ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 519.174

О РЕАЛИЗАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ ГРАФАМИ РАССТОЯНИЙ И ДИАМЕТРОВ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

А. В. Крот, А. М. Райгородский (г. Москва)

Аннотация

В данной работе рассматривается задача об отыскании пороговых вероятностей для реализации случайного графа геометрическим графом в пространстве $\mathbb{R}^d$. В случае графов диаметров доказывается асимптотика для пороговой вероятности на плоскости, а также точное по порядку выражение для $d \geqslant 3$.

Ключевые слова: дистанционный граф, граф диаметров, случайный граф.

Библиография: 18 названий.

ON EMBEDDING RANDOM GRAPHS INTO DISTANCE GRAPHS AND GRAPHS OF DIAMETERS IN EUCLIDEAN SPACES[2]

A. V. Krot, A. M. Raigorodskii (Moscow)

Abstract

In this paper we consider the problem of finding the probability threshold for the realization of a random graph by geometric graphs in the space $\mathbb{R}^d$. In the case of graphs of diameters we prove asymptotic behavior for the threshold probability on the plane, as well as the exact expression in the case $d \geqslant 3$.

Keywords: distance graph, diameter graph, random graph.

Bibliography: 18 titles.

[1]Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ N 15-01-03530 и гранта НШ-2964.2014.1 поддержки ведущих научных школ.

[2]This work was supported by RFBR grant N 15-01-03530 and grant NSH-2964.2014.1 for support of leading scientific schools.

1. Введение

Настоящая статья посвящена одной задаче, лежащей на стыке комбинаторной геометрии и теории случайных графов. Напомним несколько основных определений. *Графом расстояний в пространстве* $\mathbb{R}^d$ называется любой граф $G=(V,E)$, у которого $V\subset\mathbb{R}^d$, а

$$E=\{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}:\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in V,\quad |\mathbf{x}-\mathbf{y}|=1\},$$

где $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ — евклидово расстояние между точками. В то же время *графом диаметров для множества* $V\subset\mathbb{R}^d$ называется граф $G=(V,E)$, у которого

$$E=\{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}:\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in V,\quad |\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\operatorname{diam}V\},$$

где $\operatorname{diam}V=\sup\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in V}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$. Если множество V конечно, то можно сказать, что граф диаметров — это граф максимальных расстояний.

Графы расстояний возникают в связи с классической проблемой Нелсона–Хадвигера о хроматическом числе пространства (см. [1]–[4]), а изучение графов диаметров мотивировано другой классической проблемой комбинаторной геометрии — проблемой Борсука о разбиении множеств в пространстве на части меньшего диаметра (см. [2]–[5]).

В дальнейшем нас будет интересовать, насколько часто в некотором смысле встречаются графы расстояний или графы диаметров среди абстрактных графов на n вершинах. Пусть $G(n,p)$ — случайный граф в биномиальной модели Эрдеша–Реньи, т.е. $G(n,p)$ — это случайный элемент со значениями во множестве всех графов на данных n вершинах без петель, кратных ребер и ориентации и с распределением $\mathbb{P}(G(n,p)=(\{1,\dots,n\},E))=p^{|E|}(1-p)^{C_n^2-|E|}$ (см. [6]).

Рассмотрим для каждого $n\in\mathbb{N}$ и каждого $d\in\mathbb{N}$ две "пороговых" вероятности:

$$p^*_{\mathrm{dist}}(n,d)=\sup\Big\{p\in[0,1]:\ \mathbb{P}(G(n,p)\text{ изоморфен некоторому графу расстояний в }\mathbb{R}^d)>\frac12\Big\},$$

$$p^*_{\mathrm{diam}}(n,d)=\sup\Big\{p\in[0,1]:\ \mathbb{P}(G(n,p)\text{ изоморфен некоторому графу диаметров в }\mathbb{R}^d)>\frac12\Big\}.$$

В следующем разделе мы приведем формулировки результатов — как ранее известных, так и новых.

