ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 2

УДК 51(092) DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-2-315-330

БОРИС ВЕНИАМИНОВИЧ ЛЕВИН К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

А. В. Шутов, В. Г. Журавлев, А. С. Балджы, М. Б. Хрипунова, (г. Владимир)

Аннотация

Данная работа посвящена 90-летию со дня рождения основоположника владимирской школы теории чисел доктора физико-математических наук, профессора Бориса Вениаминовича Левина. В ней приводятся биографические данные и анализ его научных работ.

Ключевые слова:

Библиография: 53 названия.

BORIS VENIAMINOVICH LEVIN ON HIS 90TH ANNIVERSARY

A. V. Shutov, V. G. Zhuravlev, A. S. Balci, M. B. Khripunova (Vladimir)

Abstract

This paper is devoted to the 90th anniversary of the founder Vladimir's school of number theory, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Boris Veniaminovich Levin. It contains some biographical information and brief analysis of his scientific works.

Keywords:

Bibliography: 53 titles.

1. Введение

29 апреля 2017 года исполнилось 90 лет со дня рождения замечательного математика, основателя владимирской школы теории чисел Бориса Вениаминовича Левина.

Борис Вениаминович Левин родился 29 апреля 1927 года в г. Артемовске Сталинской области УССР. Его мать Левина Эсфирь Исааковна была швеей, отец Левин Вениамин Борисович работал бухгалтером. Родители имели 4 класса образования. В семье было 2 детей: старшая сестра Сима и Борис. Сима была старше на 3 года. Когда она пошла в школу в первый класс, и Борис тоже с ней пошел, потому что он готовился с сестрой к школе и был готов. Но его не взяли в первый класс, и, по его словам, это было огромное детское разочарование. В школу он поступил в 1935 году.

В 1941 году в связи с эвакуацией семья Б. В. Левина переехала в Узбекистан, в г. Ургут Самаркандской области. Все его одноклассники в Артемовске погибли во время оккупации. Это было голодное время, Борис ходил в школу за 10 км от дома, переболел малярией, нередко падал в голодные обмороки, что в дальнейшем конечно же сказалось на его здоровье.

В 1944 году, после окончания средней школы, вступил в ряды Советской армии и до августа 45 прослужил в 4-й отдельной авиаэскадрилье в качестве курсанта. В это время война закончилась, и Левин Б. В. выбрал мирную профессию.

Он поступил на 1 курс физико-математического факультета вечернего пединститута в г. Самарканде, далее сдал экстерном все экзамены за три курса физико-математического факультета и перешел в Узбекский Государственный Университет, который закончил по специальности "Математика" в 1950 году с отличием. При этом, будучи студентом, а также год после окончания университета, Б. В. Левин работал школьным учителем в Самарканде.

2. Б. В. Левин — ученик Н. П. Романова

Во время Великой Отечественной войны в Узбекистане оказались многие выдающиеся математики, в частности из Томска переехал в Самарканд известный специалист по теории чисел Николай Павлович Романов, он руководил кафедрой в Узбекском университете города Самарканда с 1944 по 1951 г.

Николай Павлович стал не просто научным руководителем Бориса Вениаминовича, а его Учителем, которого он безмерно уважал и любил. В 1951 году Б. В. Левин вслед за своим учителем переезжает в Ташкент, поступает в аспирантуру Среднеазиаткого (Ташкентского) государственного университета, которую заканчивает в 1954 году с представлением диссертации. Сама диссертация на тему "О некоторых применениях модулярных функций к вопросам квадратической арифметики" была защищена в 1956 году в МГУ.

Борис Вениаминович активно занимался педагогической деятельностью. После окончания аспирантуры он по распределению направился на работу в Каракалпакский педагогический институт, где в течение 1954–1955 учебного года работал в должности старшего преподавателя. В 1955 году был переведен Министерством просвещения УзССР в Ташкентский пединститут, где работал ассистентом до сентября 1956 года.

После защиты диссертации Б. В. Левин перешел на работу на механико-математических факультет Среднеазиатского (Ташкентского) государственного университета, где работал в должности сначала ассистента, а с 1958 года – доцента кафедры алгебры и теории чисел. С 1960 года также руководил вычислительным центром университета. Также с 1958 по 1960 год Б. В. Левин преподавал в Ташкенском Высшем командном общевойсковом училище.

В разное время ему приходилось читать курсы: аналитическая геометрия, высшая алгебра, линейная алгебра, математический анализ, теория чисел, теория функций комплексного переменного, аналитическая теория чисел, теория эллиптических и модулярных функций, современная алгебра и элементы теории Галуа, элементарные методы теории чисел, метод "решета" в теории чисел, математическая логика, аддитивная теория чисел.

Математикой удавалось заниматься только ночами. При этом Борис Вениаминович не работал над докторской диссертацией, ему просто интересно было заниматься теоретико-числовыми проблемами. Однако Александр Осипович Гельфонд, познакомившись с результатами Левина, высоко оценил их и посоветовал оформить в виде докторской. Диссертация "Метод решета и его применения" была написана и защищена в 1963 году в Московском государственном университете.

3. Б. В. Левин и владимирская школа теории чисел

В 1958 году Борис Вениаминович женился на выпускнице Ташкенской консерватории Колесниковой Ирине Владимировне. В 1965 году у них родилась дочь Марина.

В 1966 году Б. В. Левин получил ученое звание профессора, под его руководством была открыта аспирантура по теории чисел. Одним из его самых любимых учеников ташкентского периода был А. С. Файнлейб. В том же году в Ташкенте произошло землетрясение, многие здания были разрушены. Кроме того, у Бориса Вениаминовича стало ухудшаться здоровье и врачи посоветовали ему сменить климат на более умеренный. Поэтому встал вопрос о перемене места жительства.

