ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 3.

УДК 511.9.

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ГУРВИЦА[1]

© 2016. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский (г. Тула),
В. Н. Соболева, Д. К. Соболев (г. Москва),
Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова (г. Тула).

Аннотация

В работе рассматривается новый объект исследования — гиперболическая дзета-функция Гурвица, которая задается в правой α-полуплоскости $\alpha=\sigma+it$, $\sigma>1$ равенством

$$\zeta_H(\alpha;d,b)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha},$$

где $d\neq 0$ и b — любое вещественное число.

Гиперболическая дзета-функция Гурвица $\zeta_H(\alpha;d,b)$ при $\left\|\frac{b}{d}\right\|>0$ совпадает с гиперболической дзета-функцией сдвинутой одномерной решеткой $\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha)$. Важность этого класса одномерных решёток обусловлена тем, что каждая декартова решётка представляется объединением конечного числа декартовых произведений одномерных сдвинутых решёток вида $\Lambda(d,b)=d\mathbb{Z}+b$.

Декартовы произведения одномерных сдвинутых решёток — это суть сдвинутые диагональные решётки, для которых в данной работе удается дать наиболее простой вид функционального уравнения для гиперболической дзета-функции этих решёток.

Изучается связь гиперболической дзета-функции Гурвица с периодизированной по параметру b дзета-функцией Гурвица $\zeta^*(\alpha;b)$ и с обычной дзета-функцией Гурвица $\zeta(\alpha;b)$.

Получены новые интегральные представления для этих дзета-функций и аналитическое продолжение слева от прямой $\alpha=1+it$.

Все рассматриваемые гиперболические дзета-функции решёток образуют важный класс рядов Дирихле, непосредственно связанный с развитием теоретико-числового метода в приближенном анализе. Для исследования таких рядов эффективным является применение теоремы Абеля, дающей интегральное представление через несобственные интегралы. Интегрирование по частям этих несобственных интегралов приводят к несобственным интегралам с полиномами Бернулли, которые также исследуются в данной работе.

Ключевые слова: дзета-функция Гурвица, периодизированная дзета-функция Гурвица, дзета-функция Гурвица второго рода, гиперболическая дзета-функция Гурвица, решётка, гиперболическая дзета-функция решётки, дзета-функция решётки, полиномы Бернулли, контур Ханкеля.

Библиография: 34 названия.

ON HYPERBOLIC HURWITZ ZETA FUNCTION

N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky (Tula),
V. N. Soboleva, D. K. Sobolev (Moscow),
L. P. Dobrovol'skaya, O. E. Bocharova (Tula).

Abstract

[1]Работа выполнена по грантам РФФИ №15-01-01540, №15-41-03263р_центр_а

The paper deals with a new object of study — hyperbolic Hurwitz zeta function, which is given in the right α-semiplane $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$ by the equality

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha},$$

where $d \neq 0$ and b — any real number.

Hyperbolic Hurwitz zeta function $\zeta_H(\alpha; d, b)$, when $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$ coincides with the hyperbolic zeta function of shifted one-dimensional lattice $\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha)$. The importance of this class of one-dimensional lattices is due to the fact that each Cartesian lattice is represented as a union of a finite number of Cartesian products of one-dimensional shifted lattices of the form $\Lambda(d,b) = d\mathbb{Z} + b$.

Cartesian products of one-dimensional shifted lattices are in substance shifted diagonal lattices, for which in this paper the simplest form of a functional equation for the hyperbolic zeta function of such lattices is given.

The connection of the hyperbolic Hurwitz zeta function with the Hurwitz zeta function $\zeta^*(\alpha; b)$ periodized by parameter b and with the ordinary Hurwitz zeta function $\zeta(\alpha; b)$ is studied.

New integral representations for these zeta functions and an analytic continuation to the left of the line $\alpha = 1 + it$ are obtained.

All considered hyperbolic zeta functions of lattices form an important class of Dirichlet series directly related to the development of the number-theoretical method in approximate analysis. For the study of such series the use of Abel's theorem is efficient, which gives an integral representation through improper integrals. Integration by parts of these improper integrals leads to improper integrals with Bernoulli polynomials, which are also studied in this paper.

Keywords: Hurwitz zeta function, periodised Hurwitz zeta function, Hurwitz zeta function of the second kind, hyperbolic Hurwitz zeta function, lattice, hyperbolic zeta function of lattice, zeta function of lattice, Bernoulli polynomials, Hankel contour.

Bibliography: 34 titles.

1. Введение **73**
2. Цели и содержание работы **74**
3. Полиномы Бернулли и несобственные интегралы с ними **75**
4. Периодизированная по параметру b дзета-функция Гурвица и дзета-функция Гурвица второго рода **78**
4.1. Аналитическое продолжение периодизированной по параметру b дзета-функция Гурвица 79
4.2. Множитель Римана 81
4.3. Аналитическое продолжение дзета-функции Гурвица второго рода 82
5. Гиперболическая дзета-функция Гурвица **85**
5.1. Дзета-функция сдвинутой решетки 87
5.2. Интегральные представления 89
6. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции сдвинутых диагональных решёток **95**
6.1. Одномерный случай 96
6.2. Двумерный случай 98
7. Заключение **101**
Список цитированной литературы **102**

1. Введение

Теория гиперболической дзета-функции решёток излагается в монографиях [23], [13] и [2], которые опираются на результаты из работ [4]– [7], [10]– [17], [24], [25]. Теории гиперболической дзета-функции решёток и обобщенной гиперболической дзета функции сдвинутых решёток были посвящены диссертации [8], [28], [26], [11] и [5], содержание которых отражено в авторефератах [9], [29], [27], [12] и [6].

