

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 15 Выпуск 4 (2014)

УДК 519.2+511

ОБ ОДНОМ ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИИ С ЛАКУНАРНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ¹

В. Н. Чубариков (г. Москва), Н. М. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

С помощью метода М. П. Минеева основных и вспомогательных систем доказана теорема о количестве решений диофантова неоднородного уравнения с неизвестными из лакунарной последовательности натуральных чисел.

Исследован вопрос о количестве основных систем и для него получено полиномиальное выражение с использованием чисел Бернулли.

Получены оценки для числа вспомогательных систем.

Ключевые слова: диофантово уравнение, лакунарная последовательность.

Библиография: 12 названий.

ON SOME DIOPHANTINE EQUATION WITH VARIABLES FROM LACUNAR SEQUENCE

V. N. Chubarikov (Moscow), N. M. Dobrovolskiy (Tula)

Abstract

By M. P. Mineev's method of basic and auxiliary systems, we prove a theorem on a number of solutions of some inhomogeneous Diophantine equation with variables from a lacunar sequence of natural numbers.

Using Bernoulli numbers, we obtain a polynomial-type expression for the number of basic systems. The estimates for the number of auxiliary systems are also given.

Keywords: Diophantine equation, gap sequence.

Bibliography: 12 titles.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ, №НК-13-01-00835

1. Введение

Рассмотрим F_x — лакунарную последовательность натуральных чисел типа β . Напомним, что монотонная последовательность F_x натуральных чисел называется лакунарной типа β с константой A , если выполнены соотношения

$$\frac{F_{x+1}}{F_x} \geq \beta > 1, \quad F_x \leq A\beta^x.$$

Нетрудно видеть, что лакунарные последовательности имеют экспоненциальный рост:

$$F_1\beta^{x-1} \leq F_x \leq A\beta^x. \tag{1}$$

В класс лакунарных последовательностей попадают целочисленные геометрические прогрессии со знаменателем больше 1, многие рекуррентные последовательности с характеристическими числами больше 1 [5].

ЛЕММА 1. Пусть N, k, m_1, \dots, m_k — натуральные числа, а F_x — последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geq \beta > 1$. Тогда для количества решений $r_k(N)$ уравнения

$$N = m_1F_{x_1} + \dots + m_kF_{x_k} \tag{2}$$

в целых числах $x_1, \dots, x_k \geq 1$ справедлива следующая оценка $r_k(N) \leq c^k k!$, где $c = \frac{\beta}{\beta-1}$.

Доказательство см. в [1], [2] стр. 16, [3] стр. 7–8.

Пусть T_m — количество решений уравнения

$$F_{x_1} + \dots + F_{x_k} = F_{y_1} + \dots + F_{y_k} + m,$$

где m — целое число, отличное от нуля.

В работе [12] с использованием леммы 1 доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F_x — лакунарная последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geq \beta > 1$, $F_x \leq A\beta^x$, k — фиксированное натуральное число, P — растущее натуральное число, T_m — количество решений диофантова уравнения

$$F_{x_1} + \dots + F_{x_k} = F_{y_1} + \dots + F_{y_k} + m \tag{3}$$

в целых числах $1 \leq x_i, y_j \leq P$. Тогда верно следующее неравенство

$$T_m \leq (2\gamma + 1)c^k k! P^{k-1} + 2c^k k! C_k^2 T P^{k-1},$$

где $\gamma = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{\ln \beta} \right\rceil + 1$, $c = \frac{\beta}{\beta-1}$, $c_1 = \frac{1}{2A}$, $c_2 = \frac{\beta}{\kappa F_1}$, $\kappa = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$ и $T = \left\lceil \frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln \beta} \right\rceil + 1$.

Уравнения вида (2) будем называть уравнением первого типа, а уравнение вида (3) — второго типа.

Цель данной работы — дать новое доказательство уточненной теоремы о количестве решений диофантова неоднородного уравнения второго типа с неизвестными из лакунарной последовательности натуральных чисел.

Существенную роль в нашем исследовании будет играть метод М. П. Минеева основных и вспомогательных систем. Следуя М. П. Минееву, система чисел x_1, \dots, x_k называется *основной*, если для любых i, j ($i \neq j$) выполняется неравенство $|x_i - x_j| \geq T$, где T — некоторое натуральное число. В противном случае система x_1, \dots, x_k называется *вспомогательной*.

В работах [4, 6] рассматриваются связанные вопросы и применение указанных оценок к исследованию тригонометрических сумм.