Бориса Вениаминовича приглашали работать в Москву, в "почтовый ящик", но ему было не интересно выполнять задания, присланные по почте, ни с кем не общаться, он считал, что ученый обязательно должен общаться с коллегами и учениками. Поэтому он принял другое предложение — переехать во Владимир, во Владимирский педагогический институт, ректор которого Б. Ф. Киктев предложил квартиру, работу ему и жене и детский сад для дочери. Приглашение было сделано по совету работавшего в это время во Владимире Г. А. Фреймана. В феврале 1968 года во Владимирском Педагогическом институте была создана кафедра алгебры и теории чисел, первым заведующим которой и стал Борис Вениаминович. При этом Борис Вениаминович пригласил из Ташкента ряд своих коллег и учеников (И. М. Дектярева, Н. М. Тимофеева, С. Т. Туляганова), которые и составили основу вновь созданной кафедры. Одновременно с Б. В. Левиным во Владимир собирался приехать выдающийся математик М. Б. Барбан, жизнь которого трагически прервалась.

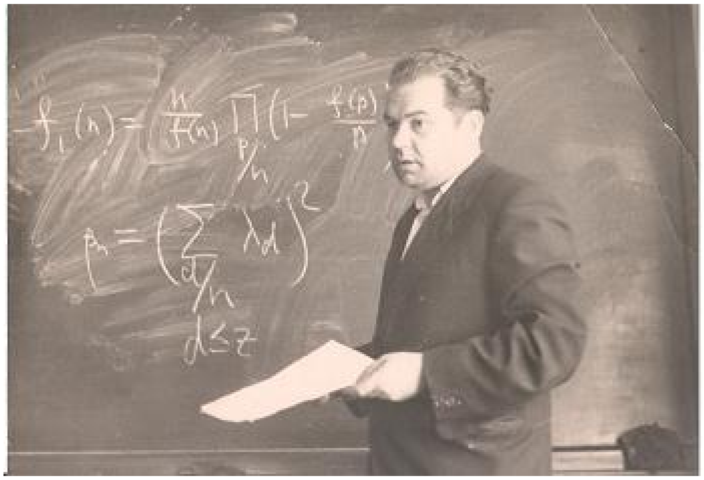
Практически сразу была открыта аспирантура по теории чисел. Первые аспиранты приехали вместе с Б. В. Левиным из Ташкента, потом появились и владимирские ученики. 22 аспиранта Б. В. Левина стали кандидатами физико-математических наук. География аспирантов Б. В. Левина очень обширна и охватывает Узбекистан, районы Сибири, Средней Азии, Кавказа, Прибалтики и Центральной полосы России, а также Вьетнам.

4 ученика Бориса Вениаминовича (С. Т. Туляганов, М. И. Туляганова, Н. М. Тимофеев, В. Г. Журавлев) впоследствии защитили докторские диссертации. При этом М. И. Туляганова стала первой женщиной доктором физико-математических наук Узбекистана.

Позднее В. Г. Журавлев сменил Б. В. Левина на посту заведующего кафедрой алгебры и теории чисел ВГПИ (позднее ВГПУ, ВГГУ и даже ВлГУ), а Н. М. Тимофеев много лет заведовал кафедрой математического анализа.

Также Б. В. Левин открыл научный семинар по теории чисел на котором выступали многие замечательные математики и много лет был бессменным руководителем этого семинара. Кроме того, он организовал всесоюзную конференцию по теории чисел в Суздале, которую много лет вспоминали его коллеги.

Работа Б. В. Левина проходила в постоянном контакте с ленинградской, московской, литовской, венгерской, польской школами теории чисел.



Многие советские математики неоднократно бывали в гостях у Бориса Вениаминовича. С еще большим числом математиков он состоял в переписке. При этом для чтения математических работ и общения с другими математиками Б. В. Левин самостоятельно выучил английский язык. Б. В. Левина неоднократно приглашали в составе наших делегаций на конференции за рубеж, и в соцлагерь, Венгрию и Польшу, и в капиталистические страны, хотя, к сожалению, поехать на эти конференции ему разрешали далеко не всегда.

За успехи в научной и учебной работе Борис Вениаминович был награжден юбилейной медалью "За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина", значком "Отличник народного просвещения", медалью имени П. И. Лебедева–Полянского и многочисленными почетными грамотами.

Двадцать четыре года работы на физико-математическом факультете Владимирского педагогического института принесли огромные результаты: создание научной школы, известной далеко за пределами СССР, работа во Владимирском институте повышения квалификации, сотрудничество в рамках работы по хоздоговорным темам с предприятиями и организациями Владимирской области и т.д. За успехи в научной и учебно-воспитательной работе неоднократно награждался медалями, грамотами, почетными значками.

Борис Вениаминович Левин умер от тяжелой и продолжительной болезни 29 марта 1991 года, не дожив месяц до своего 64-летия. Как во Владимире, так и во многих городах России и за рубежом трудятся ученики Б. В. Левина и ученики его учеников. Сочетание высоких научных достижений с душевной щедростью — основная характеристика педагогической деятельности профессора Бориса Вениаминовича Левина. Он был искренним человеком, прекрасным семьянином, любящим отцом и прекрасным другом. Многие годы спустя, ученики, коллеги, студенты физико-математического факультета, знавшие Б. В. Левина лично, с теплотой вспоминают о том времени.

Б. В. Левин стал основателем математической династии: уже третье поколение его потомков заняты в различных областях математики и математического образования.

4. Математические исследования Б. В. Левина

Остановимся подробнее на математических исследованиях Бориса Вениаминовича Левина.

Ранние работы Левина были посвящены модулярным формам и их приложениям к арифметике квадратичных форм [1]–[4], а также исследованию мультипликативных функций методами элементарной теории чисел [7], [11].

Большой цикл исследований Б. В. Левина связан с решением аналогов ряда классических теоретико-числовых задач в почти простых числах. В теории чисел имеется огромное количество задач, крайне простых по постановке и практически недоступных для решения. Примерами таких задач могут быть задача о бесконечности множества простых чисел p для которых число $p+2$ также простое (задача о простых-близнецах), задача о простых числах вида x^2+1, задача о простых числах p для которых число $2N-p$ также простое (бинарная проблема Гольдбаха) и т.д.