В работе [16] получена новая асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки квадратичного поля. Таким образом теория развивается как для произвольной размерности s, так и для конкретных значений, а именно, для $s = 2$. В настоящей работе внимание сосредоточено на одномерном случае, так как логика развития теории показала, что именно к этому случаю естественно сводится вся теория гиперболической дзета-функции декартовых решёток.

В большой обзорной работе [3] и в работе [34] приводятся последние достижения в этой теории — даётся вывод функционального уравнения для дзета-функции произвольной декартовой решётки. Кроме этого, в последнем разделе этой работы даётся список актуальных нерешенных проблем теории гиперболической дзета-функции решёток. Одной из таких проблем — получению аналитического продолжения и выводу функционального уравнения для гиперболической дзета-функции Гурвица — посвящена данная работа.

Данная постановка вопросов возникла естественным образом в процессе изучения гиперболической дзета-функции решётки приближений Дирихле квадратичной иррациональности. Приложение полученных результатов к этому классу гиперболических дзета-функций решёток будет посвящена наша следующая работа.

Как обычно, используются обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел и $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел; через $\{x\}$ и $[x]$ обозначаются дробная часть и целая часть вещественного числа x: $0 \leqslant \{x\} < 1$, $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leqslant x < [x] + 1$, $x = [x] + \{x\}$. В работе для вещественных m используем очень удобное обозначение Коробова $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Как правило, из контекста видно, что речь идет об обозначении Коробова, а не об комплесно-сопряженном числе.

2. Цели и содержание работы

В работе [3] были перечислены несколько актуальных нерешенных проблем теории гиперболической дзета-функции решёток. Одной из таких проблем является **Проблема существования аналитического продолжения.**

Как показано ранее в наших предыдущих работах, для любой декартовой решётки существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки. Более того, для произвольной декартовой решётки получено функциональное уравнение, задающее это аналитическое продолжение в явном виде.

Естественно возникают вопросы о существовании аналитического продолжения для гиперболической дзета-функции в случае, когда решётка не является декартовой. Простейшей такой решёткой является решётка приближений Дирихле квадратичных иррациональностей.

По-видимому, ключом к решению проблемы аналитического продолжения является дальнейшее изучение возможности предельного перехода для гиперболических дзета-функций декартовых решеток в левой полуплоскости по сходящейся последовательности декартовых решёток.

Если такой предел всегда существует, то, переходя в функциональном уравнении слева и справа к пределу, получим функциональное уравнение для предельной решётки. Наиболее перспективно должно быть получение функционального уравнения только в терминах взаимных решёток, так как сходимость последовательности решёток эквивалентна сходимости соответствующих взаимных решёток. Здесь необходимо подчеркнуть, что основная сложность должна быть в случае, когда предельная решётка недекартовая.

В процессе осуществления указанной программы для случая решётки приближений Дирихле квадратичных иррациональностей естественным образом возникло понятие гиперболической дзета-функции Гурвица и вопрос об аналитическом продолжении этой гиперболической дзета-функции, которая тесно связана с гиперболической дзета-функцией одномерной сдвинутой решётки.

В третьем разделе мы рассматриваем несобственные интегралы с полиномами Бернулли, которые естественно возникают в этой проблематике, когда от ряда Дирихле с помощью теоремы Абеля переходят к несобственному интегралу.

В четвертом разделе приводятся все необходимые факты о периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица $\zeta(\alpha;b)$ и о дзета-функции Гурвица второго рода.

В пятом разделе вводится понятие гиперболической дзета-функции Гурвица и развивается соответствующая теория, которая во многом является аналогом теории дзета-функции Гурвица.

На основании полученных результатов в шестом разделе строится функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции сдвинутых диагональных решёток.

Наконец, в заключении обсуждаются полученные результаты и возникающие трудности при реализации намеченной программы.

3. Полиномы Бернулли и несобственные интегралы с ними

Для дальнейшего нам потребуются числа и полиномы Бернулли, сведения о которых мы приведём из [1] и [23].

Числа и полиномы Бернулли определяются равенствами:

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{n+1-k} B_k = 0 \quad (n \geqslant 1),$$

$$B_0(x) = 1, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k} \quad (n \geqslant 1),$$

$$y_\nu(x) = B_\nu(x) - B_\nu \quad (\nu \geqslant 1).$$

Для полиномов Бернулли справедливы следующие важные свойства:

$$B_n(1) - B_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, n \geqslant 0; \\ 1, & \text{если } n = 1; \end{cases} \tag{1}$$

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1); \tag{2}$$

$$\int\limits_0^1 B_n(x)dx = 0 \quad (n \geqslant 1). \tag{3}$$

Нетрудно подсчитать первые пять многочленов $y_\nu(x)$:

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2 - x, \quad y_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad y_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2,$$

$$y_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.$$

Из следующей леммы видно, что периодизированные многочлены Бернулли $y_\nu(\{x\})$ принадлежат классу E_1^ν периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье и имеют непосредственное отношение к теоретико-числовому методу Н. М. Коробова [23].