2. Формулировки результатов

Величина $p^*_{\mathrm{dist}}(n,d)$ была исследована ранее. Сейчас известно (см. [7]), что

$$p^*_{\mathrm{dist}}(n,1)\sim\frac{\sqrt[3]{6\ln 2}}{n^{4/3}},\quad n\to\infty,$$

и что для любого $d \geqslant 2$ имеют место неравенства

$$(1+o(1))\frac{1}{n} \leqslant p^*_{\rm dist}(n,d) \leqslant (1+o(1))\frac{c(d)}{n}, \quad n \to \infty,$$

где, например,

$$c(2) = 14.797\ldots, \quad c(3) = 55.272\ldots, \quad c(4) = 164.528\ldots, \quad c(5) = 504.285\ldots,$$

$$c(6) = 1365.170\ldots, \quad c(7) = 3624.758\ldots, \quad c(8) = 8675.785\ldots$$

Для графов диаметров результатов прежде не было. Здесь случай $d = 1$ тривиален, т.к. в его рамках вовсе нет графов диаметров, которые имели бы более двух вершин. При $d = 2$ нам удалось получить асимптотику пороговой вероятности.

Теорема 1. *Справедлива асимптотическая формула*

$$p^*_{\rm diam}(n,2) \sim \frac{\sqrt[6]{840\ln 2}}{n^{7/6}}, \quad n \to \infty.$$

Этот результат внешне напоминает упомянутый выше результат о графах расстояний. Однако размерность на 1 больше, и метод доказательства (см. раздел 3) иной. Любопытно то, что при $d \geqslant 3$ также удается получить утверждение, аналогичное указанному выше утверждению о графах рассстояний в размерностях $d \geqslant 2$.

Теорема 2. *Для любого $d \geqslant 3$ существуют числа $c_1(d), c_2(d)$, с которыми*

$$\frac{c_1(d)}{n} \leqslant p^*_{\rm diam}(n,d) \leqslant \frac{c_2(d)}{n}.$$

Отметим, что существуют и некоторые другие вероятностные постановки задач о реализации графов в пространствах (см. [8]–[12]). В следующих двух разделах мы опишем доказательства теорем 1 и 2.

3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 распадается на несколько шагов, каждый из которых состоит в обосновании некоей леммы. Прежде всего обозначим H дерево на семи вершинах $1, 2, \ldots, 7$ с ребрами $(1,2), (2,3), (1,4), (4,5), (1,6), (6,7)$ (см. рис. 1).

Лемма 1. *Не существует графа диаметров на плоскости, изоморфного дереву H.*

Данное утверждение доказывается, например, в [13]. Далее,

Лемма 2. *Пусть $p = \frac{c}{n^{7/6}}$, где $c > \sqrt[6]{840\ln 2}$. Тогда существует такое n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ случайный граф $G(n,p)$ с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, содержит дерево H.*

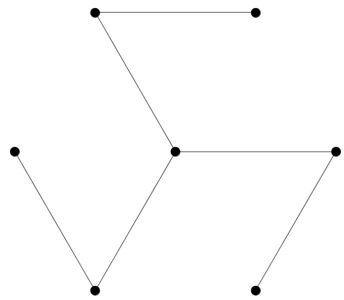

Рис. 1: Дерево на семи вершинах, не изоморфное никакому графу диаметров на плоскости.

Это прямое следствие из теоремы, которую можно найти в [6]:

Теорема 3. *Пусть H — дерево с k вершинами и a автоморфизмами, $p = \frac{c}{n^{k/(k-1)}}$, где $c = const$, X_n — количество копий H в $G(n,p)$. Тогда X_n имеет асимптотическое распределение Пуассона с параметром $\lambda = \frac{c^{k-1}}{a}$.*

В самом деле, дерево H имеет $k = 7$ вершин и у него $a = 840$ автоморфизмов. Тогда при $c > \sqrt[6]{840 \ln 2}$ имеем

$$\lambda = \frac{c^{k-1}}{a} > \ln 2,$$

откуда

$$\mathbb{P}(G(n,p) \text{ содержит дерево } H) = \mathbb{P}(X_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) \geqslant 1 - e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство выполнено при больших n.

Пусть, наконец, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Обозначим K_ε объединение двух кругов радиуса ε на плоскости, расстояние между центрами которых равно 1. Пусть также W — множество всех деревьев на не более чем семи вершинах, за исключением дерева из одной вершины и дерева H.

Лемма 3. *Для каждого ε и каждого дерева из множества W найдется изоморфный ему граф диаметров на плоскости, вершины которого принадлежат множеству K_ε.*

Для доказательства этого утверждения достаточно изобразить каждое из деревьев на плоскости так, как показано на рис. 2.—5.

Дальнейшее доказательство основной теоремы не представляет труда. Действительно, при $p = \frac{c}{n^{7/6}}$ случайный граф $G(n,p)$ с асимптотической вероятностью 1 является лесом, каждая компонента которого имеет размер не более семи. Из лемм 1 и 2 следует, что при $p = \frac{c}{n^{7/6}}$, где $c > \sqrt[6]{840 \ln 2}$, и достаточно больших n граф $G(n,p)$ содержит дерево H и, тем самым, не может быть изоморфен никакому графу диаметров на плоскости.

