ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16. Выпуск 4.

УДК 512.541

АССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА НА ВЕКТОРНЫХ ГРУППАХ

Е. И. Компанцева (г. Москва)

Аннотация

Абелева группа называется полупростой, если она является аддитивной группой некоторого полупростого кольца. Проблема описания полупростых групп была сформулирована Р. А. Бьюмонтом и Д. А. Лоувером. Настоящая работа посвящена изучению полупростых векторных групп.

Векторной группой называется прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} R_i$ абелевых групп без кручения $R_i\,(i \in I)$ ранга 1. В статье описаны полупростые группы в классе редуцированных векторных групп $\prod\limits_{i\in I} R_i$ в случае не более, чем счетного множества I.

Умножением на абелевой группе G называют гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G \to G$, это умножение обозначается также знаком $\times$, то есть $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ называется кольцом на группе G, которое обозначается $(G, \times)$. Показано, что любое умножение на прямом произведении групп ранга 1 определяется его ограничением на сумму этих групп. В частности, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть I не более, чем счетное множество, $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ — векторная группа, $S = \bigoplus\limits_{i\in I} R_i$. Если в кольце $(G, \times)$ выполняется $S\times S = 0$, то $(G, \times)$ — кольцо с нулевым умножением.

Пусть $\prod\limits_{i\in I} R_i$ — векторная группа, $t(R_i)$ — тип группы R_i. Обозначим через I_0 множество индексов $i \in I$, для которых $t(R_i)$ — идемпотентный тип с бесконечным числом нулей. Если $k \in I$, то $I_0(k)$ — множество индексов $i \in I_0$, для которых $t(R_i) \geq t(R_k)$.

Теорема 1. Пусть I не более, чем счетное множество. Редуцированная векторная группа $\prod\limits_{i\in I} R_i$ является полупростой тогда и только тогда, когда

1) среди групп $R_i\,(i \in I)$ нет групп идемпотентного типа с конечным числом нулей,

2) для любой группы R_k неидемпотентного типа множество $I_0(k)$ бесконечно.

Заметим, что набор типов групп $R_i\,(i \in I)$ в случае не более, чем счетного множества I является инвариантом группы $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$, поэтому описание полупростых групп в теореме 7 не зависит от разложения группы G в прямое произведение групп ранга 1.

Ключевые слова: абелева группа, векторная группа, кольцо на абелевой группе, полупростое ассоциативное кольцо, полупростая группа.

Библиография: 17 названий.

ASSOCIATIVE RINGS ON VECTOR GROUPS

E. I. Kompantseva (Moscow)

Abstract

An abelian group is called semisimple if it is the additive group of a semisimple ring. R. A. Beaumont and D. A. Lawver have formulated the description problem for semisimple groups. We consider vector semisimple groups in the present paper. Vector groups are direct products $\prod\limits_{i\in I} R_i$ of torsion free abelian groups $R_i\,(i \in I)$ of rank 1. The semisimple vector groups $\prod\limits_{i\in I} R_i$ are described in the present paper in the case where I is a not greater than countable set.

A multiplication on an abelian group G is a homomorphism $\mu\colon G\otimes G \to G$, we denote it as $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ for $g_1, g_2 \in G$. The group G with a multiplication $\times$ is called the ring on the group G and it is denoted as $(G, \times)$. It is shown that every multiplication on a direct product of torsion free rank-1 groups is determined by its restriction on the direct sum of these groups. In particular, the following statement takes place.

Lemma 3. Let I be a not greater than countable set, $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ and $S = \bigoplus\limits_{i\in I} R_i$. Let $\times$ be a multiplication on the group G. If the restriction of this multiplication on S is zero, then the multiplication itself is zero.

Let $\prod\limits_{i\in I} R_i$ be a vector group. We use the following notations: $t(R_i)$ is the type of the group R_i, I_0 is the set of indices $i \in I$ such that $t(R_i)$ is an idempotent type with an infinite number of zero components. If $k \in I$, then $I_0(k)$ is the set of indices $i \in I_0$ such that $t(R_i) \geq t(R_k)$.

Theorem 1. Let I be a not greater than countable set. A reduced vector group $\prod\limits_{i\in I} R_i$ is semisimple if and only if

1) there are no groups $R_i\,(i \in I)$ of an idempotent type, where the number of zero components is finite;

2) the set $I_0(k)$ is infinite for every group R_k of the not idempotent type.