2. Число основных и вспомогательных систем

Прежде всего определим число основных систем $N_{k,P,T}$, то есть таких наборов натуральных чисел x_1, \dots, x_k , что выполнены соотношения $x_j \leq P$ ($1 \leq j \leq k$), для любых i, j ($i \neq j$) выполняется неравенство $|x_i - x_j| \geq T$.

Назовем основную систему x_1, \dots, x_k *канонической*, если выполнены соотношения $x_1 > x_2 > \dots > x_k$. Количество канонических основных систем обозначим через $K_{k,P,T}$.

Из любой канонической основной системы перестановками членов получается $k!$ различных основных систем, а из любой основной системы перестановками можно получить только одну каноническую основную систему. Отсюда следует, что $N_{k,P,T} = k!K_{k,P,T}$.

Ясно, что наименьшая каноническая основная система имеет вид

$$x_1 = 1 + (k-1)T > x_2 = 1 + (k-2)T > \dots > x_{k-1} = 1 + T > x_k = 1.$$

Поэтому при $P \leq (k-1)T$ имеем $N_{k,P,T} = K_{k,P,T} = 0$.

Далее нам потребуются числа и многочлены Бернулли (см. [7] стр. 256 – 273, [8] стр. 45 – 46).

По определению числа Бернулли задаются равенствами:

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} C_{n+1}^{n-\nu} B_\nu \right) \quad (n \geq 1);$$

соответственно, многочлены Бернулли —

$$B_0(x) = 1, \quad B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n C_n^\nu B_\nu x^{n-\nu} \quad (n \geq 1).$$

Для степеней натурального ряда справедлива формула

$$\sum_{x=0}^{P-1} x^\nu = \frac{B_{\nu+1}(P) - B_{\nu+1}}{\nu + 1} \quad (\nu \geq 1),$$

или

$$\sum_{x=1}^P x^\nu = \frac{B_{\nu+1}(P+1) - B_{\nu+1}}{\nu + 1} = \frac{B_{\nu+1}(P) + (\nu + 1)P^\nu - B_{\nu+1}}{\nu + 1} \quad (\nu \geq 1).$$

Определим многочлены $Ch_k(x)$ для натуральных x равенствами:

$$Ch_1(x) = x, \quad Ch_\nu(x) = \sum_{y=1}^x Ch_{\nu-1}(y) \quad (\nu \geq 2).$$

ЛЕММА 2. Для многочленов $Ch_k(x)$ справедливо равенство

$$Ch_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} x^\mu = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} Ch_{\nu,\mu} x^\mu + \frac{x^\nu}{\nu!}, \tag{4}$$

где

$$Ch_{\nu,\mu} = \begin{cases} \frac{1}{\nu!}, & \text{при } \mu = \nu, \\ \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} Ch_{\nu-1,\lambda} B_\lambda + Ch_{\nu-1,1}, & \text{при } \mu = 1, \nu > 1, \\ \sum_{\lambda=\mu-1}^{\nu-1} \frac{Ch_{\nu-1,\lambda}}{\lambda+1} C_{\lambda+1}^\mu B_{\lambda+1-\mu} + Ch_{\nu-1,\mu}, & \text{при } \nu > 1, 1 < \mu < \nu, \\ 1, & \text{при } \mu = \nu = 1. \end{cases} \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по ν . Получим

$$\begin{aligned} Ch_{\nu+1}(x) &= \sum_{y=1}^x Ch_\nu(y) = \sum_{y=1}^x \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} y^\mu = \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} \sum_{y=1}^x y^\mu = \\ &= \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} \frac{B_{\mu+1}(x+1) - B_{\mu+1}}{\mu + 1} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{Ch_{\nu,\mu}}{\mu + 1} \left(\sum_{\lambda=1}^{\mu+1} C_{\mu+1}^\lambda B_{\mu+1-\lambda} x^\lambda + (\mu + 1)x^\mu \right) = \\ &= \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} B_\mu \right) x + \sum_{\lambda=2}^{\nu+1} \left(\sum_{\mu=\lambda-1}^{\nu} \frac{Ch_{\nu,\mu}}{\mu + 1} C_{\mu+1}^\lambda B_{\mu+1-\lambda} \right) x^\lambda + \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} x^\mu = \\ &= \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} B_\mu + Ch_{\nu,1} \right) x + \sum_{\lambda=2}^{\nu} \left(\sum_{\mu=\lambda-1}^{\nu} \frac{Ch_{\nu,\mu}}{\mu + 1} C_{\mu+1}^\lambda B_{\mu+1-\lambda} + Ch_{\nu,\lambda} \right) x^\lambda + \frac{x^{\nu+1}}{(\nu + 1)!}, \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$Ch_{\nu+1,1} = \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} B_{\mu} + Ch_{\nu,1}$$