Лемма 1. *Справедливо разложение в ряд Фурье*

$$y_\nu(\{x\}) = -B_\nu + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}+\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} i^{2\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} \nu!}{(2\pi m)^\nu} e^{2\pi i m x} =$$

$$= \begin{cases} -B_{2\mu} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^{\mu-1}(2\mu)!}{(2\pi m)^{2\mu}} \cos 2\pi m x, & \text{при } \nu = 2\mu, \\ \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{\pi m} \sin 2\pi m x, & \text{при } \nu = 1, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots). \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{2(-1)^{\mu}(2\mu+1)!}{(2\pi m)^{2\mu+1}} \sin 2\pi m x, & \text{при } \nu = 2\mu + 1, \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, для разложения в ряд Фурье

$$y_\nu(\{x\}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C(m) e^{2\pi i m x}, \quad C(m) = \int\limits_0^1 y_\nu(x) e^{-2\pi i m x} dx$$

имеем

$$C(0) = \int\limits_0^1 y_\nu(x) dx = \int\limits_0^1 (B_\nu(x) - B_\nu)\, dx = \int\limits_0^1 B_\nu(x) dx - B_\nu =$$

$$= -B_\nu = \begin{cases} -B_{2\mu}, & \text{при } \nu = 2\mu, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } \nu = 1, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots), \\ 0, & \text{при } \nu = 2\mu + 1, \end{cases}$$

согласно равенству (3) и свойствам чисел Бернулли.

При $m \neq 0$ получим

$$C(m) = \int\limits_0^1 y_\nu(x) e^{-2\pi i m x} dx = \left. \frac{y_\nu(x)}{-2\pi i m} e^{-2\pi i m x} \right|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{y'_\nu(x)}{-2\pi i m} e^{-2\pi i m x} dx =$$

$$= -\frac{\nu}{-2\pi i m} \int\limits_0^1 B_{\nu-1}(x) e^{-2\pi i m x} dx = \ldots = \frac{(-1)^{\nu-1}\nu!}{(-2\pi i m)^{\nu-1}} \left. \frac{B_1(x)}{-2\pi i m} e^{-2\pi i m x} \right|_0^1 -$$

$$-\frac{(-1)^{\nu-1}\nu!}{(-2\pi i m)^\nu} \int\limits_0^1 e^{-2\pi i m x} dx = \frac{(-1)^{\nu-1}\nu!}{(-2\pi i m)^\nu} = \frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}+\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} i^{2\left\{\frac{\nu}{2}\right\}} \nu!}{(2\pi m)^\nu}.$$

□

Рассмотрим для $0 < \beta \leqslant 1$ и $q \geqslant 0$ несобственный интеграл при $\nu = 1, 2, \ldots$

$$I_\nu(\alpha; q, \beta) = \frac{1}{\nu!} \prod_{\mu=0}^{\nu-1} (\alpha + \mu) \cdot \int\limits_q^\infty \frac{y_\nu(\{x\}) dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}, \tag{5}$$

который абсолютно сходится для $\alpha = \sigma + it$ при $\sigma > 1 - \nu$.

Отметим сразу, что $I_\nu(\alpha; q, \beta) = 0$ при $\alpha = 0, -1, \ldots, 2 - \nu$, так как при этих значения α несобственный интеграл абсолютно сходится, а множитель перед интегралом обращается в ноль. Вопрос о значении в точке $\alpha = 1 - \nu$ должен исследоваться отдельно, так как интеграл в определении (5) расходится, а аналитическое продолжение будет построено позже.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$I_\nu(\alpha;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)-$$

$$-\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-2}(\alpha+\mu)\cdot\frac{(\alpha+\nu)B_\nu}{(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\frac{B_\nu\beta}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+I_{\nu+1}(\alpha;q,\beta). \tag{6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\int\limits_0^1 y_\nu(x)dx=-B_\nu \quad (\nu\geqslant 1). \tag{7}$$

Действительно,

$$\int\limits_0^1 y_\nu(x)dx=\int\limits_0^1\left(B_\nu(x)-B_\nu\right)dx=\int\limits_0^1 B_\nu(x)dx-B_\nu=-B_\nu$$

согласно равенству (3).