Note that the set of types of groups $R_i\,(i \in I)$ is an invariant of the group $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$, if I is a not greater than countable set. Therefore, this description doesn't depend on the decomposition of the group G into a direct product of rank-1 groups.

Keywords: abelian group, vector group, sevisimple associative ring.
Bibliography: 17 titles.

1. Введение

В настоящей работе продолжено исследование полупростых групп, начатое в [1, 2]. Абелева группа называется полупростой, если она является аддитивной группой некоторого полупростого кольца. Проблема описания полупростых групп была сформулирована Бьюмонтом Р. А. и Лоувером Д. А. в [3], ее решению посвящены работы [4-9] и др.

Векторной группой называют прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} R_i$ абелевых групп без кручения $R_i\,(i \in I)$ ранга 1. Векторные группы широко изучались в работах алгебраистов, среди которых следует отметить статьи Мишиной А. П. [10, 11] и Лося Д. [12].

В настоящей работе описаны полупростые группы в классе редуцированных векторных групп $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ в случае не более, чем счетного множества I.

2. Ассоциативные кольца на векторных группах

В статье рассматриваются только абелевы группы, и слово “группа” всюду в дальнейшем означает “абелева группа”. Умножением на группе G называется гомоморфизм $\mu\colon G \otimes G \to G$. Это умножение обозначается также знаком $\times$, то есть $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ называется кольцом на группе G и обозначается $(G, \times)$, $J(G, \times)$ — радикал Джекобсона этого кольца.

Пусть $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ — векторная группа, элемент $g \in G$ будем записывать в виде $g = (g_i)_{i\in I}$, а также в виде $g = (g_1, g_2, \ldots)$, если I совпадает с множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кроме того, будем использовать следующие обозначения: $t(R), t(g)$ — типы однородной группы R и элемента g соответственно; $\chi(g)$ — характеристика элемента g; π_i — проекция группы G на подгруппу R_i; если $G = A \oplus B$, то π_A — проекция группы G на подгруппу A. Будем рассматривать следующие множества: $I_0 = \{i \in I | t(R_i)$ — идемпотентный тип с бесконечным числом нулей$\}$, $I_{nid} = \{i \in I | t(R_i)$ — неидемпотентный тип$\}$; $I_0(k) = \{i \in \in I_0 | t(R_i) \geq t(R_k)\}$ для $k \in I$. Как обычно, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; если $a, b \in \mathbb{Z}$, то запись $a|b\,(a \nmid b)$ означает, что a делит b (a не делит b). За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [13–15].

Лемма 1. *Пусть* $G = \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} R_k$ *и при всех* $k \geqslant 2$ *группа* R_k *имеет идемпотентный тип* $t(R_k)$ *с бесконечным числом нулей такой, что* $t(R_k) \geqslant t(R_1)$. *Тогда группа* G *полупроста.*

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} R_k e_k$, где при всех $k \geqslant 2$ характеристика $\chi(e_k)$ состоит только из нулей и символов ∞, R_k — подкольцо с единицей поля рациональных чисел, аддитивная группа которого содержит подгруппу R_1.

Пусть $k \geqslant 2$, тогда по условию $t(e_k) \geqslant t(e_1)$ и, следовательно, существует такое натуральное число m_k, что $m_k \nmid e_k$ и $\chi(m_k e_k) \geqslant \chi(e_1)$. При этом $\chi(m_k^2 e_k) = \chi(m_k e_k)\cdot\chi(m_k e_k) \geqslant \chi(e_1)\cdot\chi(e_1)$. Так как $t(e_k)$ содержит бесконечное число нулей, то существует простое число p_k такое, что

$$p_k \not| \, e_k,\ p_k \not| \, e_1 \tag{1}$$

и

$$p_k \not| \, m_k. \tag{2}$$

Таким образом получим последовательность простых чисел

$$p_2, p_3, \ldots \tag{3}$$

При этом для каждого $k \geqslant 2$ чисел p_k, удовлетворяющих условию (1), существует бесконечно много. Поэтому последовательность (3) можно выбрать так, чтобы в ней все числа были различны.

Определим теперь бинарную операцию $\times$ на G, положив

$$\begin{gathered}
e_1 \times e_1 = (0, m_2^2 e_2, \ldots, m_k^2 e_k, \ldots);\\
e_1 \times (0, a_2 e_2, \ldots, a_k e_k, \ldots) = (0, a_2 e_2, \ldots, a_k e_k, \ldots) \times e_1 =\\
= (0, (a_2 m_2 p_2) e_2, \ldots, (a_k m_k p_k) e_k, \ldots);\\
(0, a_2 e_2, \ldots, a_k e_k, \ldots) \times (0, b_2 e_2, \ldots, b_k e_k, \ldots) =\\
= (0, (a_2 b_2 p_2^2) e_2, \ldots, (a_k b_k p_k^2) e_k, \ldots).
\end{gathered}$$

Непосредственная проверка показывает, что операция $\times$ является ассоциативным умножением.