В случае же, когда $c < \sqrt[6]{840 \ln 2}$ и, значит, $G(n,p)$ с вероятностью, большей половины, не содержит дерево H, остается показать, что лес, каждая компонента которого

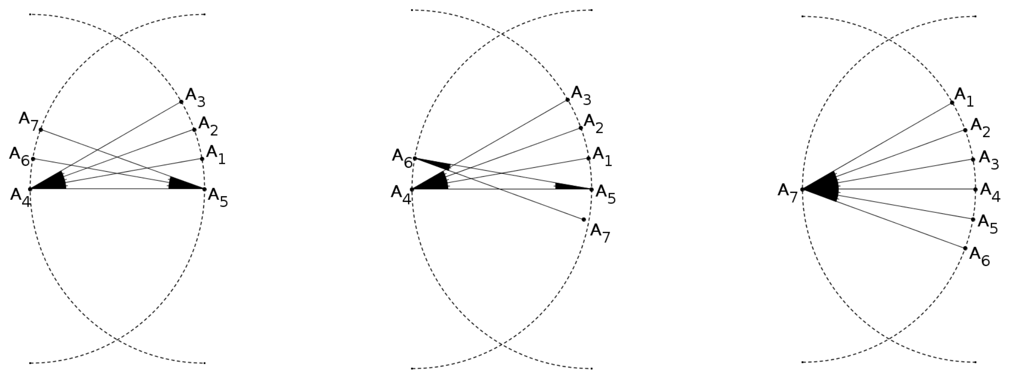

Рис. 2: Реализация рассматриваемых деревьев графами диаметров на плоскости.

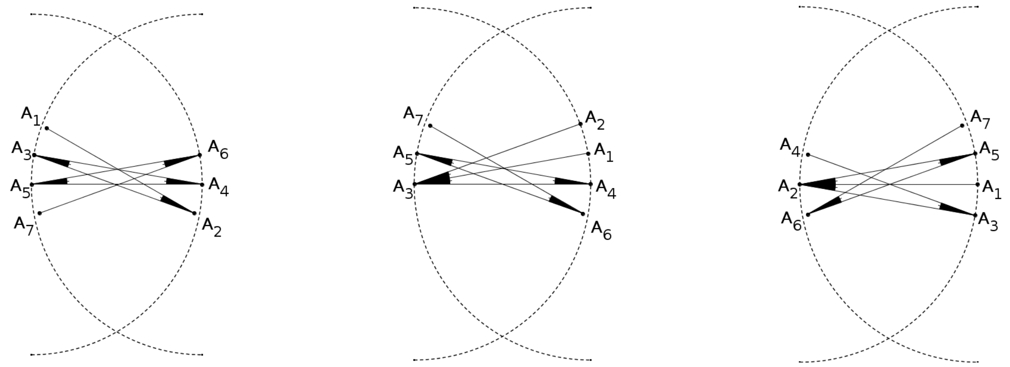

Рис. 3: Реализация рассматриваемых деревьев графами диаметров на плоскости.

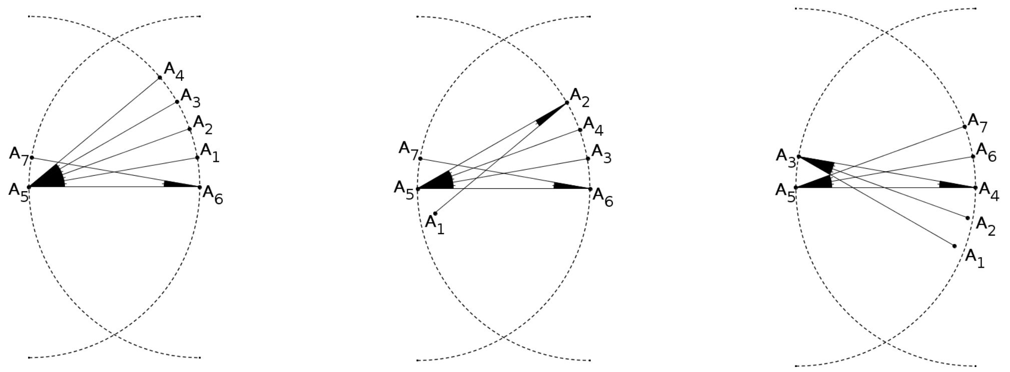

Рис. 4: Реализация рассматриваемых деревьев графами диаметров на плоскости.