Далее заметим, что

$$\int\limits_0^x y_\nu(\{t\})dt=[x]\int\limits_0^1 y_\nu(t)dt+\int\limits_0^{\{x\}} y_\nu(t)dt=-[x]B_\nu+\int\limits_0^{\{x\}} y_\nu(t)dt=$$

$$=-xB_\nu+\int\limits_0^{\{x\}}\left(y_\nu(t)+B_\nu\right)dt=-xB_\nu+\left(\frac{B_{\nu+1}(t)}{\nu+1}\right)\Bigg|_0^{\{x\}}=$$

$$=-xB_\nu+\frac{B_{\nu+1}(\{x\})-B_{\nu+1}}{\nu+1}=-xB_\nu+\frac{y_{\nu+1}(\{x\})}{\nu+1}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_q^\infty\frac{y_\nu(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}=\left(\frac{\int\limits_0^x y_\nu(\{t\})dt}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)\Bigg|_q^\infty+(\alpha+\nu)\int\limits_q^\infty\frac{\left(\int\limits_0^x y_\nu(\{t\})dt\right)dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}=$$

$$=\left(\frac{-xB_\nu+\frac{y_{\nu+1}(\{x\})}{\nu+1}}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)\Bigg|_q^\infty+(\alpha+\nu)\int\limits_q^\infty\frac{\left(-xB_\nu+\frac{y_{\nu+1}(\{x\})}{\nu+1}\right)dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}=$$

$$=\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+(\alpha+\nu)B_\nu\left(-\int\limits_q^\infty\frac{dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu}}+\int\limits_q^\infty\frac{\beta dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}\right)+$$

$$+\frac{\alpha+\nu}{\nu+1}\int\limits_q^\infty\frac{y_{\nu+1}(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}=\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+$$

$$+(\alpha+\nu)B_\nu\cdot\left(-\frac{1}{(\alpha+\nu-1)(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+\frac{\beta}{(\alpha+\nu)(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)+$$

$$+\frac{\alpha+\nu}{\nu+1}\int\limits_q^\infty\frac{y_{\nu+1}(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}.$$

Подставляя последний результат в правую часть равенства (5), получим

$$I_\nu(\alpha;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+(\alpha+\nu)B_\nu\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(-\frac{1}{(\alpha+\nu-1)(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+\frac{\beta}{(\alpha+\nu)(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)+\frac{\alpha+\nu}{\nu+1}\int\limits_q^\infty\frac{y_{\nu+1}(\{x\})dx}{(x+\beta)^{\alpha+\nu+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}\right)-\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-2}(\alpha+\mu)\cdot\frac{(\alpha+\nu)B_\nu}{(q+\beta)^{\alpha+\nu-1}}+$$

$$+\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(\alpha+\mu)\cdot\frac{B_\nu\beta}{(q+\beta)^{\alpha+\nu}}+I_{\nu+1}(\alpha;q,\beta)$$

и лемма полностью доказана. □

Замечание 1. *Из доказанной леммы вытекает, что функция $I_\nu(\alpha;q,\beta)$, заданная в правой полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1-\nu)$, последовательно аналитически продолжается на всю комплексную α-плоскость.*

Теперь мы можем ответить на вопрос о величине $I_\nu(1-\nu;q,\beta)$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$I_\nu(1-\nu;q,\beta)=\frac{(-1)^\nu B_\nu}{\nu}. \tag{8}$$

Доказательство. Действительно,

$$I_\nu(1-\nu;q,\beta)=\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(1-\nu+\mu)\cdot\left(\frac{qB_\nu-\frac{y_{\nu+1}(\{q\})}{\nu+1}}{q+\beta}\right)-$$

$$-\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-2}(1-\nu+\mu)\cdot B_\nu+\frac{1}{\nu!}\prod_{\mu=0}^{\nu-1}(1-\nu+\mu)\cdot\frac{B_\nu\beta}{q+\beta}+I_{\nu+1}(1-\nu;q,\beta)=$$

$$=\frac{(-1)^\nu B_\nu}{\nu}.$$

□

4. Периодизированная по параметру b дзета-функция Гурвица и дзета-функция Гурвица второго рода

В дальнейшем будет использоваться периодизированная по вещественному параметру b дзета-функция Гурвица

$$\zeta^*(\alpha;b)=\sum_{0<n+b}(n+b)^{-\alpha}=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}, & \text{при } \{b\}=0,\\ \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+\{b\})^{-\alpha}, & \text{при } \{b\}>0\end{cases},\quad(\sigma>1). \tag{9}$$

Кроме того, определим дзета-функцию Гурвица второго рода $\zeta^{**}(\alpha;b)$ равенством

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{\alpha}},\quad (\sigma>1). \tag{10}$$

По теореме Абеля (см. [32] стр. 106) получаем интегральное представление для периодизированной дзета-функции Гурвица ($\sigma>1$):

$$\zeta^{*}(\alpha;b)=\begin{cases}\alpha\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}=0,\\[2ex] \alpha\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=\alpha\int\limits_{\{b\}}^{\infty}\frac{[x+1-\{b\}]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}\neq 0\end{cases} \tag{11}$$

и интегральное представление для дзета-функции Гурвица второго рода ($\sigma>>1$):

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\begin{cases}\alpha\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}=0,\\[2ex] \alpha\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\,dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}, & \text{при } \{b\}\neq 0,\end{cases} \tag{12}$$

которое получается из выражения для сумматорной функции при $\{b\}>0$

$$A(x)=\sum_{n=1}^{[x]}\cos(2\pi nb)=\frac{1}{\sin(\pi b)}\sum_{n=1}^{[x]}\cos(2\pi nb)\sin(\pi b)=$$
$$=\frac{1}{2\sin(\pi b)}\sum_{n=1}^{[x]}(\sin(\pi(2n+1)b)-\sin(\pi(2n-1)b))=\frac{\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b)}{2\sin(\pi b)}.$$

4.1. Аналитическое продолжение периодизированной по параметру b дзета-функция Гурвица

Нетрудно выписать различные явные формулы для аналитического продолжения на всю комплексную плоскость кроме точки $\alpha=1$ периодизированной дзета-функции Гурвица. В этой точке при всех вещественных значениях b периодизированная дзета-функции Гурвица имеет полюс первого порядка с вычетом равным 1.