Очевидно, $A = \prod\limits_{k=2}^{\infty} R_k e_k$ — идеал кольца $(G, \times)$. Этот идеал является прямым произведением колец $(R_k e_k, \times)$, где $e_k \times e_k = p_k^2 e_k$, которые полупросты [3]. Следовательно, и идеал A полупрост.

Покажем, что кольцо $(G, \times)$ полупросто. Пусть

$$a = (a_1 e_1, a_2 e_2, \ldots) \in J(G, \times)\,(a_k \in R_k).$$

Без потери общности можно считать, что $a_1 \in \mathbb{Z}$. Пусть теперь

$$c = (e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots) \in G.$$

Тогда

$$\begin{gathered}a \times c = (a_1e_1, \ldots, a_ke_k, \ldots) \times (e_1, \ldots, e_k, \ldots) = \\ = a_1e_1 \times e_1 + a_1e_1 \times (0, e_2, \ldots, e_k, \ldots) + \\ +(0, a_2e_2, \ldots, a_ke_k, \ldots) \times e_1 + (0, a_2e_2, \ldots, a_ke_k, \ldots) \times (0, e_2, \ldots, e_k, \ldots) = \\ = (0, a_1m_2^2e_2, \ldots, a_1m_k^2e_k, \ldots) + (0, a_1m_2p_2e_2, \ldots, a_1m_kp_ke_k, \ldots) + \\ +(0, a_2m_2p_2e_2, \ldots, a_km_kp_ke_k, \ldots) + (0, a_2p_2^2e_2, \ldots, a_kp_k^2e_k, \ldots) = \\ = (0, (a_1m_2^2 + a_1m_2p_2 + a_2m_2p_2 + a_2p_2^2)e_2, \ldots, \\ (a_1m_k^2 + a_1m_kp_k + a_km_kp_k + a_kp_k^2)e_k, \ldots).\end{gathered}$$

Значит, $a \times c \in J(G, \times) \cap A = J(A, \times) = 0$ [15]. Следовательно, $a_1m_k^2 + a_1m_kp_k + a_km_kp_k + a_kp_k^2 = 0$ для любого $k \geqslant 2$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Так как $p_k \not| e_k$, то существует натуральное число s_k такое, что

$$p_k \not| s_k \text{ и } s_ka_k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Так как $s_ka_1m_k^2 + s_ka_1m_kp_k + s_ka_km_kp_k + s_ka_kp_k^2 = 0$, то $p_k | s_ka_1m_k$. Так как $p_k \not| s_k$, $p_k \not| m_k$ в силу (2) и (4), то $p_k | a_1$ при всех $k \geq 1$. Значит, $a_1 \in \bigcap\limits_k p_k\mathbb{Z} = 0$, и, следовательно, $a = (0, a_2e_2, \ldots, a_ke_k, \ldots) \in J(G, \times) \cap A = J(A, \times) = 0$. Таким образом, $J(G, \times) = 0$, и, значит, группа G полупроста.

Лемма 2. *Пусть I — не более, чем счетное множество, $G = \prod\limits_{i \in I} R_i$ — редуцированная векторная группа и $(G, \times)$ — ассоциативное кольцо на G. Тогда для любого $k \in I$ существует конечное подмножество F_k множества I такое, что*

1) для любого $s \in F_k$ найдется индекс $i \in I$ такой, что $\pi_k(R_s \times R_i) \neq 0$ или $\pi_k(R_i \times R_s) \neq 0$;

2) $\pi_k(G \times \prod\limits_{s \in I \setminus F_k} R_s) = \pi_k(\prod\limits_{s \in I \setminus F_k} R_s \times G) = 0$.