либо изолированная вершина, либо дерево из W, изоморфен некоторому графу диаметров на плоскости.

Действительно, воспользовавшись результатом леммы 3, получаем, что каждое из деревьев множества W изоморфно некоторому графу диаметров на плоскости, верши-

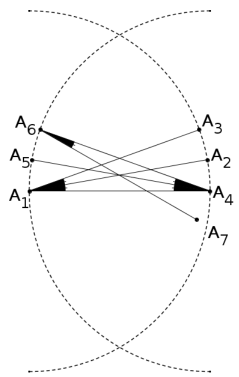

Рис. 5: Реализация рассматриваемых деревьев графами диаметров на плоскости.

ны которого принадлежат соответствующему множеству K_ε. Разместив полученные множества K_ε так, как показано на рис. 6, и, добавив изолированные вершины, получим требуемую реализацию.

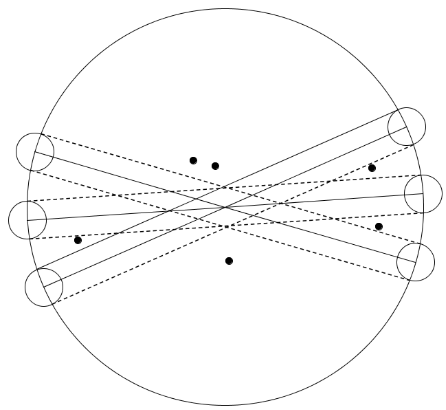

Рис. 6: Реализация рассматриваемого леса графом диаметров на плоскости.

4. Доказательство теоремы 2

Здесь так же, как и в случае теоремы 1, используются несколько вспомогательных утверждений, которые мы перечислим ниже. Мы назовем их не леммами, а фактами, т.к. каждое из них — известная теорема.

Факт 1. *При $p = \frac{c}{n}$, где $c < \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{87}}}{6^{2/3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6(9+\sqrt{87})}}$, и достаточно больших n случайный граф $G(n,p)$ с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, является лесом.*

Это простое упражнение по теории случайных графов (см., например, [14]). Действительно, математическое ожидание количества циклов равно

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=3}^{\infty} C_n^k \cdot \frac{(k-1)!}{2} \cdot p^k \leqslant \sum_{k=3}^{\infty} \frac{c^k}{2k} \leqslant \sum_{k=3}^{\infty} c^k = \frac{c^3}{1-c}.$$

Далее, используя неравенство Маркова, получаем $\mathbb{P}(X > 0) \leqslant \mathbb{E}X \leqslant \frac{c^3}{1-c}$. Последнее выражение меньше $\frac{1}{2}$ при $c < \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{87}}}{6^{2/3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6(9+\sqrt{87})}}$. Стоит отметить, что отыскание наилучшей константы — сложная задача.

Факт 2. *Всякий лес изоморфен некоторому графу диаметров в* $\mathbb{R}^d$ *при* $d \geqslant 3$.

Доказательство данного факта использует нетривиальную теорему, доказанную в [15]:

Теорема 4. *Множество вершин любого дерева* T *можно так вложить в пространство* $\mathbb{R}^3$, *что расстояние между любыми двумя смежными вершинами равно* 1, *а расстояние между не смежными вершинами меньше* 1.

Легко понять, что данное утверждение верно и в случае леса. Действительно, рассмотрим два произвольных дерева. Соединим эти два дерева в одно, добавляя цепь O_1VO_2 длины два между ними. Такое дерево, согласно теореме 4, реализуется графом диаметров в $\mathbb{R}^3$. Удалим вершину V вместе с исходящими из нее ребрами из геометрической реализации получившегося дерева. Останется геометрическая реализация исходного леса. При этом новые ребра не появятся. Последовательно объединяя таким образом деревья леса, получим необходимую реализацию.

Из фактов 1 и 2 следует, что при $p = \frac{c}{n}$, где $c < \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{87}}}{6^{2/3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{6(9+\sqrt{87})}}$, и достаточно больших n случайный граф $G(n,p)$ является лесом (факт 1), который изоморфен некоторому графу диаметров в $\mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 3$ (факт 2), т.е. верна нижняя оценка величины $p^*_{\mathrm{diam}}(n,d)$.