Приведенные ниже формулы покрывают всю комплексную плоскость, задавая явный вид аналитического продолжения $\zeta^{*}(\alpha;b)$.

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$\zeta^{*}(\alpha;b)=$$

$$
=\begin{cases}
\sum\limits_{0<n+b}(n+b)^{-\alpha}, & \sigma>1,\\[2ex]
\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1), & {\scriptstyle \{b\}=0, \atop \sigma>-1},\\[2ex]
\dfrac{1}{\{b\}^\alpha}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\alpha-1}+(1-\{b\})\left(1-\dfrac{\alpha\{b\}}{2}\right)-I_2\left(\alpha;1-\{b\},\{b\}\right), & {\scriptstyle \{b\}\neq 0, \atop \sigma>-1},\\[2ex]
2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}+\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}\right), & \sigma<0.
\end{cases} \tag{13}
$$

Доказательство. Действительно, первое равенство при $\sigma>1$ совпадает с определением периодизированной по вещественному параметру b дзета-функции Гурвица (9).

Во втором случае из первой формулы в равенстве (11) и леммы 2 (стр. 77) имеем при $b\in\mathbb{Z}$

$$
\zeta^*(\alpha;b)=\alpha\int\limits_1^\infty\frac{[x]dx}{x^{\alpha+1}}=\alpha\int\limits_1^\infty\frac{(x-\{x\})dx}{x^{\alpha+1}}=\frac{\alpha}{\alpha-1}-\alpha\int\limits_1^\infty\frac{\{x\}dx}{x^{\alpha+1}}=
$$

$$
=\frac{\alpha}{\alpha-1}-I_1(\alpha;0,1)=\frac{\alpha}{\alpha-1}-\alpha\cdot\left(\frac{0\cdot B_1-\frac{y_2(0)}{2}}{1}\right)+
$$

$$
+\frac{(\alpha+1)B_1}{1}-\alpha\cdot\frac{B_1}{1}-I_2(\alpha;0,1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1),
$$

что доказывает второй случай равенства (13).

Аналогично, в третьем случае из второй формулы в равенстве (11) имеем при $b\notin\mathbb{Z}$

$$
\zeta^*(\alpha;b)=\alpha\int\limits_0^\infty\frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=\alpha\int\limits_0^{1-\{b\}}\frac{dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}+\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{([x]+1)dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=
$$

$$
=\frac{1}{\{b\}^\alpha}-1+\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{(x+1-\{x\})dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=\frac{1}{\{b\}^\alpha}-1+\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{dx}{(x+\{b\})^{\alpha}}+
$$

$$
+\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{(1-\{b\})dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}-\alpha\int\limits_{1-\{b\}}^\infty\frac{\{x\}dx}{(x+\{b\})^{\alpha+1}}=
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\{b\}^\alpha} - 1 + \frac{\alpha}{\alpha-1} + 1 - \{b\} - I_1(\alpha, 1-\{b\}, \{b\}) = \\
&= \frac{1}{\{b\}^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} + 1 - \{b\} - \left(\alpha \cdot \frac{(1-\{b\})B_1 - \frac{y_2(\{1-\{b\}\})}{2}}{1} - \right. \\
&\left. - \frac{(\alpha+1)B_1}{1} + \alpha \cdot \frac{B_1 \cdot \{b\}}{1} + I_2(\alpha; 1-\{b\}, \{b\}) \right) = \\
&= \frac{1}{\{b\}^\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha-1} + (1-\{b\})\left(1 - \frac{\alpha\{b\}\}}{2}\right) - I_2\left(\alpha; 1-\{b\}, \{b\}\right),
\end{aligned}
$$

что доказывает третий случай равенства (13).

Наконец, четвертый случай следует из функционального уравнения для дзета-функции Гурвица (см. [30], стр. 48), так как

$$
\zeta^*(\alpha; b) = \begin{cases} \zeta(\alpha; \{b\}), & \text{при } \{b\} > 0; \\ \zeta(\alpha) = \zeta(\alpha; 1), & \text{при } \{b\} = 0 \end{cases}.
$$

□

4.2. Множитель Римана

Через

$$
M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \tag{14}
$$

будем обозначать множитель из функционального уравнения для дзета-функции Римана (См. [30], стр. 19)

$$
\zeta(\alpha) = M(\alpha)\zeta(1-\alpha).
$$

Легко проверить, что

$$
M(\alpha) \cdot M(1-\alpha) = 1. \tag{15}
$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
M(\alpha) \cdot M(1-\alpha) &= \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} \cdot \frac{2\Gamma(\alpha)}{(2\pi)^{\alpha}} \sin\frac{\pi(1-\alpha)}{2} = \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} \sin\pi\alpha = 1
\end{aligned}
$$

согласно формулы дополнения для гамма-функции (см. [31], стр. 19).

