)| < C \cdot \varepsilon_{n_0},$$

   где константа C не зависит от n и ε_{n_0};

3. Для любой полосы: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, существует такое n_1, что при $n \geq n_1$ нормы полиномов $Q_n(s)$ ограничены константы, зависящий только от величины T.

В работах [4],[6] показано, что в силу условий 1.-3. для рядов Дирихле (1) последовательность аппроксимационных полиномов определяется неоднозначно. В этих работах показано, что для ограниченных коэффициентов рядов Дирихле существует последовательность аппроксимационных полиномов вида

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k r_n^k}{k^s}, \tag{4}$$

где величина $r_n, 0 < r_n < 1$ своя для каждого n.

3. Граничное поведение рядов Дирихле (1)

Отметим, что в силу определения аппроксимационных полиномов функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), в любой полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$ ограничена константой, зависящей только от T.

В работах [4],[6] показано, что функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), является непрерывной в широком смысле на мнимой оси. В этом разделе докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Функция* $f(s)$*, определенная рядом Дирихле (1), является регулярной на мнимой оси.*

Доказательству теоремы предпошлем ряд утверждений, доказательство которых дословно повторяет доказательство аналогичных утверждений, приведенных в работе [9].

Лемма 1. *Для производной m-го порядка аппрокцимационного полинома $Q_n(s)$ в полосе: $0<\sigma_0\leq\sigma<\infty, |t|\leq T$ имеет место оценка вида*

$$\left|Q_n^{(m)}(s)\right|\leq C\ln^m n,$$

где константа C зависит только от величины T.

Лемма 2. *Пусть $Q_{n_k}(s)$ – последовательность аппроксимационных полиномов, где $n_k=k^k$ и где $k>2$ – некоторое натуральное. Тогда в полосе: $0<\sigma<\infty, |t|\leq T$ для любого m имеет место оценка вида*

$$\left|Q_{(n+1)_k}(k)^{(m)}-Q_{n_k}^{(m)}(s)\right|=O(\frac{(n+1)^m\ln^m k}{n^l\ln^l k}),$$

где l–любое натуральное, а константа в символе «O» зависит от T и l.

Рассмотрим разложение функции $f(s)$ в ряд

$$f(s)=Q_{n_k}(s)+\sum_{n_k}^{\infty}(Q_{(n+1)_k}(s)-Q_{n_k}(s)),$$

который в силу леммы 2 абсолютно сходится при любом s из полосы: $0<\sigma<\infty, |t|\leq T$. В результате его конечного дифференцирования имеем

$$f^{(m)}(s)=Q_{n_k}^{(m)}(s)+\sum_{n_k}^{\infty}(Q_{(n+1)_k}^{(m)}(s)-Q_{n_k}^{(m)}(s)) \tag{5}$$

В силу (5) и леммы 2 получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *В полосе: $0<\sigma<\infty, |t|\leq T$ для любого m имеет место оценка*

$$\left|f^{(m)}(s)\right|=O(\frac{1}{(l-m-1)n_0^{l-m}\ln^{l-m}k}),$$

где k– натуральное, $k>2$; l– натуральное, $l>m+1$; n_0– некоторое натуральное, которое может быть достаточно большим; константа в символе «O» зависят от T и l.

Пусть C_l обозначает наименьшее число, входящее в символ «O» оценки леммы 3.

Имеет место (см.[9]).

Лемма 4. *Для константы C_l выполняется оценка*

$$C_l\leq\left\|g^{(l)}(x)\right\|_{C[0,1-\varepsilon]},$$

где $g(x)$ – функция, определенная степенным рядом, соответствующим ряду Дирихле (1), ε – положительное число, меньшее, чем 1.

Из леммы 4 так же как и в работе [9] следует следующее утверждение.

Лемма 5. *Имеет место неравенство*

$$\overline{\lim_l}\sqrt[l]{\frac{C_l}{l!}}<\infty.$$

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим формальный ряд Тейлора

$$f(s) = f(s_0) + \sum_1^{\infty} \frac{f^{(m)}(s_0)}{m!}(s - s_0)^m,$$

где s_0 лежит на мнимой оси, и покажем, что он имеет ненулевой радиус сходимости R. Так как

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_m} \sqrt[m]{\frac{f^{(m)}(s_0)}{m!}},$$

то положив в лемме 3 $l = m + 2$ в силу леммы 5 получим

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_m} \sqrt[m]{\frac{l_m}{m!}} < \infty,$$

что и доказывает утверждение теоремы 1.