Напомним, что *хроматическим числом* графа $G = (V,E)$ называется минимальное количество $\chi(G)$ цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы среди вершин одного цвета не было ребер. Далее, каждое множество вершин, свободное от ребер, называется *независимым*, а максимум мощности независимого множества — это *число независимости* $\alpha(G)$ графа. Очевидно, что $\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$.

Обозначим $\chi(d)$ максимальное значение хроматического числа графа диаметров в $\mathbb{R}^d$.

Факт 3. *При любом* d *значение* $\chi(d)$ *конечно. Более того, известно, что*

$$\chi(d) \leqslant \min\left(5d \cdot \sqrt{d} \cdot (4 + \ln d) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{d/2}, 2^{d-1} + 1\right).$$

Первая из двух оценок принадлежит Шрамму (см. [16]); близкое утверждение доказано также Бургейном и Линденштрауссом в [17]. Вторая из двух оценок установлена Лассаком в [18].

С помощью неравенства Маркова легко показать, что при $p = \frac{c}{n}$, где $c > 2\chi(d) \cdot (1+\ln(\chi(d)))$, и достаточно больших n хроматическое число случайного графа $G(n,p)$

с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, больше, чем $\chi(d)$. Из этого с учетом факта 3 вытекает верхняя оценка величины $p^*_{\mathrm{diam}}(n,d)$.

Действительно, обозначим X количество независимых множеств размера $k = \left\lceil \frac{n}{\chi(d)} \right\rceil$ в случайном графе $G(n,p)$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(\chi(G(n,p)) > \chi(d)\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\alpha(G(n,p)) < \frac{n}{\chi(d)}\right) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(\alpha(G(n,p)) \geqslant \frac{n}{\chi(d)}\right) \geqslant 1 - \mathbb{P}\left(X \geqslant 1\right) \geqslant 1 - \mathbb{E}X.$$

В свою очередь,

$$\mathbb{E}X = C_n^k \cdot (1-p)^{C_k^2} \leqslant \frac{n^k}{k!} \cdot e^{-p\cdot\frac{k(k-1)}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{ne}{k}\right)^k \cdot e^{-p\cdot\frac{k(k-1)}{2}} \leqslant e^{\frac{\ln(\chi(d))+1}{\chi(d)}\cdot n - (1+o(1))\frac{c}{2(\chi(d))^2}\cdot n}.$$

Ясно, что при $c > 2\chi(d)\cdot(1+\ln(\chi(d)))$ последнее выражение стремится к нулю с ростом n. Таким образом, $\mathbb{P}\left(\chi(G(n,p)) > \chi(d)\right) > \frac{1}{2}$, что и требовалось.

5. Заключение

В настоящей работе мы изучили проблему реализации графов графами расстояний и диаметров в евклидовых пространствах.

Основным результатом является отыскание точных по порядку оценок для пороговых вероятностей вложимости случайного графа в соответствующих геометрический граф в пространстве. Более того, для случая плоскости и графов диаметров на ней найдена асимптотика пороговой вероятности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. A. Székely Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer. 2002. Vol. 11. P. 649 – 666.

2. A. M. Raigorodskii Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // “Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics”, AMS, Contemporary Mathematics. 2014. Vol. 625. P. 93 – 109.

3. A. M. Raigorodskii Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer. 2013. P. 429 – 460.

4. А. М. Райгородский Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, вып. 1. С. 107 – 146.

5. V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan Excursions into combinatorial geometry. Universitext, Springer, Berlin, 1997.

6. B. Bollobás Random Graphs. Cambridge Univ. Press, Second Edition. 2001.

7. А. А. Кокоткин, А. М. Райгородский О больших подграфах графа расстояний, имеющих маленькое хроматическое число // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 51. С. 64 – 73.

8. А. М. Райгородский, С. В. Нагаева О реализации случайных графов графами расстояний в пространствах фиксированной размерности // Доклады РАН. 2009. Т. 424, № 3. С. 315 – 317.

9. А. М. Райгородский Об одной серии задач рамсеевского типа в комбинаторной геометрии // Доклады РАН. 2007. Т. 413, № 2. С. 171 – 173.

10. А. Б. Купавский, М. В. Титова Дистанционные числа Рамсея // Доклады РАН. 2013. Т. 449, № 3. С. 267 – 270.

11. N. Alon, A. Kupavskii Two notions of unit distance graphs // J. Comb. Theory, Ser. A. 2014. Vol. 125. P. 1 – 17.

12. A. B. Kupavskiy, A. M. Raigorodskii, M. V. Titova New bounds for the distance Ramsey number // Discrete Mathematics. 2013. Vol. 313, № 22. P. 2566 – 2574.