Множитель $M(\alpha)$ будем называть *множителем Римана*, а формулу (15) — *формулой дополнения для множителя Римана*.

Из свойств гамма-функции, определения (14) и формулы дополнения (15) следует, что множитель Римана — аналитическая функция для любого комплексного α, кроме точек $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ — нечетных натуральных значений, где он имеет полюс первого порядка.

Действительно, при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется полюс первого порядка у гамма-функции $\Gamma(1-\alpha)$ и это все полюса, а множитель $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ имеет значения

$$
\sin\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^m, & \text{при } n = 1+2m,\ m = 0, 1, 2, \ldots. \\ 0, & \text{при } n = 2m,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}
$$

Поэтому при нечетных натуральных значениях $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$ множитель Римана $M(\alpha)$ имеет полюса с вычетом

При натуральных четных значений $\alpha = 2n$, $(n \in \mathbb{N})$ имеем:

$$M(\alpha) = \lim_{\alpha\to 2n} \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \lim_{\alpha\to 2n} \Gamma(1-\alpha)(1-\alpha-(1-2n))\cdot$$
$$\cdot \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)} \lim_{\alpha\to 2n} \frac{\pi(\frac{\alpha}{2}-n)}{2n-\alpha} = \frac{2}{(2\pi)^{1-2n}} \cdot \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2\cdot(2n-1)!}.$$

По свойствам гаммы функции $\Gamma(1+2n) = (2n)!$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Поэтому в четных отрицательных значениях α множитель Римана имеет нули первого порядка

$$M(-2n) = \frac{2\Gamma(1+2n)}{(2\pi)^{1+2n}} \sin(-\pi n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}. \tag{16}$$

Так как гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то нули множителя Римана являются нулями функции $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ и формулой (16) исчерпываются все нули множителя Римана.

Наконец, в точках $\alpha = -1, -3, -5, \ldots$ имеем:

$$M(\alpha) = M(1-2n) = \frac{2\Gamma(2n)}{(2\pi)^{2n}} \sin\frac{\pi(1-2n)}{2} = \frac{2(2n-1)!(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

и

$$M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Следующая лемма является своеобразным функциональным уравнением для периодизированной по параметру b дзета-функции Гурвица и дзета-функции Гурвица второго рода.

Лемма 5. *Для $0 < b < 1$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо равенство*

$$\zeta^*(\alpha; b) + \zeta^*(\alpha; 1-b) = 2M(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha; b). \tag{17}$$

Доказательство. Действительно, при $\sigma < 0$ согласно (13) имеем

$$\zeta^*(\alpha; b) + \zeta^*(\alpha; 1-b) =$$
$$= 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} + \cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nb}{n^{1-\alpha}}\right) +$$
$$+ 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n(1-b)}{n^{1-\alpha}} + \cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi n(1-b)}{n^{1-\alpha}}\right) =$$
$$= 4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nb}{n^{1-\alpha}} = 2M(\alpha)\zeta^{**}(1-\alpha; b)$$

что и требовалось доказать. □

4.3. Аналитическое продолжение дзета-функции Гурвица второго рода

Теперь нетрудно доказать аналог леммы 4 (стр. 79) для дзета-функции Гурвица второго рода.

Лемма 6. *Справедливы равенства*

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi nb}{n^{\alpha}}, & \sigma>1,\\[2ex] \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\alpha-1}-I_2(\alpha;0,1), & {\scriptstyle \{b\}=0,\atop \sigma>-1},\\[2ex] \alpha(\alpha+1)\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-\dfrac{1}{2}, & {\scriptstyle \{b\}\neq0,\atop \sigma>-1},\\[2ex] \dfrac{M(\alpha)}{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\dfrac{1}{\overline{n+b}^{\,1-\alpha}}=\dfrac{M(\alpha)}{2}\left(\zeta^*(1-\alpha;b)+\zeta^*(1-\alpha;1-b)\right), & {\scriptstyle \{b\}\neq0,\atop \sigma<0},\\ M(\alpha)\zeta(1-\alpha), & {\scriptstyle \{b\}=0,\atop \sigma<0}.\end{cases} \tag{18}$$

Доказательство. Действительно, первое равенство при $\sigma>1$ совпадает с определением дзета-функции Гурвица второго рода (10) (стр. 79).

Второй случай совпадает со вторым случаем равенства (13) (стр. 80), так как при $\{b\}=0$ имеем равенство $\zeta^{**}(\alpha;b)=\zeta^{*}(\alpha;b)$.