и

$$Ch_{\nu+1,\lambda} = \sum_{\mu=\lambda-1}^{\nu} \frac{Ch_{\nu,\mu}}{\mu+1} C_{\mu+1}^{\lambda} B_{\mu+1-\lambda} + Ch_{\nu,\lambda} \quad (1 < \lambda < \nu+1), \quad Ch_{\nu+1,\nu+1} = \frac{1}{(\nu+1)!},$$

что доказывает лемму. \square

ТЕОРЕМА 2. *При $P > (k-1)T$ для количества основных систем справедливо соотношение*

$$K_{k,P,T} = \sum_{\mu=1}^{k-1} Ch_{k,\mu} (P - (k-1)T)^{\mu} + \frac{(P - (k-1)T)^k}{k!}, \quad (6)$$

$$N_{k,P,T} = (P - (k-1)T)^k + k! \sum_{\mu=1}^{k-1} Ch_{k,\mu} (P - (k-1)T)^{\mu}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $K_{1,P,t} = P$, так как условия основной системы и канонической являются тривиальными (отсутствуют) и любое натуральное x с $1 \leq x \leq P$ образует каноническую основную систему.

При $k > 1$ рассмотрим каноническую систему $x_1 > x_2 > \dots > x_k$. Ясно, что x_1 — любое из условий $(k-1)T + 1 \leq x \leq P$.

При фиксированном значении x_1 числа $x_2 > \dots > x_k$ образуют каноническую основную систему при замене P на $x_1 - T$. Поэтому их будет ровно $K_{k-1,x_1-T,T}$. Следовательно, имеет место рекуррентное соотношение

$$K_{k,P,T} = \sum_{x=(k-1)T+1}^P K_{k-1,x-T,T}.$$

По индукции покажем, что справедливо равенство $K_{k,P,T} = Ch_k(P - (k-1)T)$.

Действительно, при $k = 1$ имеем $K_{1,P,t} = P = Ch_1(P - (1-1)T)$ и утверждение справедливо.

Далее,

$$\begin{aligned} K_{k+1,P,T} &= \sum_{x=kT+1}^P K_{k,x-T,T} = \sum_{x=kT+1}^P Ch_k(x - T - (k-1)T) = \\ &= \sum_{x=1}^{P-kT} Ch_k(x) = Ch_{k+1}(P - kT) \end{aligned}$$

и утверждение доказано для любого натурального k .

Применяя лемму 2, получим равенство (6), из которого непосредственно вытекает равенство (7). \square

Обозначим через $N_{k,P,T}^*$ количество вспомогательных систем, то есть таких систем x_1, \dots, x_k натуральных чисел, что выполнены соотношения $x_j \leq P$ ($1 \leq j \leq k$), и найдутся i, j ($i \neq j$), для которых выполняется неравенство $|x_i - x_j| < T$.

ЛЕММА 3. При $k \geq 2$ выполняется оценка

$$N_{k,P,T}^* \leq C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P} \right). \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система x_1, \dots, x_k вспомогательная, тогда найдутся номера i и j такие, что $1 \leq x_i - x_j < T$ или $x_i = x_j$.

В первом случае номера i и j можно выбрать $k(k-1)$ способами, переменные x_ν ($\nu \neq j, i$) могут независимо принимать любое значение от 1 до P , переменная x_i — от 2 до P , а переменная x_j — не более $\min(x_i - 1, T - 1)$ различных значений от $x_i - 1$ до $\max(x_i - T + 1, 1)$.

Во втором случае номера i и j можно выбрать C_k^2 способами, переменные x_ν ($\nu \neq j, i$) могут независимо принимать любое значение от 1 до P , переменные $x_i = x_j$ и одновременно принимают P различных значений от 1 до P .