Пусть A – некоторое множество натуральных чисел, P – множество всех простых чисел. Обычно достаточно легко получать верхние оценки вида

$$\sharp\{N \leq x : n \in A \cap P\} \leq N_A(x) + o(N_A(x))$$

с достаточно просто выглядещей функцией $N_A(x)$. Более того, обычно при этом имеются эмпирические аргументы, позволяющие предположить, что найденная функция $N_A(x)$ представляет собой главный член асимптотики для $\sharp\{N \leq x : n \in A \cap P\}$. Главной задачей является получение соответствующих нижних оценок. В настоящее время эта задача остается нерешенной для большинства осмысленных множеств A.

Поэтому часто рассматривают множества P_k, состоящие из чисел, состоящих не более, чем из k простых сомножителей. Такие числа часто называют k-почти простыми числами. При этом можно рассмотреть задачу об асимптотической формуле для $\sharp\{N \leq x : n \in A \cap P_k\}$. Практика показывает, что иногда удается получить нижнюю оценку вида

$$\sharp\{N \leq x : n \in A \cap P_k\} \geq \delta N_A(x) + o(N_A(x)). \tag{1}$$

При этом представляет интерес получения оценок типа (1) для как можно меньших значений k.

Исследования Б. В. Левина в данной области начались в работах [5], [6], в которых ему удалось получить соответствующий результат для $A = \{n^2+1 : n \in \mathbb{N}\}$ и $k = 3$. Логика доказательства привела Б. В. Левина к более общим постановкам задач, в которых в качестве множества A берется множество значений произвольного многочлена. Данной тематике были посвящены работы [8], [10], [12]–[14], [19], [22] Кроме того, удалось получить нижние оценки для мощностей различных множеств вида $\{n \leq x : F_1(n) \in P_{k_1}, F_2(n) \in P_{k_2}\}$, $\{n \leq x : F_1(n) \in P_{k_1}, F_2(n) \in P_{k_2}, F_1(n)F_2(n) \in P_{k_3}\}$, $\{n \leq x : n \in P, F_1(n) \in P_{k_1}\}$ и даже $\{n \leq x : n \in P, F_1(n^2) \in P_{k_1}\}$. Здесь $F_i(n)$ – неприводимые многочлены. В качестве приложения данных результатов были получены резултаты о представимости любого четного числа в виде суммы чисел из P и P_4, а также в виде суммы чисел из P_2 и P_3. Также была доказана бесконечность множества простых чисел p для которых $p+2 \in P_4$. На тот момент приведенные результыты были наиболее сильными имевшимися результатами в направлении бинарной проблемы Гольдбаха и проблемы близнецов. Кроме того в [14] описанные результаты были обобщены на случай, когда A является множеством значений многочлена от n переменных.

Вершиной исследований Б. В. Левина в данной области оказалась работа [16], в которой аналог формулы типа (1) был доказан для достаточно общих множеств $A = \{a_n\}$, удовлетворяющих лишь условиям, обеспечивающим равномерность распределения элементов множеств A по прогрессиям в среднем. При этом оказалось, что оптимальное значение k зависит не от глубоких арифметических характеристик множества A, а от достаточно общих свойств этого множества, таких как скорость роста его элементов и степень равномерности их распределения по прогрессиям.

При этом следует отметить, что доказательства этих результатов были основаны не только на использовании классических методов, таких как решето Сельберга, теоремы типа Виноградова-Бомбьери и оценки L-функций, но и использования принципиально новой идеи, основанной на сведении теоретико-числовых задач к изучению свойств решений дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом вида

$$ty'(t) - ky(t) + ky(t-1) = 0,$$

$k \in \mathbb{N}$, $y(t) = t^k$ при $t \in (0;1)$. При этом удалось получить результаты об асимптотическои поведении решений данного уравнения, интересные и с точки зрения теории дифференциальных уравнений [12].

5. Задача о наименьшем почти простом числе в последовательности

Еще одним достижением Б. В. Левина было применение методов решета к задаче о наименьшем почти простом числе в последовательности. Данная тематика была начата Ю. В. Линником, получившим оценку для наименьшего простого числа в арифметической прогрессии. Данный результат до сих пор не удается доказать методом решета. Б. В. Левин обнаружил, однако, что аналог результата Линника легко может быть получен, если заменить множество простых чисел на множество P_2 [9]. Более того, при этом оказалось, что результаты легко обобщаются на более общие семейства. Большое число результатов данного типа было получено в работах [17], [21]. Например, было доказано, что наименьшее число из P_3, принадлежащее множеству $\{k^2x^2+1\}$ не превосходит $k^{10.9578}$, а наименьшее число из P_7, принадлежащее множеству $\{k^2p^2+1 : p \in P\}$ не превосходит $k^{7.6}$.

Большая часть исследований Б. В. Левина в данной области использовала метод решета Сельберга. Однако в то время активно развивались и другие варианты данного метода, например решето Бруна и решето Бухштаба. Возник естественный вопрос о сравнении различных методов решета (в общем виде нерешенный и поныне). Интересовался этим вопросом и Б. В. Левин. В работе [18] им было рассмотрено применение решет Сельберга и Бруна к модельной задаче об оценке числа членов последовательности $\{a_n\}$, не имеющих малых простых делителей, в предположении, что члены данной последовательности в среднем достаточно равномерно распределены по прогрессиям. Оказалось, что решето Сельберга и Бруна имеют различные области применимости. При этом были найдены условия при которых применение каждого из решет дает лучший результат. Сам Б. В. Левин не стал продолжать данную тему, однако его идеи и результаты продолжают использоваться при изучении различных методов решета и в настоящее время.

6. Общие результаты о мультипликативных и аддитивных функциях

В процессе исследований по методы решета, Б. В. Левину часто приходилось искать асимптотики сумм вида

$$m_f(x) = \sum_{n \le x} f(n) \tag{2}$$

для различных мультипликативных функций f, а также аналогичных сумм, в которых накладываются дополнительные ограничения на простые делители слагаемых n. В это время возникла общая задача получения асимптотики сумм (2), исходя из информации о поведении мультипликативной функции f на степенях простых чисел. В частности, многочисленные результаты в данном направлении были получены Вирзингом. Дополнительной мотивацией этих исследований была активно развивавшаяся в то время И. П. Кубилюсом вероятностная теория чисел, позволившая получать интересные общие асимптотические результаты для достаточно широкого класса аддитивных функций. Изучение общих свойств мультипликативных и аддитивных функций стало темой нового большого цикла работ Бориса Вениаминовича Левина, выполнявшихся совместно с его учениками.