В третьем случае воспользуемся вторым интегральным представлением (12) (стр. 79) для дзета-функции Гурвица второго рода, получим, интегрируя по частям,

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\alpha\int\limits_1^{\infty}\frac{(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\,dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}=$$

$$=\alpha\left.\frac{f(x)}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+1}}\right|_1^{\infty}+\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^{\infty}\frac{f(x)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}=\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^{\infty}\frac{f(x)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}},$$

где

$$f(x)=\int\limits_1^{x}(\sin(\pi(2[t]+1)b)-\sin(\pi b))\,dt=\sum_{k=1}^{[x]-1}\int\limits_k^{k+1}(\sin(\pi(2k+1)b)-\sin(\pi b))\,dt+$$

$$+\int\limits_{[x]}^{x}(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\,dt=\sum_{k=1}^{[x]-1}(\sin(\pi(2k+1)b)-\sin(\pi b))+$$

$$+(\sin(\pi(2[x]+1)b)-\sin(\pi b))\{x\}=\sum_{k=1}^{[x]-1}\sin(\pi(2k+1)b)-$$

$$-([x]-1+\{x\})\sin(\pi b)+\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}=\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}-$$

$$-(x-1)\sin(\pi b)+\frac{1}{2\sin(\pi b)}\sum_{k=1}^{[x]-1}(\cos(\pi(2k+1)b-\pi b)-\cos(\pi(2k+1)b+\pi b))=$$

$$=\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}-(x-1)\sin(\pi b)+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^\infty\frac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-$$

$$-\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^\infty\frac{(x-1)dx}{2x^{\alpha+2}}=$$

$$=\alpha(\alpha+1)\int\limits_1^\infty\frac{\left(\sin(\pi(2[x]+1)b)\{x\}+\frac{\cos(2\pi b)-\cos(2\pi[x]b)}{2\sin(\pi b)}\right)dx}{2\sin(\pi b)x^{\alpha+2}}-\frac{1}{2},$$

что доказывает третий случай равенства (18).

Наконец, четвертый случай следует из формулы (17) и формулы дополнения для множителя Римана, а пятый случай совпадает с функциональным уравнением для дзета-функции Римана. □

Замечание 2. *Из лемм 5 и 6 следует, что для любых $\alpha\neq1$ справедливы равенства*

$$\zeta^{**}(\alpha;b)=\begin{cases}\zeta(\alpha), & \text{при } \{b\}=0;\\ \frac{M(\alpha)}{2}\left(\zeta^*(1-\alpha;b)+\zeta^*(1-\alpha;1-b)\right), & \text{при } \{b\}>0.\end{cases}$$

Лемма 7. *Справедливо равенство*

$$\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right)=2\zeta(\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right). \qquad (19)$$

Доказательство. Действительно, в правой полуплоскости $\sigma>1$ имеем:

$$\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}\left(\sum_{n=0}^\infty\left(n+\frac{l}{q}\right)^{-\alpha}+\sum_{n=0}^\infty\left(n+1-\frac{l}{q}\right)^{-\alpha}\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q-1}\left(\sum_{n=0}^\infty(qn+l)^{-\alpha}+\sum_{n=0}^\infty(qn+q-l)^{-\alpha}\right)=$$

$$=2\sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}-2\sum_{n=1}^\infty(qn)^{-\alpha}=2\zeta(\alpha)(1-q^{-\alpha}).$$

Переходя к аналитическому продолжению, получим утверждение для любого $\alpha\neq1$.

Проверим утверждение для левой полуплоскости $\sigma<0$. По лемме 5 имеем

$$\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{q-1}q^{-\alpha}4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos 2\pi n\frac{l}{q}}{n^{1-\alpha}}=$$

$$=q^{-\alpha}4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{1-\alpha}}\sum_{l=1}^{q-1}\cos 2\pi n\frac{l}{q}.$$

Так как

$$\sum_{l=1}^{q-1}\cos 2\pi n\frac{l}{q} = -1+\sum_{l=0}^{q-1}\frac{e^{2\pi i\frac{nl}{q}}+e^{-2\pi i\frac{nl}{q}}}{2} = q\delta_q(n)-1,$$

то

$$\sum_{l=1}^{q-1} q^{-\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha;\frac{l}{q}\right)+\zeta^*\left(\alpha;1-\frac{l}{q}\right)\right) =$$

$$= q^{-\alpha}4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q}{(qn)^{1-\alpha}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) =$$

$$= 4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\zeta(1-\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right) = 2\zeta(\alpha)\left(1-q^{-\alpha}\right)$$

что и требовалось доказать. □

5. Гиперболическая дзета-функция Гурвица

Определение 1. *Назовём гиперболической дзета-функцией Гурвица при $d\neq 0$, $d,b\in\mathbb{R}$ функцию $\zeta_H(\alpha;d,b)$, заданную в правой α-полуплоскости $\alpha = = \sigma+it$ $(\sigma>1)$ равенством* [2]

$$\zeta_H(\alpha;d,b) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha}. \tag{20}$$

Если мы рассмотрим сдвинутую одномерную решетку $\Lambda(d,b) = d\mathbb{Z}+b$, то для гиперболической дзета-функции этой сдвинутой решетки мы получим

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases}\zeta_H(\alpha;d,b), & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\}\neq 0,\\ \zeta_H(\alpha;d,b)-1, & \text{при } \left\{\frac{b}{d}\right\}=0.\end{cases} \tag{21}$$

Кроме этого нам потребуется дзета-функция сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$, которая задается равенством

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = {\sum_{m\in\mathbb{Z}}}' |dm+b|^{-\alpha}, \quad \sigma>1, \tag{22}$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена точка m, для которой $dm+b=0$, и аналитическая функция $f_1(\alpha;d,b)$, задаваемая равенством

$$f_1(\alpha;d,b) = {\sum_{-1<dm+b<1}}'\left(1-|dm+b|^{-\alpha}\right). \tag{23}$$

Ясно, что справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha) = \zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)+f_1(\alpha;d,b). \tag{24}$$

Будем как обычно через $\|b\| = \min(\{b\},1-\{b\})$ обозначать расстояние до ближайшего целого. Как хорошо известно, функция $\|b\|$ — чётная: $\|b\| = \|-b\|$.