4. Аналитическое продолжение рядов Дирихле (1) целым образом на комплексную плоскость

В этом разделе будет показано, что в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле (1) имеет место тот же подход, что и для рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, разработанный авторами в работе [8]. А именно при аналитическом продолжении рядов (1) можно воспользоваться основными идеями принципа симметрии Римана-Шварца, изложенными в монографиях [11], [12].

Этот подход позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Ряд Дирихле (1) продолжается как целая функция на комплексную плоскость.*

Приведем ряд утверждений, предшествующих доказательству теоремы 2.

Лемма 6. *Для любого $\sigma_0 > 1$ существует n_0, что при $n \geq n_0$ производные аппроксимационных полиномов вида (4) не имеют нулей в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.*

Доказательство.

Свойство 4. рядов Дирихле (1) позволяет утверждать, что частичные суммы $S_n(x)$ ряда Дирихле при $n \geq n_1$ не имеют нулей в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.

Этот факт позволяет перенести доказательство леммы 4 работы [8] на наш случай и доказать, что аппроксимационные полиномы $Q_n(s)$ вида (4) при $n \geq n_0$ не имеет нулей в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.

Рассмотрим последовательность областей D_k, ограниченных контурами Γ_k, состоящими из участков: $\Gamma_{k,1} : \sigma = \sigma_k, |t| \leq T$; $\Gamma_{k,2} : \sigma_k \leq \sigma \leq \sigma_{k+1}, t = T_k$; $\Gamma_{k,3} : \sigma = \sigma_{k_1}, |t| \leq T_k$; $\Gamma_{k,4} : \sigma_k \leq \sigma \leq \sigma_{k_1}, t = -T_k$, где $\sigma_k \to 1, \sigma_{k_1} \to \infty, T_k \to \infty$, при $k \to \infty$.

Пусть $Q_{n_k}(s)$ – последовательность аппроксимационных полиномов вида (4), удовлетворяющих лемме 6, т.е. $Q'_{n_k}(s) \neq 0$ при $\sigma \geq \sigma_k$. В этом случае имеет место

Лемма 7. *Отображение $w = Q_{n_k}(s)$ является однолистным комфортным отображением области D_k на область $\hat{D}_k$. При этом контур Γ_k отображается в простой жордановый контур γ_k, который является границей области $\hat{D}_k$.*

Доказательство леммы 7 следует из результатов о конформных отображениях, приведенных в [12].

Доказательство теоремы 2. Как показано в [8] из результатов Римана о существовании конформного отображения области $\hat{D}_k$ на единичный круг с центром в начале координат существует конформное отображение области D_k и круг радиуса R_k. Этот факт как и в работе [8] позволяет определить функцию $f_1(s)$ аналитическую в любой полуплоскости комплексной плоскости, и функция $f_1(s)$ определяет аналитическое продолжение функции $f(s)$ на комплексную плоскость, если только $f(s)$ регулярна на мнимой оси. Последний факт имеет место в силу теоремы 1. Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

5. Теорема о периодичности, начиная с некоторого номера, коэффициентов рядов Дирихле (1)

Как уже отмечалось во введении в работе [8] был получен критерий аналитического продолжения целым образом на комплексную плоскость для рядов Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами.

В работе [9] было показано, что этот критерий имеет место для рядов Дирихле, коэффициенты которых определяются значениями неглавных обобщенных характеров.

В работе [10] было показано, что ряды Дирихле, которые определяются неглавными обобщенным характерами продолжаются на комплексную плоскость как целые функции с определенным порядком роста модуля. В работе [13] было доказано, что последний факт обеспечивает периодичность коэффициентов.

Таким образом, результаты работ [8],[9],[10] решают известную проблему обобщенных характеров, поставленную в 1950 году Ю.В. Линником и Н.Г. Чудаковым (см. [14],[15]).