Поэтому

$$\begin{aligned} N_{k,P,T}^* &\leq k(k-1)P^{k-2} \left(\sum_{x=T}^P (T-1) + \sum_{x=2}^{T-1} (x-1) \right) + C_k^2 P^{k-1} = \\ &= k(k-1)P^{k-2} \left((P-T+1)(T-1) + \frac{(T-2)(T-1)}{2} \right) + C_k^2 P^{k-1} = \\ &= C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P} \right). \end{aligned}$$

\square

3. Свойства основных канонических систем

Обозначим через $X_k(P, T)$ множество всех основных канонических систем $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$. Таким образом имеем:

$$X_k(P, T) = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \left| \begin{array}{l} 1 \leq x_k < \dots < x_1 \leq P, \\ x_j - x_{j+1} \geq T, j = 1, \dots, k-1 \end{array} \right. \right\}.$$

На множестве основных канонических систем задан естественный лексикографический порядок: $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда найдется номер $j \leq k$ такой, что $x_\nu = y_\nu$ при $\nu < j$ и $x_j > y_j$. Величину $j = j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будем называть индексом порядка.

Ясно, что максимальный элемент $\mathbf{x}_{\max} = (P, P - T, \dots, P - (k - 1)T)$, а минимальный элемент $\mathbf{x}_{\min} = (1 + (k - 1)T, \dots, 1 + T, 1)$.

Зададим на множестве основных канонических систем $X_k(P, T)$ функционал $F(\mathbf{x})$ равенством

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^k F_{x_\nu}.$$

ЛЕММА 4. При $T > \frac{\ln(\frac{4\beta}{\beta-1})}{\ln \beta}$ функционал $F(\mathbf{x})$ монотонен на множестве основных канонических систем $X_k(P, T)$, то есть из $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ следует $F(\mathbf{x}) > F(\mathbf{y})$. При этом справедливы неравенства

$$\frac{\beta - 1}{2\beta} F_{x_j} < F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) < \frac{4}{3} F_{x_j}, \quad (9)$$

где $j = j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — индекс порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через \mathbf{x}_j^+ наибольшую основную каноническую систему \mathbf{z} такую, что $j(\mathbf{z}, \mathbf{x}) > j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а через \mathbf{x}_j^- наименьшую основную каноническую систему \mathbf{z} такую, что $j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) > j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{x}_j^+ = (x_1, \dots, x_j, x_j - T, \dots, x_j - (k - j)T)$ и $\mathbf{x}_j^- = (x_1, \dots, x_j, 1 + (k - j - 1)T, \dots, 1 + T, 1)$.

Аналогично, обозначим через \mathbf{y}_j^+ наибольшую основную каноническую систему \mathbf{z} такую, что $j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а через \mathbf{y}_j^- наименьшую основную каноническую систему \mathbf{z} такую, что $j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{y}_j^+ = (x_1, \dots, x_j - 1, x_j - 1 - T, \dots, x_j - 1 - (k - j)T)$ и $\mathbf{y}_j^- = (x_1, \dots, x_{j-1}, 1 + (k - j - 1)T, 1 + (k - j - 1)T, \dots, 1 + T, 1)$.

Из сделанных определений следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^+ \geq \mathbf{x} \geq \mathbf{x}_j^- > \mathbf{y}, \quad j(\mathbf{x}_j^+, \mathbf{y}) = j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = j(\mathbf{x}_j^-, \mathbf{y}) \\ \mathbf{x} > \mathbf{y}_j^+ \geq \mathbf{y} \geq \mathbf{y}_j^-, \quad j(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j^+) = j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = j(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j^-). \end{aligned}$$

Переходя к значениям функционалов, получим

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_j^+) \geq F(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}_j^-) > F(\mathbf{y}), \\ F(\mathbf{x}) > F(\mathbf{y}_j^+) \geq F(\mathbf{y}) \geq F(\mathbf{y}_j^-). \end{aligned}$$

Поэтому

$$F(\mathbf{x}_j^+) - F(\mathbf{y}_j^-) \geq F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) \geq F(\mathbf{x}_j^-) - F(\mathbf{y}_j^+).$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_j^+) - F(\mathbf{y}_j^-) &= F_{x_j} + \sum_{\nu=1}^{k-j} F_{x_{j-\nu}T} - \sum_{\nu=0}^{k-j} F_{1+\nu T}, \\ F(\mathbf{x}_j^-) - F(\mathbf{y}_j^+) &= F_{x_j} + \sum_{\nu=0}^{k-j-1} F_{1+\nu T} - \sum_{\nu=0}^{k-j} F_{x_{j-1-\nu}T}. \end{aligned}$$

Из определения лакунарной последовательности имеем неравенства

$$\frac{F_{x+1}}{\beta} \geq F_x \geq \beta F_{x-1}.$$

Отсюда следует, что

$$F_{x_j-\nu T} \leq \frac{F_{x_j}}{\beta^{\nu T}}, \quad F_{x_{j-1}-\nu T} \leq \frac{F_{x_j}}{\beta^{1+\nu T}}$$