Особую роль в данных исследованиях сыграла работа [28], во многом определившая направления дальнейших исследований Б. В. Левина на много лет вперед: асимптотики сумм мультипликативных функций, как в общем случае, так и с дополнительными ограничениями на слагаемые, локальные и интегральные предельные теоремы для аддитивных функций, распределение значений аддитивных функций и т.п.

Отправной точкой исследований Б. В. Левина стал результат Вирзинга о том, что если $f(n)$ – мультипликативная функция, удовлетворяющая условиям

$$f(p^\nu) \le \frac{\gamma_1 \gamma_2^\nu}{p^\nu}, \gamma_2 < 2, \tag{3}$$

$$\sum_{p \le x} f(p) \ln p \sim \tau \ln x, \tag{4}$$

то имеет место асимптотическая формула

$$m_f(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\tau+1)} \prod_p \sum_{r \ge 0} f(p^r) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^\tau \ln^\tau x.$$

Идея Б. В. Левина состояла в том, чтобы улучшить результат Вирзинга, наложив более сильные условия на значения мультипликативной функции для простых чисел. В результате, вместо условия (4) было предложено более сильное условие

$$\sum_{p \le x} f(p) \ln p \sim \tau \ln x + B + h(x),$$

где

$$h(x) = O(\ln^{-N} x) \tag{5}$$

для всех N. При этом условие (3) было заменено условием

$$\sum_{n \le x} |f(n)| = O(\ln^A x).$$

В результате удалось существенно усилить результат Вирзинга, получив асимптотическое разложение функции $m_f(x)$ по степеням $\ln x$. Если же условие (5) выполнено для конечного числа

N, то получается выделение конечного числа членов асимптотического разложения. Отметим, что при доказательстве результатов данного типа, Б. В. Левиным был предложен новый метод, основанный на построении для исследуемой функции $m_f(x)$ интегральных уравнений вида

$$m_f(x)\ln x-(\tau+1)\int_1^x\frac{m_f(u)}{u}du=Bm_f(x)+\sum_{n\le x}f(n)h(\frac{x}{n})$$

и изучении асимптотик их решений.

Другой результат Вирзинга касался поиска условий на мультипликативную функцию $f(n)$ при которых имеет место асимптотическая формула вида

$$m_f(x)\sim\frac{e^{-c\tau}}{\Gamma(\tau)}\frac{x}{\ln x}\prod_{p\le x}\left(1+\sum_{r\ge 0}\frac{f(p^r)}{p^r}\right).$$

Б. В. Левину удалось ослабить условия Вирзинга, а также получить нетривиальный остаточный член в данной асимптотике [27], [34], [48]. В серии работ [20], [23], [29], [32], [33], [35], [51], [52] рассматривались условия для других возможных асимптотик $m_f(x)$, а также более общие суммы, такие как $\sum\limits_{n\le x}f(kn+l)$, $\sum\limits_{p\le n}f(n-p)$ или $\sum\limits_{n\le x}f_1(n_1)\ldots f_k(n_k)$. В последней сумме $n=n_1\ldots n_k$ и все простые делители n_i принадлежат интервалу $(x^{\beta_{i-1}};x^{\beta_i})$. Также стоит отметить работы [46], [49], [50], в которых были найдены достаточные условия на мультипликативную функцию $f(n)$, при которых для нее имеют место оценки типа Виноградова-Бомбьери, например оценка

$$\sum_{k\le Q(x)}\max_{(l,k)=1}\max_{y\le x}\left|\sum_{n\le y,n\equiv l\pmod k}f(n)-\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{n\le y,(n,k)=1}f(n)\right|\ll x\log^{-B}x.$$

Применимость асимптотических результатов о суммах мультипликативных функций к теории аддитивных функций основана на простом соображении: если $g(n)$ – аддитивная функция, то функция $e^{i\xi g(n)}$ – мультипликативна. Данное соображение, в сочетании с асимптотиками сумм мультипликативных функций, позволяет получать асимптотики для характеристичекой функции для $g(n)$ (возможно нормированной и центрированной. Далее, используя методы теории вероятностей, можно получать локальные и интегральные предельные теоремы для $g(n)$.

В локальной задаче речь идет о асимптотике величин вида

$$\sharp\{m\le n:g(m)=k\}.$$

Подобные задачи изучались Сельбергом, Реньи, Кацом и Кулилюсом. В работах Б. В. Левина [28], [41] был найден ряд новых локальных законов и классов аддитивных функций, для которых эти законы имеют место. Более того, удалось получить многомерные локальные законы, описывающие асимптотики величин типа

$$\sharp\{m\le n:g_1(m)=k_1,\ldots,g_r(m)=k_r\}$$

для целых наборов аддитивных функций.

В задаче об интегральных законах распределения речь идет о функции $F(x)$, для которой в каждой точке непрерывности выполняется соотношение

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sharp\left\{n\le N:\frac{g(n)-A_N}{B_N}\right\}=F(x)\qquad(6)$$

для некоторых последовательностей $\{A_N\}$ и $\{B_N\}$. Данная тематика берет начало в работах Эрдеша и Винтера и активно развивалась Кудилюсом. Б. В. Левина изначально интересовали случаи, связанные с конкретными распределениями $F(x)$. В работе [28] были выделены классы функций, при которых предельное распределение является нормальным, а также оценена скорость сходимости к нормальному распределению. В дальнейших работах [15], [24], [25], [30] интерес Б. В. Левина сместился к поиску условий, при которых существует какой-либо предельный закон распределения. Последовательное улучшение результатов привело к тому, что в [36] была полностью решена задача о предельном распределении с дополнительным условием $B_N = 1$ для всех N (этот результат одновременно с Б. В. Левиным другим методом доказали также Эллиот, Ревек и Деланж). Позднее удалось получить и дальнейшие обобщения этого результата, где условие равенства B_N единице заменялось ограничениями на скорость роста последовательности $\{B_N\}$ [39], [42]–[45], [47]. В качестве приложения была решена известная проблема Эрдеша о распределении значений аддитивной функции, заданной условием $g(p^\alpha) = (\log p^\alpha)^\rho$, а также построен первый пример предельного распределения, не являющегося безгранично делимым. Кроме того, удалось получить ряд аналогов рассмотреных результатов для предельного распределения не аддитивных, а мультипликативных функций (например, условия сходимости к одноточечному распределению) [37], [40].