13. P. Erdős On sets of distances of n points // Amer. Math. Monthly. 1946. Vol. 53. P. 248 – 250.

14. А. М. Райгородский Модели случайных графов. М.: МЦНМО. 2011.

15. H. Maehara, J. Reiterman, V. Rödl, E. *Šiňa*jová Embedding of trees in Euclidean spaces // Graphs and Combinatorics. 1988. Vol. 4. P. 43 – 47.

16. O. Schramm Illuminating sets of constant width // Mathematika. 1988. Vol. 35. P. 180 – 189.

17. J. Bourgain, J. Lindenstrauss On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter // Geometric Aspects of Functional Analysis (J. Lindenstrauss and V. Milman, eds.), Lecture Notes in Math., 1469, Springer-Verlag, Berlin, 1991. P. 138 – 144.

18. M. Lassak An estimate concerning Borsuk's partition problem // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1982. Vol. 30. P. 449 – 451.

REFERENCES

1. Székely, L. A. 2002, "Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems", *Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer*, vol. 11, pp. 649 – 666.

2. Raigorodskii, A. M. 2014, "Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters", *Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, AMS, Contemporary Mathematics*, vol. 625, pp. 93 – 109.

3. Raigorodskii, A. M. 2013, "Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters", *Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer*, P. 429 – 460.

4. Raigorodskii, A. M. 2001, "The Borsuk problem and the chromatic numbers of some metric spaces", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 56, № 1, pp. 107 – 146; English transl. in *Russian Math. Surveys*, vol. 56, № 1, pp. 103 – 139.

5. Boltyanski, V. G., Martini, H. & Soltan, P. S. 1997, "Excursions into combinatorial geometry", *Universitext, Springer, Berlin.*

6. Bollobás, B. 2001, "Random Graphs", *Cambridge Univ. Press*, Second Edition.

7. Kokotkin, A. A. & Raigorodskii, A. M. 2013, "On large subgraphs of a distance graph having small chromatic numbers", *Contemp Math. Fundam. Directions*, vol. 51, pp. 64 – 73; English transl. in preparation.

8. Raigorodskii, A. M. & Nagaeva, S. V. 2009, "On the realization of random graphs as distance graphs in spaces of fixed dimension", *Doklady of the Russian Acad. Sci.*, vol. 424, № 3, pp. 315 – 317; English transl. in *Doklady Math.*, vol. 79, № 1, pp. 63 – 65.

9. Raigorodskii, A. M. 2007, "On a series of Ramsey-type problems in combinatorial geometry", *Doklady of the Russian Acad. Sci.*, vol. 413, № 2, pp. 171 – 173; English transl. in *Doklady Math.*, vol. 75, № 2, pp. 221 – 223.

10. Kupavskii, A. B. & Titova, M. V. 2013, "Distance Ramsey Numbers", *Doklady of the Russian Acad. Sci.*, vol. 449, № 3, pp. 267 – 270. English transl. in *Doklady Math.*

11. Alon, N. & Kupavskii, A. 2014, "Two notions of unit distance graphs", *J. Comb. Theory, Ser. A.*, vol. 125, pp. 1 – 17.

12. Kupavskiy, A. B., Raigorodskii, A. M. & Titova, M. V. 2013, "New bounds for the distance Ramsey number", *Discrete Mathematics*, vol. 313, № 22, pp. 2566 – 2574.

13. Erdős, P. 1946, "On sets of distances of n points", *Amer. Math. Monthly*, vol. 53, pp. 248 – 250.

14. Raigorodskii, A. M. 2011, "Models of random graphs", *Moscow Centre for Continuous Mathematical Education (MCCME), Moscow, Russia*, (book in Russian).

15. Maehara, H., Reiterman, J., Rödl, V. & Šiňajová, E. 1988, "Embedding of trees in Euclidean spaces", *Graphs and Combinatorics*, vol. 4, pp. 43 – 47.

16. Schramm, O. 1988, "Illuminating sets of constant width", *Mathematika*, vol. 35, pp. 180 – 189.

17. Bourgain, J. & Lindenstrauss, J. 1991, "On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter", *Geometric Aspects of Functional Analysis (J. Lindenstrauss and V. Milman, eds.), Lecture Notes in Math., 1469, Springer-Verlag, Berlin*, pp. 138 – 144.

18. Lassak, M. 1982, "An estimate concerning Borsuk's partition problem", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.*, vol. 30, pp. 449 – 451.

Московский физико-технический институт,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
Поступило 30.04.2015