и

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_j^+) - F(\mathbf{y}_j^-) &\leq F_{x_j} \cdot \left(1 + \sum_{\nu=1}^{k-j} \frac{1}{\beta^{\nu T}} \right) = \\ &= F_{x_j} \frac{\beta^{T(k-j+1)} - 1}{(\beta^T - 1)\beta^{T(k-j)}} < F_{x_j} \frac{\beta^T}{\beta^T - 1}, \end{aligned}$$

$$F(\mathbf{x}_j^-) - F(\mathbf{y}_j^+) \geq F_{x_j} \left(1 - \sum_{\nu=0}^{k-j} \frac{1}{\beta^{1+\nu T}} \right) = F_{x_j} \cdot \left(1 - \frac{\beta^{T(k-j+1)} - 1}{\beta(\beta^T - 1)\beta^{T(k-j)}} \right)$$

При $T > \frac{\ln(\frac{4\beta}{\beta-1})}{\ln \beta}$ имеем $T > \frac{\ln 2}{\ln \beta}$ и $\beta^T > \frac{4\beta}{\beta-1} > 4$, $\frac{\beta^T}{\beta^T-1} < \frac{4}{3}$.

Аналогично, имеем

$$\frac{\beta^{T(k-j+1)} - 1}{\beta(\beta^T - 1)\beta^{T(k-j)}} < \frac{\beta^T}{\beta(\beta^T - 1)} < \frac{\beta^T}{\beta(\beta^T - 1)} < \frac{\frac{4\beta}{\beta-1}}{\beta(\frac{4\beta}{\beta-1} - 1)} = \frac{4}{3\beta + 1}.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{\beta^{T(k-j+1)} - 1}{\beta(\beta^T - 1)\beta^{T(k-j)}} > 1 - \frac{4}{3\beta + 1} > \frac{\beta - 1}{2\beta},$$

так как

$$\begin{aligned} (3\beta + 1)(\beta - 1) &< 2\beta(3\beta + 1) - 8\beta; \\ 3\beta^2 - 2\beta - 1 &< 6\beta^2 - 6\beta; \\ 3\beta^2 - 4\beta + 1 &= 3(\beta - 1) \left(\beta - \frac{1}{3} \right) > 0 \quad \text{при } \beta > 1. \end{aligned}$$

Таким образом соотношения (9) доказаны и доказательство леммы завершено. \square

Доказанная лемма позволяет существенно усилить лемму 1 для случая канонического основного решения.

ЛЕММА 5. Пусть N, k — натуральные числа, а F_x — последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geq \beta > 1$. Тогда при $T > \frac{\ln(\frac{4\beta}{\beta-1})}{\ln \beta}$ для количества основных канонических решений $r_k^*(N, T)$ уравнения

$$N = F_{x_1} + \dots + F_{x_k} \tag{10}$$

в целых числах $x_1, \dots, x_k \geq 1$ справедлива следующая оценка $r_k^*(N) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ — основное каноническое решение уравнения (10), то $F(\mathbf{x}) = N$. Если \mathbf{y} — другое основное каноническое решение, то $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ и по лемме 4 $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{y})$. Следовательно, уравнение (10) имеет не более одного основного канонического решения. \square

4. Число решений диофантова уравнения первого типа для лакунарной последовательности

Рассмотрим неоднородное диофантово уравнение первого типа вида

$$N = F_{x_1} + \dots + F_{x_k} \quad (11)$$

для лакунарной последовательности F_1, F_2, \dots .

Уравнение (11) будем называть каноническим, если выполнено дополнительно условие упорядоченности $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k$.

Через $r_k(N)$ обозначим количество решений уравнения (11), а через $r_k^*(N)$ — количество решений канонического уравнения. Ясно, что $r_k(N) \leq k!r_k^*(N)$. Очевидно, что $r_k(N)$ равно числу представлений натурального N в виде сумм k слагаемых из лакунарной последовательности, а $r_k^*(N)$ равно числу канонических представлений натурального N в виде сумм k слагаемых из лакунарной последовательности, то есть невозрастающей последовательностью слагаемых.

Нетрудно видеть, что максимальное значение N , имеющего представления со слагаемыми $x_\nu \leq P$, есть kF_P . Так как количество систем $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ с $x_\nu \leq P$ ($1 \leq \nu \leq k$) равно P^k , а $kF_P \geq kF_1\beta^{P-1}$, то для большей части значений N величина $r_k(N) = 0$.