Доказательство. Запишем группу G в виде $G = \prod\limits_{i \in I} R_ie_i$, и будем рассматривать R_i как подгруппы аддитивной группы рациональных чисел. Пусть $k, s \in I$, обозначим

$$\begin{gathered}L_k(s) = \{i \in I \mid \pi_k(e_i \times e_s) \neq 0\}, \\ M_k(s) = \{i \in I \mid \pi_k(e_s \times e_i) \neq 0\}, \\ L_k = \cup_{s \in I} L_k(s) = \{i \in I \mid (\exists s \in I)\pi_k(e_i \times e_s) \neq 0\}, \\ M_k = \cup_{s \in I} M_k(s) = \{i \in I \mid (\exists s \in I)\pi_k(e_s \times e_i) \neq 0\}.\end{gathered}$$

Покажем, что множества L_k и M_k конечны при всех $k \in I$. Пусть $k, s \in I$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\begin{aligned}\varphi_{k,s}\colon \quad & G \to R_ke_k \\ & x \mapsto \pi_k(x \times e_s).\end{aligned} \tag{5}$$

Так как $R_k e_k$ узкая группа [14], то $\varphi_{k,s}(e_i) = 0$, то есть $\pi_k(e_i \times e_s) = 0$, для почти всех $i \in I$. Следовательно, множество $L_k(s)$ конечно. Аналогично, $M_k(s)$ конечно.

Далее отметим, что если L_k — конечное множество, то $M_k = \bigcup\limits_{s\in L_k} M_k(s)$ тоже конечно, и наоборот. Допустим, L_k и M_k бесконечны. Определим последовательности $i_1, i_2, \ldots \in L_k$ и $j_1, j_2, \ldots \in M_k$ следующим образом: i_1 — произвольный элемент L_k, j_1 — произвольный элемент $M_k(i_1)$. Пусть $i_1, \ldots, i_n$ и $j_1, \ldots, j_n$ определены. Так как $M_k = \bigcup\limits_{i\in L_k} M_k(i)$ бесконечно, а $M_k(i)$ конечно при всех $i \in I$, то $M_k(i) \not\subset M_k(i_1) \cup \ldots \cup M_k(i_n)$ для бесконечного числа $i \in L_k$. Среди таких i найдется элемент i_{n+1}, не принадлежащий конечному множеству $L_k(j_1) \cup \ldots \cup L_k(j_n)$. Так как $M_k(i_{n+1}) \not\subset M_k(i_1) \cup \ldots \cup M_k(i_n)$, то выберем $j_{n+1} \in M_k(i_{n+1}) \setminus (M_k(i_1) \cup \ldots \cup M_k(i_n))$.

Покажем, что $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_n}) \neq 0$ и $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_s}) = 0$ при всех $s \neq n$. Так как $j_n \in M_k(i_n)$, то $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_n}) \neq 0$. Если $s > n$, то

$$j_s \in M_k(i_s) \setminus (M_k(i_1) \cup \ldots \cup M_k(i_{s-1})).$$

Следовательно, $j_s \notin M_k(i_n)$, откуда $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_s}) = 0$. Если $s < n$, то $i_n \notin L_k(j_s)$, так как $i_n \notin L_k(j_1) \cup \ldots \cup L_k(j_{n-1})$. Следовательно, $\pi_k(e_{i_n} \times e_{j_s}) = 0$. По теореме 94.4 в [14] имеем $\pi_k(\prod\limits_{s\neq n} R_{i_s} e_{i_s} \times e_{j_n}) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Для каждого $g \in G$ определим гомоморфизм

$$\begin{aligned} \psi_{k,g}\colon \quad & G \to R_k e_k \\ & x \mapsto \pi_k(g \times x). \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим элемент $a = (e_{i_n})_{n\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} R_{i_n} e_{i_n} \subset G$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_{k,a}(e_{j_n}) = \pi_k(a \times e_{j_n}) = \pi_k(e_{i_n} \times e_{j_n}) + \pi_k((a - e_{i_n}) \times e_{j_n}) = \pi_k(e_{i_n} \times e_{j_n}) \neq 0$, так как $a - e_{i_n} \in \prod\limits_{s\neq n} R_{i_s}$. Это противоречит теореме 94.4 в [14]. Следовательно, множества L_k и M_k конечны. Положив $F_k = L_k \cup M_k$, получим, что это множество удовлетворяет условию 1).