Оценки сумм вида $\sum_{n\le x} e^{i\xi g(n)}$ для аддитивных функций $g(n)$ естественным образом приводят к результатом о равномерности распределения значений аддитивных функций по модулю 1. В частности, Деланж доказал, что для иррационального θ последовательность $\theta\nu(n)$ равномерно распределена по модулю 1. Здесь $\nu(n)$ – число различных простых делителей n. Получая результаты об асимптотическом поведении сумм мультипликативных функций, Б. В. Левин часто стремился получать в качестве приложений теоремы о равномерном распределении [28], [30]. Например, было доказано, что значения вещественно аддитивной функции $g(n)$, удовлетворяющей условию $g(p) \to 0$ при $p \to \infty$ равномерно распределены по модулю один тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_p \frac{g^2(p)}{p}$ расходится. Отсюда можно вывести равномерную распределенность по модулю 1 для функций $g(n) = \sum\limits_{p|n} \frac{1}{\{\alpha p\}}$ (α – иррационально), $g(n) = \sum\limits_{p|n} \operatorname{ctg} p$ и т.п.

7. Заключение

Последняя работа Б. В. Левина [53] была связана с изучением одного варианта аддитивной проблемы делителей. Классическая аддитивная проблема делителей предполагает изучение множеств вида
$$\{(n_1,n_2,n_3,n_4) : n_1n_2 \le x, n_1n_2 - n_3n_4 = 1\}$$
и фактически сводится к получению асимптотической формулы для суммы
$$\sum_{n\le x} \tau(n)\tau(n-1),$$
где $\tau(n)$ – число делителей n. Вариант Б. В. Левина отличался дополнительным условием простоты числа n_4 и требовал изучения суммы
$$N(x) = \sum_{n\le x} \tau(n)\omega(n-1),$$
где $\omega(n)$ – число простых делителей n. Было доказано, что
$$N(x) = x\ln x\ln\ln x + E_1 x\ln x + E_2 x\ln\ln x + E_3 + O(x\frac{\ln^6\ln x}{\ln x})$$

с явно вычисленными константами E_i. В работе обсуждалась программа дальнейшего обобщения данного результата. Борис Вениаминович Левин не успел реализовать ее, но данные исследования были продолжены его учеником и соавтором Николаем Михайловичем Тимофеевым.

Также ряд работ Б. В. Левина связан с описанием деятельности других математиков – специалистов в области теории чисел [26], [31], [38].

В заключение приведем список публикаций Бориса Вениаминовича Левина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. В. О представлении чисел квадратичной формой $x^2 + y^2 + pt^2 + pz^2$ // Труды института математики Узбекской ССР.

2. Левин Б. В. Об одном нелинейном дифференциальном операторе, связанном с автоморфными функциями // Труды института математики Узбекской ССР.

3. Левин Б. В. Новые сравнения для функции Рамунуджана $\tau(n)$ // Труды института математики Узбекской ССР.

4. Левин Б. В. Точные формулы для числа представлений некоторых чисел квадратичными формами $x^2+y^2+5(t^2+z^2)$ и $x^2+y^2+7(t^2+z^2)$ // Труды института математики Узбекской ССР.

5. Левин Б. В. Оценки снизу числа почти простых чисел в некоторых последовательностях общего вида // Вестник ЛГУ. Сер. мат. 1960. Вып. 2, № 7. С. 48-65.

6. Левин Б. В. Ослабленная проблема Ландау и ее обобщение // УМН. 1961. Т. 16, вып. 2 (98). С. 123-125.

7. Левин Б. В. Остаточный член в формуле Булыгина // ДАН Узбекской ССР. 1961. № 7. С. 10-13.

8. Левин Б. В. О методе "решета"// Труды ТашГУ. 1961. Т. 9, вып. 18. С. 31-36.

9. Левин Б. В. О распределении простых в арифметической прогрессии // Известия АН Узбекской ССР. Сер. физ. -матем. наук. 1961. № 5. С. 15-28.

10. Левин Б. В. Распределение почти простых чисел в целозначных полиномиальных последовательностях // ДАН Узбекской СССР. 1962. № 11. С. 7-9.

11. Левин Б. В., Романов Н. П. Классификация мультипликативных функций и мультипликативных последовательностей линейнных операторов // Труды ТашГУ. 1962. Т. 208. С. 128-136.

12. Левин Б. В. Об одном классе задач теории чисел, сводящихся к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом // Труды ТашГУ. 1963. Вып. 228. С. 56-68.

13. Левин Б. В. Оценка специальных сумм и произведений, связанных с методом решета // Труды ТашГУ. 1963. Вып. 228. С. 69-79.

14. Левин Б. В. Распределение "почти простых"чисел в полиномиальных последовательностях // Математический сборник. 1963. Т. 61 (103), вып. 4. С. 389–407.

15. Барбан М. Б., Виноградов А. И., Левин Б. В. Предельные законы для функций класса H И. П. Кубилюса, заданных на множестве "сдвинутых"простых чисел // Литовский математический сборник. 1965. № 2. С. 5-8.

16. Левин Б. В. Одномерное решето // Acta Aritmetica. 1965. Т. 10, вып. 4. С. 387-397.