В силу важности леммы 1 приведем доказательство модифицированного утверждения для числа решений уравнения (11).

ЛЕММА 6. Для числа решений уравнения (11) справедлива оценка

$$r_k(N) \leq k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство по индукции. При $k = 1$ справедливо равенство

$$r_1(N) = \begin{cases} 1, & \text{при } N \in \{F_1, F_2, \dots\}, \\ 0, & \text{при } N \notin \{F_1, F_2, \dots\} \end{cases}$$

и утверждение леммы справедливо.

Пусть $k > 1$. Обозначим через n номер, такой что $F_n \leq N < F_{n+1}$. В силу неравенств (1) имеем

$$\frac{\ln N - \ln A}{\ln \beta} - 1 < n \leq \frac{\ln N - \ln F_1}{\ln \beta} + 1, \quad \beta^{1-n} \leq \frac{F_1}{N}.$$

Обозначим через $Y_k(N)$ множество всех \mathbf{y} таких, что $F(\mathbf{y}) = N$, тогда справедливо равенство

$$r_k(N) = \sum_{\mathbf{y} \in Y_k(N)} \frac{F(\mathbf{y})}{N} = \sum_{\nu=1}^k \sum_{\mathbf{y} \in Y_k(N)} \frac{F_{y_\nu}}{N}.$$

Так как все переменные равноправные, то

$$\sum_{\mathbf{y} \in Y_k(N)} \frac{F_{y_\nu}}{N} = \sum_{\mathbf{y} \in Y_k(N)} \frac{F_{y_\mu}}{N}$$

для любых $1 \leq \nu, \mu \leq k$ и

$$r_k(N) = k \sum_{\mathbf{y} \in Y_k(N)} \frac{F_{y_1}}{N} = k \sum_{j=1}^n \frac{F_j}{N} r_{k-1}(N - F_j).$$

Воспользуемся оценкой $F_j \leq \frac{F_n}{\beta^{j-1}} \leq \frac{N}{\beta^{j-1}}$ и индукционным предположением, получим

$$\begin{aligned} r_k(N) &\leq k \sum_{j=1}^n \frac{1}{\beta^{j-1}} (k-1)! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-2} = \\ &= k! \left(\frac{\beta - \beta^{1-n}}{\beta - 1} \right) \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-2} \leq k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1} \end{aligned}$$

и лемма доказана. \square

5. Число решений диофантова уравнения второго типа для лакунарной последовательности

Так как уравнения

$$F_{x_1} + \dots + F_{x_k} = F_{y_1} + \dots + F_{y_k} + m$$

и

$$F_{x_1} + \dots + F_{x_k} = F_{y_1} + \dots + F_{y_k} - m$$

имеют одинаковое количество решений при $1 \leq x_j, y_j \leq P$ ($1 \leq j \leq k$), то без ограничения общности можно считать, что $m > 0$.

Будем говорить, что решение $F_{x_1}, \dots, F_{x_k}, F_{y_1}, \dots, F_{y_k}$ диофантова уравнения (3) — *основное*, если и x_1, \dots, x_k , и y_1, \dots, y_k — основные системы. В противном случае, когда либо x_1, \dots, x_k , либо y_1, \dots, y_k , либо обе системы вспомогательные, то и решение $F_{x_1}, \dots, F_{x_k}, F_{y_1}, \dots, F_{y_k}$ называется *вспомогательным*.

Обозначим через $T_m(k, P, T)$ число основных решений уравнения (3), а через $T_m^*(k, P, T)$ число вспомогательных решений, тогда

$$T_m = T_m(k, P, T) + T_m^*(k, P, T). \quad (13)$$

ЛЕММА 7. Для количества вспомогательных решений уравнения (3) справедливо неравенство

$$T_m^*(k, P, T) \leq 2C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P}\right) k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_1, \dots, x_k — фиксированная вспомогательная система, для которой $F_{x_1} + \dots + F_{x_k} > m$, тогда для натурального

$$N_1 = F_{x_1} + \dots + F_{x_k} - m$$

решения уравнения

$$F_{y_1} + \dots + F_{y_k} = N_1 \quad (15)$$

будут задавать вспомогательные решения $F_{x_1}, \dots, F_{x_k}, F_{y_1}, \dots, F_{y_k}$ диофантова уравнения (3). По лемме 6 таких решений уравнения (15) не более $c^k k!$. Поэтому, применяя лемму 3, получим, что число вспомогательных решений, для которых x_1, \dots, x_k — вспомогательная система, будет не более

$$C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P}\right) k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1}.$$