Покажем, что выполняется условие 2). Пусть $k \in I$, $s \in I \backslash F_k$. Тогда $\varphi_{k,s}(e_i) = \pi_k(e_i \times e_s) = 0$ для всех $i \in I$, так как $s \notin M_k$. Следовательно, $\varphi_{k,s}(\bigoplus\limits_{i\in I} R_i e_i) = 0$, откуда $\varphi_{k,s}(G) = \varphi_{k,s}(\prod\limits_{i\in I} R_i e_i) = 0$. Значит,

$$\pi_k(g \times e_s) = 0 \text{ при любых } g \in G \text{ и } s \in I \backslash F_k. \tag{7}$$

Зафиксируем теперь $g \in G$ и рассмотрим гомоморфизм $\psi_{k,g}$, определенный в (6). Из (7) имеем $\psi_{k,g}(\bigoplus\limits_{s\in I\backslash F_k} R_s e_s) = 0$, откуда $\psi_{k,g}(\prod\limits_{s\in I\backslash F_k} R_s e_s) = 0$, то есть $\pi_k(g \times \prod\limits_{s\in I\backslash F_k} R_s e_s) = 0$. В силу произвольности элемента $g \in G$ получаем, что $\pi_k(G \times \prod\limits_{s\in I\backslash F_k} R_s e_s) = 0$. Аналогично, $\pi_k(\prod\limits_{i\in I\backslash F_k} R_s e_s \times G) = 0$.

Лемма 3. *Пусть множество I не более, чем счетно, $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$, $S = \bigoplus\limits_{i\in I} R_i$. Если в кольце $(G, \times)$ выполняется $S \times S = 0$, то $(G, \times)$ — кольцо с нулевым умножением.*

Лемма 4. *Пусть I — не более, чем счетное множество, $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ — редуцированная векторная группа. Если среди групп $R_i\,(i \in I)$ есть группа идемпотентного типа с конечным числом нулей, то группа G не является полупростой.*

Доказательство. Если среди групп $R_i\,(i \in I)$ есть группа идемпотентного типа с конечным числом нулей, то среди этих групп существует группа R_n такая, что $t_n = t(R_n)$ — идемпотентный тип с конечным числом нулей, максимальный в множестве $\{t(R_i) \mid i \in I\}$.

Пусть $G_1 = \prod\limits_{t(R_i)=t_n} R_i$, тогда группа G_1 сепарабельна [11], в [2] показано, что радикал Джекобсона любого кольца на G_1 содержит подгруппу $\bigcap\limits_p pG_1 \neq 0$. В силу леммы 2 группа G_1 является идеалом в любом кольце на группе G, значит, в любом кольце на G есть идеал с ненулевым радикалом Джекобсона. Поэтому группа G не является полупростой.

Лемма 5. *Пусть I — не более, чем счетное множество, $G = \prod\limits_{i\in I} R_i$ и пусть все группы R_i имеют неидемпотентный тип. Тогда любое ассоциативное кольцо на G радикально.*

Доказательство. Пусть $(G, \times)$ — ассоциативное кольцо на G и $k \in I$. Обозначим

$$A_k = \{g \in G \mid (\forall a, b \in G)\pi_k(a \times g) = \pi_k(g \times a) = \pi_k(a \times g \times b) = 0\},$$

Очевидно, A_k — идеал кольца $(G, \times)$. Пусть $S_k = \bigoplus\limits_{i\in F_k} R_i$, $B_k = \prod\limits_{i\in I\setminus F_k} R_i$, $C_k = S_k \cap A_k$. Тогда $B_k \subset A_k$ и $G = S_k \oplus B_k$, $A_k = C_k \oplus B_k$. Определим умножение $\times_k$ на S_k, положив $a \times_k b = \pi_{S_k}(a \times b)$ для всех $a, b \in S_k$. Тогда непосредственной проверкой можно убедиться в том, что C_k — идеал кольца $(S_k, \times_k)$ и $(G/A_k, \times) \cong (S_k/C_k, \times_k)$ при изоморфизме $g + A_k \mapsto \pi_{S_k}(g) + C_k$. По теореме 2.2 в [17] кольцо $(S_k, \times_k)$ нильпотентно. Следовательно, $(G/A_k, \times)$ — также нильпотентное кольцо. Поэтому

$$(\exists n_k \in \mathbb{N})(\forall g \in G) \quad g^{n_k} \in A_k,$$

(здесь g^{n_k} — степени элемента g в кольце $(G, \times)$), отсюда

$$(\forall n > n_k)(\forall g \in G) \quad \pi_k(g^n) = 0. \tag{8}$$

Значит, для любого элемента $g \in G$ определен элемент $g' = -g - g^2 - g^3 - \ldots$, то есть $g' = (g_k)_{k \in I}$, где $g_k = \pi_k(-g - g^2 - \ldots - g^{n_k})$. Покажем, что g' — квазиобратный к элементу g в кольце $(G, \times)$. В силу (8) имеем:

$$(\exists m_k \geqslant n_k)(\forall n > m_k)(\forall g \in G) \quad \pi_{S_k}(g^n) = 0.$$