17. Левин Б. В. О наименьшем почти простом числе арифметической прогрессии и последовательности k^2x^2+1 // УМН. 1965. Т. 20, вып. 4 (124). С. 158-162.

18. Левин Б. В. Сравнение решет А. Сельберга и В. Бруна // УМН. 1965. Т. 20, вып. 5 (125). С. 214–220.

19. Левин Б. В., Туляганова М. И. Решето Сельберга в алгебраических числовых полях // ДАН Узбекской ССР. 1965, № 9. С. 5-7.

20. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Асимптотическое поведение сумм мультипликативных функций // ДАН Узбекской ССР. 1965. № 11. С. 5-8.

21. Левин Б. В., Максудов И. Г. Распределение почти простых чисел в полиномах от n переменных // Известия АН Узбекской ССР. Сер. физ. -матем. наук. 1966. Т. 10, № 3. С. 15-23.

22. Левин Б. В., Туляганова М. И. Решето Сельберга в алгебраических числовых полях // Литовский математический сборник. 1966. № 6. С. 59-73.

23. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Обобщенная задача о числах с малыми и большими простыми делителями и ее приложения // ДАН Узбекской ССР. 1966. № 5. С. 4-8.

24. Левин Б. В., Файнлейб А. С. О распределении значений аддитивных арифметических функций // ДАН СССР. 1966. Т. 171, № 2. С. 281-284.

25. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Распределение значений аддитивных теоретико-числовых функций // ДАН СССР. 1966. № 171. С. 281-284.

26. Барбан М. Б., Левин Б. В. Исследования по теории чисел в Узбекистане // Известия АН Узбекской ССР. Сер. физ. -матем. наук. 1967. Т. 11, № 5. С. 10-16.

27. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Об одном методе суммирования мультипликативных функций // Известия АН СССР. Серия математическая. 1967. Т. 31, вып. 3. С. 697-710.

28. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел // УМН. 1967. Т. 22, вып. 3 (135). С. 119-197.

29. Барбан М. Б., Левин Б. В. Мультипликативные функции на "сдвинутых" простых числах // ДАН СССР. 1968. Т. 181, № 4. С. 778-780.

30. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Интегральные предельные теоремы для некоторых классов аддитивных арифметических функций (к шестидесятилетию А. О. Гельфонда) // Труды Московского Математического Общества. Москва. Издательство Московского университета. 1968. № 18. С. 19-54.

31. Виноградов А. И., Левин Б. В., Малышев А. В., Романов Н. П., Чудаков Н. Г. Марк Борисович Барбан (некролог) // УМН. 1969. Т. 24, вып. 2 (146). С. 213-216.

32. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Средние значения мультипликативных функций // ДАН СССР. 1969. Т. 188. С. 517-519.

33. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. О суммах мультипликативных функций // ДАН СССР. 1970. Т. 193. С. 992-995.

34. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 1064-1109.

35. Левин Б. В. Исправление ошибки в доказательстве одной теоремы // УМН. 1971. Т. 26, вып. 5 (161). С. 277-278.

36. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Аналитический метод в вероятностной теории чисел // Ученые записки ВГПИ. Серия математики. 1971. Т. 38, вып. 2. С. 55-150.

37. Левин Б. В., Тимофеев Н. М., Туляганов С. Т. Распределение значений мультипликативных функций // Ученые записки ВГПИ. 1971. Т. 38. С. 282-288.

38. Левин Б. В., Фельдман Н. И., Шидловский А. Б. Alexander O. Gelfond // Acta Aritmetica. 1971. Т. 17. С. 315-336.

39. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Распределение значений аддитивных функций // УМН. 1973. Т. 28, вып. 1 (169). С. 243–244.

40. Левин Б. В., Тимофеев Н. М., Туляганов С. Т. Распределение значений мультипликативных функций // Литовский математический сборник. 1973. Т. 13, № 1. С. 87-100.

41. Левин Б. В., Юдин Б. В. Локальные предельные теоремы для аддитивных арифметических функций // Acta Aritmetica. 1973. Т. 22, № 2. С. 233-247.

42. Levin B. V., Timofeev N. M. On the distribution of values of additive functions // Acta Aritmetica. 1975. Т. 26, № 4. С. 333-364.

43. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Аналог закона больших чисел для аддитивных функций на редких множествах // Математические заметки. 1975. Т. 18, вып. 5. С. 687-698.

44. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Некоторые интегральные предельные теоремы для аддитивных функций // Литовский математический сборник. 1976. Т. 16, № 4. С. 133-147.

45. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Теорема сравнения для мультипликативных функций // Acta Aritmetica. 1982. Т. 42, № 1. С. 21-47.

46. Левин Б. В. Распределение арифметических функций по прогрессиям // В кн.: Тезисы Всесоюзной конференции "Теория трансцендентных чисел и диофантовы приближения Москва, 1983. С. 72-73.

47. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Исправление к работе "Теорема сравнения для мультипликативных функций Acta Aritmetica. 1982. Т. 42, № 1. С. 21-47 // Acta Aritmetica. 1983. Т. 42, № 3. С. 325.

48. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Суммы мультипликативных функций // Stud. Sci. Math. Hung. 1983. Т. 18. С. 21-41.

49. Левин Б. В. The "average"distribution of $\mu(n)$ and $\Lambda_f(n)$ in progressions // Topics in classical number theory, Colloq. Budapest 1981, Vol. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. 1984. Т. 34. С. 995-1022.

50. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Распределение арифметических функций в среднем по прогрессиям (теоремы типа Виноградова–Бомбьери) // Математический сборник. 1984. Т. 125 (167), вып. 4 (12). С. 558-572.

51. Левин Б. В., Чариев У. Суммы мультипликативных функций по числам с простыми делителями из заданных интервалов // ДАН Таджикской ССР. 1986. Т. 29. С. 383-387.

52. Левин Б. В., Чариев У. Поведение решений некоторых интегрально-дифференциальных уравнений // ДАН Таджикской ССР. 1987. Т. 30, № 5. С. 267-272.

53. Левин Б. В., Тимофеев Н. М. Об одной аддитивной задаче // Математические заметки. 1989. Т. 46, вып. 4. С. 25-33.