Аналогично, если y_1, \dots, y_k — произвольная фиксированная вспомогательная система и натуральное $N_2 = F_{y_1} + \dots + F_{y_k} + m$, то решения уравнения

$$F_{x_1} + \dots + F_{x_k} = N_2 \quad (16)$$

будут задавать вспомогательные решения $F_{x_1}, \dots, F_{x_k}, F_{y_1}, \dots, F_{y_k}$ диофантова уравнения (3). По лемме 1 таких решений уравнения (16) не более $c^k k!$. Поэтому, применяя лемму 3, получим, что число вспомогательных решений, для которых y_1, \dots, y_k — вспомогательная система, будет не более

$$C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P}\right) k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1}.$$

Объединяя обе оценки, получим утверждение леммы. \square

ЛЕММА 8. При $T > \frac{\ln(\frac{4\beta}{\beta-1})}{\ln \beta}$ для количества $T_m(k, P, T)$ основных решений уравнения (3) справедлива оценка

$$T_m(k, P, T) \leq k \cdot (k!)^2 \cdot \left(\left[\frac{\ln 8 - \ln 3 + \ln A - \ln F_1}{\ln \beta} \right] + 3 \right) \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1} \cdot \text{Ch}_{k-1}(P - (k-2)T). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из любого основного решения $F_{x_1}, \dots, F_{x_k}, F_{y_1}, \dots, F_{y_k}$ диофантового уравнения (3) перестановками можно получить только одно основное каноническое решение $F_{x_1^*}, \dots, F_{x_k^*}, F_{y_1^*}, \dots, F_{y_k^*}$, то есть такое, где $x_1^* > \dots > x_k^*, y_1^* > \dots > y_k^*$. Наоборот, из любого основного канонического решения можно получить ровно $(k!)^2$ различных основных решений.

Кроме этого заметим, что в силу неоднородности уравнения, соглашения о положительности свободного члена m и леммы 4 для решения \mathbf{x}, \mathbf{y} имеем $\mathbf{x} > \mathbf{y}$. Поэтому для любого основного канонического решения \mathbf{x}, \mathbf{y} определен индекс порядка $j = j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Обозначим через $T_{m,j}^*(k, P, T)$ количество основных канонических решений уравнения (3), для которых индекс порядка равен j .

Согласно предыдущему получим

$$T_m(k, P, T) = (k!)^2 \sum_{j=1}^k T_{m,j}^*(k, P, T). \tag{18}$$

Пусть \mathbf{x}, \mathbf{y} основное каноническое решение с индексом порядка j уравнения (3), тогда согласно лемме 4 получим

$$\frac{\beta - 1}{2\beta} F_{x_j} < F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) = m < \frac{4}{3} F_{x_j}.$$

Отсюда и из неравенств (1) следует, что

$$\frac{\beta - 1}{2\beta} F_1 \beta^{x_j - 1} < m < \frac{4}{3} A \beta^{x_j},$$

$$\frac{\ln m + \ln 3 - \ln 4 - \ln A}{\ln \beta} < x_j < \frac{\ln m + \ln 2 - \ln F_1 - \ln(\beta - 1)}{\ln \beta} + 2,$$

поэтому количество различных значений x_j не превосходит величины

$$C = \left\lceil \frac{\ln 8 - \ln 3 + \ln A - \ln F_1}{\ln \beta} \right\rceil + 3.$$

Так как при фиксированном значении основной канонической системы \mathbf{x} величина $r_k(F(\mathbf{x}) - m)$ равна количеству всех систем \mathbf{y} , удовлетворяющих уравнению $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y}) + m$, то величина $k!r_k(F(\mathbf{x}) - m)$ будет не превосходить согласно лемме 5 величины

$$k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1}.$$

Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ — основная каноническая система, то и система $\mathbf{z} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$, получающаяся выкидыванием j -ой компоненты, будет основной канонической системой. Поэтому количество основных канонических систем \mathbf{x} с ограничением на j -ую компоненту, что она принимает не более C значений, будет не превосходить величины $CK_{k-1, P, T}$.