Поэтому $-g^{m_k+1} - g^{m_k+2} - \ldots \in B_k$ и $\pi_k(g') = \pi_k(-g - g^2 - \ldots - g^{m_k})$. Кроме того, из леммы 2 получаем

$$\pi_k(g \times g') = \pi_k(g \times (-g - g^2 - \ldots - g^{m_k}) + g \times (-g^{m_k+1} - g^{m_k+2} - \ldots)) =$$
$$= \pi_k(g \times (-g - g^2 - \ldots - g^{m_k})) = \pi_k(-g^2 - g^3 - \ldots - g^{m_k}).$$

Следовательно,

$$\pi_k(g + g' - g \times g') = \pi_k(g) + \pi_k(-g - g^2 - \ldots - g^{m_k}) -$$
$$-\pi_k(-g^2 - g^3 - \ldots - g^{m_k}) = 0.$$

В силу произвольности индекса $k \in I$ элемент g' является квазиобратным к g. Значит, кольцо $(G, \times)$ радикально.

Лемма 6. *Пусть I — не более, чем счетное множество, $G = \prod\limits_{i \in I} R_i$ — редуцированная группа. Пусть среди групп $R_i\,(i \in I)$ есть группа неидемпотентного типа и лишь конечное число групп имеет идемпотентный тип с бесконечным числом нулей. Тогда группа G не является полупростой.*

Доказательство. Если среди групп $R_i\,(i \in I)$ есть группа идемпотентного типа с конечным число нулей, то по лемме 4 группа G не является полупростой. Пусть теперь среди групп $R_i\,(i \in I)$ нет групп с указанными типами, и пусть $R_{i_1}, \ldots, R_{i_n}$ — все группы, имеющие идемпотентный тип.

Допустим, тип хотя бы одной из этих групп не является максимальным в множестве $\{t(R_i) \mid i \in I\}$. Тогда среди групп $R_{i_1}, \ldots, R_{i_n}$ существует группа (пусть, для определенности, это R_{i_1}) такая, что $J = \{j \in I \mid t(R_j) > t(R_{i_1})\} \neq \varnothing$ и $t(R_{i_l}) \not> t(R_{i_1})$ для всех $l = \overline{2, n}$. Тогда $t(R_j)$ неидемпотентный тип при всех $j \in J$.

Пусть $(G, \times)$ — ассоциативное кольцо на G, $A = \prod\limits_{j \in J} R_j$. Нетрудно видеть, что A — идеал кольца $(G, \times)$. Действительно, пусть $a = (a_i)_{i \in J} \in A$, $g = (g_i)_{i \in I} \in G$ и $k \in I$. Тогда $\pi_k(g \times a) = \pi_k(\sum\limits_{i,j \in F_k} g_i \times a_j)$ по лемме 2. Так как $t(g_i \times a_j) \geqslant t(a_j) > t(R_{i_1})$ при всех $i \in I$, $j \in J$, то $t(\pi_k(g \times a)) > t(R_{i_1})$. Следовательно, $g \times a \in A$.

Значит, $J(G, \times) \cap A = J(A, \times) = A$ по лемме 5. Поэтому кольцо $(G, \times)$ и, следовательно, группа G не являются полупростыми.

Пусть теперь тип каждой из групп $R_{i_1}, \ldots, R_{i_n}$ является максимальным в множестве $\{t(R_i) \mid i \in I\}$. Тогда $B = R_{i_1} \oplus \ldots \oplus R_{i_n}$ — идеал кольца $(G, \times)$.

В самом деле, пусть $b = b_{i_1} + \ldots + b_{i_n} \in B$, $g \in G$, $k \in I$. Тогда $\pi_k(b \times g) = \pi_k(b_{i_1} \times g + \ldots + b_{i_n} \times g)$. При этом $t(b_{i_l} \times g) \geqslant t(b_{i_l})$ при всех $l = \overline{1, n}$. В силу максимальности типов $t(R_{i_l})$ получаем, что $b_{i_l} \times g \in R_{i_l}$, откуда $b \times g \in B$.

Если идеал B не является полупростым, то и группа G не полупроста. Допустим, идеал B полупрост. Тогда он может быть вложен в качестве подкольца в кольцо $(\overline{B}, \times)$ на делимой оболочке $\overline{B}$ группы B, которое также является полупростым. Следовательно, по основной теореме Веддерберна [15] о конечномерных сепарабельных алгебрах $\overline{B}$ представимо в виде суммы полных матричных колец над телом. Значит, в кольце $(\overline{B}, \times)$ есть единица e.