REFERENCES

1. Levin B. V. "O predstavlenii chisel kvadratichnoy formoy $x^2 + y^2 + pt^2 + pz^2$", *Trudy instituta matematiki Uzbekskoj SSR.* (Russian)

2. Levin B. V. "Ob odnom nelineynom differencial'nom operatore, svyazannom s avtomorfmimi functiyami", *Trudy instituta matematiki Uzbekskoj SSR.* (Russian)

3. Levin B. V. "Novye sravneniya dlya functii Ramanudjana $\tau(n)$", *Trudy instituta matematiki Uzbekskoj SSR.* (Russian)

4. Levin B. V. "Tochnye formuly dlya chisla predstavleniy nekotoryh chisel kvadratichnymi formami $x^2+y^2+5(t^2+z^2)$ i $x^2+y^2+7(t^2+z^2)$ ", *Trudy instituta matematiki Uzbekskoj SSR.* (Russian)

5. Levin B. V. 1960. "Ocenki snizu chisla pochti prostyh chisel v nekotoryh posledovatel'nostjah obshhego vida", *Vestnik LGU. Ser. mat.* , Vol. 2, no. 7, pp. 48-65. (Russian)

6. Levin B. V. 1961. "Oslablennaja problema Landau i ee obobshhenie", *UMN*, Vol. 16, no. 2 (98), pp. 123-125. (Russian)

7. Levin B. V. 1961. "Ostatochnyj chlen v formule Bulygina", *DAN Uzbekskoj SSR*, no. 7, pp. 10-13. (Russian)

8. Levin B. V. 1961. "O metode "resheta"", *Trudy TashGU*, Vol. 9, no. 18, pp. 31-36. (Russian)

9. Levin B. V. 1961. "O raspredelenii prostyh v arifmeticheskoj progressii", *Izvestija AN Uzbekskoj SSR. Ser. fiz. -mat.* , no. 5, pp. 15-28. (Russian)

10. Levin B. V. 1962. "Raspredelenie pochti prostyh chisel v celoznachnyh polinomial'nyh posledovatel'nostjah", *DAN Uzbekskoj SSSR*, no. 11, pp. 7-9. (Russian)

11. Levin B. V., Romanov N. P. 1962. "Klassifikacija mul'tiplikativnyh funkcij i mul'tiplikativnyh posledovatel'nostej linejnnyh operatorov", *Trudy TashGU*, Vol. 208, pp. 128-136. (Russian)

12. Levin B. V. 1963. "Ob odnom klasse zadach teorii chisel, svodjashhihsja k differencial'nym uravnenijam s zapazdyvajushhim argumentom", *Trudy TashGU*, Vol. 228, pp. 56-68. (Russian)

13. Levin B. V. 1963. "Ocenka special'nyh summ i proizvedenij, svjazannyh s metodom resheta", *Trudy TashGU*, Vol. 228, pp. 69-79. (Russian)

14. Levin B. V. 1963. "Raspredelenie "pochti prostyh"chisel v polinomial'nyh posledovatel'nostjah", *Matematicheskij sbornik*, 1963. T. 61 (103), vyp. 4. S. 389–407. (Russian)

15. Barban M. B., Vinogradov A. I., Levin B. V. 1965. "Predel'nye zakony dlja funkcij klassa N I. P. Kubiljusa, zadannyh na mnozhestve "sdvinutyh"prostyh chisel", *Litovskij matematicheskij sbornik*, no. 2, pp. 5-8. (Russian)

16. Levin B. V. 1965. "Odnomernoe resheto", *Acta Aritmetica*, Vol. 10, no. 4, pp. 387-397.

17. Levin B. V. 1965. "O naimen'shem pochti prostom chisle arifmeticheskoj progressii i posledovatel'nosti $k^2x^2 + 1$", *UMN*, Vol. 20, no. 4 (124), pp. 158-162. (Russian)

18. Levin B. V. 1965. "Sravnenie reshet A. Sel'berga i V. Bruna", *UMN*, Vol. 20, no. 5 (125), pp. 214–220. (Russian)

19. Levin B. V., Tuljaganova M. I. 1965. "Resheto Sel'berga v algebraicheskih chislovyh poljah", *DAN Uzbekskoj SSR*, no. 9, pp. 5-7. (Russian)

20. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1965. "Asimptoticheskoe povedenie summ mul'tiplikativnyh funkcij", *DAN Uzbekskoj SSR*, no. 11, pp. 5-8. (Russian)

21. Levin B. V., Maksudov I. G. 1966. "Raspredelenie pochti prostyh chisel v polinomah ot n peremennyh", *Izvestija AN Uzbekskoj SSR*, Vol. 10, no. 3, pp. 15-23. (Russian)

22. Levin B. V., Tuljaganova M. I. 1966. "Resheto Sel'berga v algebraicheskih chislovyh poljah", *Litovskij matematicheskij sbornik*, no. 6, pp. 59-73. (Russian)

23. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1966. "Obobshhennaja zadacha o chislah s malymi i bol'shimi prostymi deliteljami i ee prilozhenija", *DAN Uzbekskoj SSR*, no. 5, pp. 4-8. (Russian)

24. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1966. "O raspredelenii znachenij additivnyh arifmeticheskih funkcij", *DAN*, Vol. 171, no. 2, pp. 281-284. (Russian)

25. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1966. "Raspredelenie znachenij additivnyh teoretiko-chislovyh funkcij", *DAN SSSR*, no. 171, pp. 281-284. (Russian)

26. Barban M. B., Levin B. V. 1967. "Issledovanija po teorii chisel v Uzbekistane", *Izvestija AN Uzbekskoj SSR. Ser. fiz. -matem. nauk*, Vol. 11, no. 5, pp. 10-16. (Russian)

27. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1967. "Ob odnom metode summirovanija mul'tiplikativnyh funkcij", *Izvestija AN SSSR. Serija matematicheskaja*, Vol. 31, no. 3, pp. 697-710. (Russian)

28. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1967. "Primenenie nekotoryh integral'nyh uravnenij k voprosam teorii chisel", *UMN*, Vol. 22, no. 3 (135), pp. 119-197. (Russian)

29. Barban M. B., Levin B. V. 1968. "Mul'tiplikativnye funkcii na "sdvinutyh"prostyh chislah", *DAN*, Vol. 181, no. 4, pp. 778-780. (Russian)

30. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1968. "Integral'nye predel'nye teoremy dlja nekotoryh klassov additivnyh arifmeticheskih funkcij (k shestidesjatiletiju A. O. Gel'fonda)", *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshhestva. Moskva. Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta*, no. 18, pp. 19-54. (Russian)

31. Vinogradov A. I., Levin B. V., Malyshev A. V., Romanov N. P., Chudakov N. G. 1969. "Mark Borisovich Barban (nekrolog)", *UMN*, Vol. 24, no. 2 (146), pp. 213-216. (Russian)

32. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1969. "Srednie znachenija mul'tiplikativnyh funkcij", *DAN SSSR*, Vol., pp. 517-519. (Russian)

33. Levin B. V., Timofeev N. M. 1970. "O summah mul'tiplikativnyh funkcij", *DAN SSSR*, Vol. 193, pp. 992-995. (Russian)

34. Levin B. V., Fajnlejb A. S. 1970. "Mul'tiplikativnye funkcii i verojatnostnaja teorija chisel", *Izvestija AN SSSR. Serija matematicheskaja*, Vol. 34, no. 5, pp. 1064-1109. (Russian)

35. Levin B. V. 1971. "Ispravlenie oshibki v dokazatel'stve odnoj teoremy", *UMN*, Vol. 26, no. 5 (161), pp. 277-278. (Russian)

36. Levin B. V., Timofeev N. M. 1971. "Analiticheskij metod v verojatnostnoj teorii chisel", *Uchenye zapiski VGPI. Serija matematiki*, Vol. 38, no. 2, pp. 55-150. (Russian)

37. Levin B. V., Timofeev N. M., Tuljaganov S. T. 1971. "Raspredelenie znachenij mul'tiplikativnyh funkcij", *Uchenye zapiski VGPI*, Vol. 38, pp. 282-288. (Russian)

38. Levin B. V., Fel'dman N. I., Shidlovskij A. B. 1971. "Alexander O. Gelfond", *Acta Aritmetica*, Vol. 17, pp. 315-336.

39. Levin B. V., Timofeev N. M. 1973. "Raspredelenie znachenij additivnyh funkcij", *UMN*, Vol. 28, no. 1 (169), pp. 243–244. (Russian)

40. Levin B. V., Timofeev N. M., Tuljaganov S. T. 1973. "Raspredelenie znachenij mul'tiplikativnyh funkcij", *Litovskij matematicheskij sbornik*, Vol. 13, no. 1, pp. 87-100. (Russian)

41. Levin B. V., Judin B. V. 1973. "Lokal'nye predel'nye teoremy dlja additivnyh arifmeticheskih funkcij", *Acta Aritmetica*, Vol. 22, no. 2, pp. 233-247.

42. Levin B. V., Timofeev N. M. 1975. "On the distribution of values of additive functions", *Acta Aritmetica*, Vol. 26, no. 4, pp. 333-364.

43. Levin B. V., Timofeev N. M. 1975. "Analog zakona bol'shih chisel dlja additivnyh funkcij na redkih mnozhestvah", *Matematicheskie zametki*, Vol. 18, no. 5, pp. 687-698. (Russian)

44. Levin B. V., Timofeev N. M. 1976. "Nekotorye integral'nye predel'nye teoremy dlja additivnyh funkcij", *Litovskij matematicheskij sbornik*, Vol. 16, no. 4, pp. 133-147. (Russian)

45. Levin B. V., Timofeev N. M. 1982. "Teorema sravnenija dlja mul'tiplikativnyh funkcij", *Acta Aritmetica*, Vol. 42, no. 1, pp. 21-47.

46. Levin B. V. 1983. "Raspredelenie arifmeticheskih funkcij po progressijam", *V kn.: Tezisy Vsesojuznoj konferencii "Teorija transcendentnyh chisel i diofantovy priblizhenija"*, Moskva, 1983, pp. 72-73. (Russian)

47. Levin B. V., Timofeev N. M. 1983. "Ispravlenie k rabote "Teorema sravnenija dlja mul'tiplikativnyh funkcij", Acta Aritmetica. 1982. T. 42, № 1. S. 21-47", *Acta Aritmetica*, Vol. 42, no. 3, pp. 325.

48. Levin B. V., Timofeev N. M. 1983. "Summy mul'tiplikativnyh funkcij", *Stud. Sci. Math. Hung.*, Vol. 18, pp. 21-41.

49. Levin B. V. 1984. "The "average"distribution of $\mu(n)$ and $\Lambda_f(n)$ in progressions", *Topics in classical number theory, Colloq. Budapest 1981, Vol. II, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, Vol. 34, pp. 995-1022.

50. Levin B. V., Timofeev N. M. 1984. "Raspredelenie arifmeticheskih funkcij v srednem po progressijam (teoremy tipa Vinogradova–Bomb'eri)", *Matematicheskij sbornik*, Vol. 125 (167), no. 4 (12), pp. 558-572. (Russian)

51. Levin B. V., Chariev U. 1986. "Summy mul'tiplikativnyh funkcij po chislam s prostymi deliteljami iz zadannyh intervalov", *DAN Tadzhikskoj SSR*, Vol. 29, pp. 383-387. (Russian)

52. Levin B. V., Chariev U. 1987. "Povedenie reshenij nekotoryh integral'no-differencial'nyh uravnenij", *DAN Tadzhikskoj SSR*, Vol. 30, no. 5, pp. 267-272. (Russian)

53. Levin B. V., Timofeev N. M. 1989. "Ob odnoj additivnoj zadache", *Matematicheskie zametki*, Vol. 46, no. 4, pp. 25-33. (Russian)

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Получено 12.05.2017 г.
Принято в печать 12.06.2017 г.