Результат данной работы так же непосредственно связан с результатами работ [8],[9],[10]. В предыдущих разделах было показано, что результаты работ [8],[9] позволили доказать аналитическое продолжение рядов Дирихле вида (1) целым образом на комплексную плоскость.

В данном разделе будет показано, что результаты работы позволяют доказать аналог теоремы Даффина-Шеффера для рядов Дирихле вида (1). Имеет место

Теорема 3. *Коэффициенты рядов Дирихле вида (1) являются периодическими, начиная с некоторого номера.*

Остановимся на основных моментах доказательства теоремы 3. Имеет место

Лемма 8. *Модуль целой функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле вида (1) удовлетворяет следующему условию*

$$|f(s)| < C_l^{|s|\ln|s|+A|s|}, \tag{6}$$

где A и C – некоторые положительные константы.

Доказательство.

Как было сказано ранее аналитическое продолжения ряда Дирихле (1) в левую полуплоскость комплексной плоскости осуществляется по той же схеме, что и в работе [8]. Поэтому доказательство оценки (6) проводится точно так же как и доказательство соответствующего результата работы [10].

Доказательство теоремы 3.

В работе [13] доказано, что ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами тогда и только тогда определяет мероморфную с единственным возможным простым полюсом в точке $s = 1$ функцию с условием роста модуля.

$$|f(s)(\sigma - 1)| < C_l^{|s|\ln|s|+A|s|},$$

где C и A – некоторые положительные константы, когда коэффициенты этого ряда периодичны, начиная с некоторого номера. Этот результат с учетом леммы 8 доказывает утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение – М: Наука, 1970.

2. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов: изд-во СГУ, 2013, Вып. 4, ч. 2, С. 80 – 84.

3. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание учебной степени к. ф.-м.н. по специальности 01.01.06 – Ульяновск, 2014.

4. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, Вып. 2, С. 142 – 149.

5. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы Дирихле и некоторые свойства L-функций Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2017, Т. 18, Вып. 4, С. 196 – 204.

6. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, Вып. 3, С. 115 – 124.

7. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентам как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2017, Т. 18, Вып 4, С. 205-2013.

8. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып 2.

9. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К одной задаче Ю.В. Линника // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып 3.

10. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К проблеме обобщенных характеров // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып 3.

11. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций– М: Наука, 1968.

12. Маркушевич А. Н. Теория аналитических функций – М: Наука, 1967, Т.2.

13. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сёге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, Т.36, № 6, С. 805-813.

14. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций // ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2. С. 133-136.

15. Чудаков Н. Г. Обобщенные характеры // Междунар. конгресс матиматиков в Ницце – 1970. Доклады советских математиков – М.: Наука, 1972, С. 335.

REFERENCES

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение – М: Наука, 1970.
2. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов: изд-во СГУ, 2013, Вып. 4, ч. 2, С. 80 – 84.
3. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание учебной степени к. ф.-м.н. по специальности 01.01.06 – Ульяновск, 2014.
4. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, Вып. 2, С. 142 – 149.
5. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы Дирихле и некоторые свойства L-функций Дирихле // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2017, Т. 18, Вып. 4, С. 196 – 204.
6. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2016, Т. 17, Вып. 3, С. 115 – 124.
7. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентам как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2017, Т. 18, Вып 4, С. 205-2013.
8. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып 2.
9. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К одной задаче Ю.В. Линника // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып 3.
10. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К проблеме обобщенных характеров // Чебышевский сборник — Тула: изд-во ТПГУ, 2018, Т. 19, Вып 3.
11. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций– М: Наука, 1968.
12. Маркушевич А. Н. Теория аналитических функций – М: Наука, 1967, Т.2.
13. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сёге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984, Т.36, № 6, С. 805-813.
14. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций // ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2. С. 133-136.
15. Чудаков Н. Г. Обобщенные характеры // Междунар. конгресс матиматиков в Ницце – 1970. Доклады советских математиков – М.: Наука, 1972, С. 335.

Получено 27.07.2018
Принято в печать 22.10.2018