Рассмотрим факторкольцо $(G/B, \times)$, его аддитивная группа $G/B \cong G_1 = \prod\limits_{i \neq i_1, \ldots, i_n} R_i$, где все группы R_i имеют неидемпотентный тип. Следовательно, по лемме 5 кольцо $(G/B, \times)$ радикально. Кольцо $(G, \times)$ может быть естественным образом вложено в кольцо $(G_1 \oplus \overline{B}, \times)$. При этом $J(G_1 \oplus \overline{B}, \times) = \{a - a \times e \mid a \in G_1\} = T \neq 0$ [2]. Пусть m — натуральное число, при котором $me \in B$. Тогда

$$mT = \{ma - a \times (me) \mid a \in G_1\} \subset G.$$

Так как mT — ненулевой квазирегулярный идеал кольца $(G_1 \oplus \overline{B}, \times)$, то mT — такой же идеал в кольце $(G, \times)$. Следовательно, группа G не является полупростой.

Теорема 1. *Пусть I не более, чем счетное множество. Редуцированная векторная группа $\prod\limits_{i \in I} R_i$ является полупростой тогда и тогда, когда*

1) среди групп R_i $(i \in I)$ нет групп идемпотентного типа с конечным числом нулей,

2) для любой группы R_k неидемпотентного типа множество $I_0(k)$ бесконечно.

Доказательство. Пусть группа G полупроста, тогда в силу леммы 4 выполняется условие 1. Допустим, условие 2 не выполнено, тогда $I_0(k)$ — конечное множество при некотором $k \in I$ таком, что $t(R_k) = t_k$ — неидемпотентный тип. Обозначим $G' = \prod\limits_{t(R_i) > t_k} R_i$.Пусть $(G, \times)$ — кольцо на G, используя лемму 2, можно показать, что G' — идеал этого кольца, причем в семействе групп $\{R_i | t(R_i) > t_k\}$ лишь конечное подсемейство групп имеет идемпотентный тип. По лемме 6 идеал G' не является полупростым. Отсюда полупростым не является и кольцо $(G, \times)$.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условиям 1) и 2). По теореме 8 в [1] существует система $\{J_k | k \in I_{nid}\}$ попарно непересекающихся счетных множеств $J_k \subset I_0(k)$. Для каждого $k \in I_{nid}$ обозначим $G_k = R_k \oplus \prod\limits_{i \in J_k} R_i$. Тогда группу G можно представить в виде $G = \prod\limits_{k \in I_{nid}} G_k \oplus \prod\limits_{i \in K} R_i$, где K — некоторое подмножество множества I_0. Согласно [3], группы R_i полупросты при всех $i \in K$. В силу леммы 1 каждая из групп $G_k\,(k \in I_{nid})$ также является полупростой. Определяя на G кольцо, являющееся прямым произведением полупростых колец, получаем, что группа G полупроста.

Заметим, что набор типов групп $R_i\,(i \in I)$ в случае не более, чем счетного множества I является инвариантом группы $G = \prod\limits_{i \in I} R_i$, поэтому описание полупростых групп в теореме 1 не зависит от разложения группы G в прямое произведение групп ранга 1.

3. Заключение

Из теоремы 1 следует, что вполне разложимая группа G конечного ранга полупроста тогда и только тогда, когда типы ее прямых слагаемых ранга 1 имеют идемпотентный тип с бесконечным числом нулей. Этот результат согласуется с общим описанием полупростых вполне разложимых групп в [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kompantseva E. I. Semisimple rings on completely decomposable abelian groups // J. of Math. Sciences. 2009. V. 154. №3. P. 324-332.

2. Kompantseva E. I. Torsion free rings // J. of Math. Sciences. 2010. V. 171. №2. P. 213-247.

3. Beamont R. A., Lawver D. A. Strongly semisimple abelian groups // Publ. J. Math. 1974. V. 53, №2. P. 327-336.

4. Beaumont R.A., Pierce R. S. Torsion free rings // Ill. J. Math. 1961. V. 5. P.61-98.

5. Gardner B. J. Radicals of abelian groups and associative rings // Acta Math. Hung. 1973. V. 24. P. 259-268.

6. Gardner B. J., Jackett D.R. Rings on certain classes of torsion free abelian groups // Comment. Math. Univ. Carol. 1976. V. 17. P.493–506.