Так как последняя оценка не зависит от j , то для числа основных решений уравнения (3) получаем

$$T_m(k, P, T) \leq k \cdot k! \cdot C \cdot K_{k-1, P, T} \cdot k! \cdot \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1},$$

что доказывает утверждение леммы. \square

ТЕОРЕМА 3. *Для количества решений уравнения (3) справедлива оценка*

$$T_m \leq 2C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P} \right) k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1} + k \cdot (k!)^2 \cdot \left(\left[\frac{\ln 8 - \ln 3 + \ln A - \ln F_1}{\ln \beta} \right] + 3 \right) \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1} \cdot Ch_{k-1}(P - (k-2)T), \quad (19)$$

$$\text{где } T = \left[\frac{\ln \left(\frac{4\beta}{\beta-1} \right)}{\ln \beta} \right] + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при указанном значении параметра T выполнены условия леммы 8, поэтому из лемм 7 и 8 следует утверждение теоремы. \square

6. Заключение

Общий взгляд на применение диофантовых уравнений с показательной функцией содержится в работах А. Г. Постников [11] и М. П. Минеева [9, 10]. Было бы интересно получить результаты, аналогичные теоремам настоящей работы для функций с более медленным ростом на бесконечности, чем показательная функция.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н. О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи // Доклады РАН. 2001. Т. 379. № 1. С. 9–11.
2. Бояринов Р. Н. О распределении значений сумм арифметических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2002.
3. Бояринов Р. Н., Нгонго И. И., Чубариков В. Н. О новых метрических теоремах в методе А. Г. Постникова // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: труды IV Междунар. Конф. Тула, 2002. С. 5–31.

4. Бояринов Р. Н. О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы // Дискрет. мат. 2012. Т. 24, № 1. С. 26–29.
5. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004.
6. Бояринов Р. Н. О скорости сходимости распределений случайных величин // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 3. С. 295–297.
7. А. О. Гельфонд Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. 376 с.
8. Н. М. Коробов Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. — М.: МЦНМО. 2004. — 288 с.
9. Минеев М. П. Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1958. Т. 26, №5. С. 282–298.
10. Минеев М. П. О проблеме Тарри для быстрорастущих функций // Мат. сб. 1958. Т. 46(88), № 4. С. 451–454.
11. Постников А. Г. Избранные труды / Под ред. В. Н. Чубарикова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 512 с.
12. И. С. Тимергалиев, Р. Н. Бояринов О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы на коротких интервалах // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 2. С. 154–163.

REFERENCES

1. Boyarinov, R. N. & Chubarikov, C. N. 2001, "About the distribution of values of functions on a sequence of Fibonacci", *Dokl. RAS*, vol. 379, № 1, pp. 9–11. (Russian)
2. Boyarinov, R. N. 2002, "About the distribution of values of sums of arithmetic functions", Thesis ... c.f.-m.s. Moscow: MSU. (Russian)
3. Boyarinov, R. N., Ngongo, I. I. & Chubarikov, V. N. 2002, "About new metric theorems in method A. G. Postnikova", *Modern problems of number theory and its applications: proceedings of the IV Int. Proc. Tula*, pp. 5–31. (Russian)
4. Boyarinov, R. N. 2012, "On the distribution of absolute values of of trigonometric sum", *Increments. Mat.*, vol. 24, № 1, pp. 26–29. (Russian)
5. Arkhipov G., I., Sadovnichy V. A. & Chubarikov V. N. 2004, "Lectures on mathematical analysis", *M: Drofa*. (Russian)

6. Boyarinov, R. N. 2010, "On the rate of convergence of the distributions of random variables" , *Dokl. Russian Academy of Sciences*, vol. 435. № 3, pp. 295–297. (Russian)
7. Gelfond, A. O. 1967, "Calculus of finite differences" , *Moscow: Nauka*, 376 p. (Russian)
8. Korobov, N. M. 2004, "Number-Theoretic methods in approximate analysis" , *Moscow: MCCME*. 288 p. (Russian)
9. Mineev, M. P. 1958, "Diophantine equation with exponential function and its application to the study of the ergodic sum" , *Izv. A. S. SSSR, ser. Math.*, vol. 26, №. 5, pp. 282–298. (Russian)
10. Mineev, M. P. 1958, "The problem Tarri for the fast-growing functions" , *Mat. Proc.*, vol. 46(88), no. 4, pp. 451–454. (Russian)
11. Postnikov, A. G. 2005, "Selected works / edited by V. N. Chubarikov." , *Moscow: FIZMATLIT*, 512 p. (Russian)
12. Temirgaliev, I. S. & Boyarinov, R. N. 2013, "On the distribution of absolute values of trigonometric sums at short intervals" , *Chebyshev sb.*, vol. 14, is. 2, pp. 154–163. (Russian)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Поступило 5.12.2014