7. Feigelstock S. On groups satisfying ring properties // Comment. Math. Univ. Saneti Pauli. 1976. V. 25. P. 81–87.

8. Feigelstosk S. The additive groups of subdirectly irreducible rings // Bull. Aust. Math. Soc. 1979. V. 20. P. 164–170.

9. Eclof P. C., Mez H. C. Additive groups of existentially closed rings // Abelian Groups and Modules: Proceeding of the Udine conference. Vienna-N.York: Springer-Verlag, 1984. P. 243–252.

10. Мишина А. П. О прямых слагаемых полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Сиб. мат. журн. 1962. №3. С. 244–249.

11. Мишина А. П. Сепарабельность полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Мат. сб. 1962. V. 57. С. 375–383.

12. Los J. On the complete direct sum of coutable abelian groups // Publ. Math. Debrecen. 1954. V. 3. P. 269–272.

13. Fuchs L. Infinite Abelian Groups, Vol. 1. New York-London: Academic Press, 1971. 335p.

14. Fuchs L. Infinite Abelian Groups, Vol. 2. New York-London: Academic Press, 1973. 416p.

15. Jacobson N. Structure of rings. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1956.

16. Sasiada E. On the isomorphism of decompositions of torson free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one // Bull. Acad. Polon. Sci. 1959. V. 7. P. 145-149.

17. Wiskless W. J. Abelian group which admit only nilpotent multiplications // Pasif. J. Math. 1972. V. 40, №1. P. 251–259.

REFERENCES

1. Kompantseva, E. I. 2009, “Semisimple rings on completely decomposable abelian groups”,*J. of Math. Sciences,* vol. 154, no. 3, pp. 324–332.

2. Kompantseva, E. I. 2010, “Torsion free rings”, *J. of Math. Sciences,* vol. 171, no. 2, pp. 213–247.

3. Beamont, R. A., Lawver, D. A. 1974, “Strongly semisimple abelian groups”, *Publ. J. Math,* vol. 53, no. 2. pp. 327–336.

4. Beaumont, R. A., Pierce, R. S. 1961, “Torsion free rings”, *Ill. J. Math.,* vol. 5, pp. 61–98.

5. Gardner, B. J. 1973, “Radicals of abelian groups and associative rings”, *Acta Math. Hung.,* vol. 24, pp. 259–268.

6. Gardner, B. J., Jackett, D. R. 1976, “Rings on certain classes of torsion free abelian groups”, *Comment. Math. Univ. Carol.,* vol. 17, pp. 493–506.

7. Feigelstock, S. 1976, “On groups satisfying ring properties”, *Comment. Math. Univ. Saneti Pauli,* vol. 25, pp. 81–87.

8. Feigelstosk, S. 1979, “The additive groups of subdirectly irreducible rings”, *Bull. Aust. Math. Sci.,* vol. 20, pp. 164–170.

9. Eclof P. C., Mez H. C. 1984, “Additive groups of existentially closed rings”, *Proc. of the Udine conf. “Abelian Groups and Modules”, Springer-Verlag, Vienna-New York,* pp. 243–252.

10. Mishina, A. P. 1962, “ On the direct summands of complete direct sims of torson free abelian group of rank 1”, *Sibirskiy matem. zhurnal,* no. 3, pp. 244–249.

11. Mishina, A. P. 1962, “The separability of complete direct sums of torson free abelian groups of rank 1”, *Matem. sb.,* vol. 57, pp. 375–383.

12. Los, J. “On the complete direct sum of coutable abelian groups”, *Publ. Math. Debrecen,* vol. 3, pp. 269–272.

13. Fuchs, L. 1971, “Infinite Abelian Groups”, *Academic Press, New York-London,* vol. 1, 335p.

14. Fuchs, L. 1973, “Infinite Abelian Groups”, *Academic Press, New York-London,* vol. 2, 416p.

15. Jacobson, N. 1956, “Structure of rings”, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

16. Sasiada, E. 1959, “On the isomorphism of decompositions of torson free abelian groups into complete direct sums of groups of rank one”, *Bull. Acad. Polon. Sci.,* vol. 7, pp. 145–149.

17. Wiskless, W. J. 1972, “Abelian group which admit only nilpotent multiplications”, *Pasif. J. Math.,* vol. 40, no. 1, pp. 251–259.

Московский педагогический государственный университет.
Финансовый университет при Правительстве РФ.
Поступило 9.11.2015.