В работе [16] рассматривалась аналитическая по α функция $f(\alpha,d)$, заданая равенством

$$f(\alpha,d) = \begin{cases}0, & \text{при } d\geqslant 1,\\ \sum\limits_{1\leqslant|m|\leqslant\left[\frac{1}{d}\right]}\left(1-\dfrac{1}{|dm|^{\alpha}}\right), & \text{при } 0<d<1.\end{cases} \tag{25}$$

[2]Здесь и далее для вещественных m используем обозначение $\overline{m} = \max(1,|m|)$.

Ясно, что
$$f_1(\alpha; d, 0) = f(\alpha, d). \tag{26}$$
Положим
$$f_1^*(\alpha; d, b) = \begin{cases} f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| \neq 0; \\ f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) + 1, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Лемма 8. *Для гиперболической дзета-функции Гурвица $\zeta_H(\alpha; d, b)$ в правой α-полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ справедливы равенства*
$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \zeta_H\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) =$$
$$= \zeta\left(\Lambda\left(|d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\Big|\alpha\right) + f_1^*\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{28}$$

Доказательство. Действительно, при $\left\{\frac{b}{d}\right\} = 0$ имеем $\left[\frac{b}{d}\right] = \frac{b}{d}$ и
$$\zeta_H(\alpha; d, b) = 1 + \sum_{m=1-\frac{b}{d}}^{\infty} \overline{d\left(m + \frac{b}{d}\right)}^{-\alpha} + \sum_{m=-\infty}^{-1-\frac{b}{d}} \overline{d\left(m + \frac{b}{d}\right)}^{-\alpha} =$$
$$= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \overline{|d|m}^{-\alpha} = \zeta_H\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$$
и в этом случае первое равенство доказано.

Пусть теперь $\left\{\frac{b}{d}\right\} \neq 0$, тогда
$$\zeta_H(\alpha; d, b) = \sum_{m=-\left[\frac{b}{d}\right]}^{\infty} \overline{d\left(m + \frac{b}{d}\right)}^{-\alpha} + \sum_{m=-\infty}^{-1-\left[\frac{b}{d}\right]} \overline{d\left(m + \frac{b}{d}\right)}^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{|d|\left(m + \left\{\frac{b}{d}\right\}\right)}^{-\alpha} + \sum_{m=0}^{\infty} \overline{|d|\left(m + 1 - \left\{\frac{b}{d}\right\}\right)}^{-\alpha} = \zeta_H\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$$
и первое равенство полностью доказано.

Аналогично первому равенству доказывается, что
$$f_1(\alpha; d, b) = f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{29}$$
Действительно, при $d < 0$ имеем
$$f_1(\alpha; d, b) = \sum_{-1<dm+b<1}' \left(1 - |dm + b|^{-\alpha}\right) = \sum_{-\frac{1}{d}>m+\frac{b}{d}>\frac{1}{d}}' \left(1 - \left(|d|\left|m + \frac{b}{d}\right|\right)^{-\alpha}\right) =$$
$$= \sum_{-\left|\frac{1}{d}\right|<m+\left\|\frac{b}{d}\right\|<\left|\frac{1}{d}\right|}' \left(1 - \left(|d|\left|m + \left\|\frac{b}{d}\right\|\right|\right)^{-\alpha}\right) = f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right). \tag{30}$$
Отсюда и из равенств (21), (24) и (27) следует справедливость второго равенства в формуле (28). □

Лемма 9. *Справедливо равенство*

$$f_1\left(\alpha; |d|, |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } |d| \geqslant 1, \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\ \sum\limits_{1\leqslant|m|\leqslant\left[\frac{1}{|d|}\right]} \left(1 - \dfrac{1}{|dm|^\alpha}\right), & \text{при } 0 < |d| < 1, \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\ 0, & \text{при } |d| \geqslant 2, \left\|\frac{b}{d}\right\| \geqslant \frac{1}{|d|}; \\ 1 - \left(|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } |d| \geqslant 2, 0 < \left\|\frac{b}{d}\right\| < \frac{1}{|d|}; \\ 2 - \left(|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha} - \left(|d| - |d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1\leqslant|d|<2, \\ \left\|\frac{b}{d}\right\| > \left\|\frac{1}{|d|}\right\| \end{cases}; \\ 1 - \left(|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)^{-\alpha}, & \text{при } \begin{cases} 1\leqslant|d|<2, \\ 0<\left\|\frac{b}{d}\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{|d|}\right\| \end{cases}; \\ \sum\limits_{m=-\left[\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]}^{\left[\left|\frac{1}{d}\right|-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right]} \left(1 - \left(|d|\left|m + \left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right|\right)^{-\alpha}\right), & \text{при } 0 < |d| < 1, 0 < \left\|\frac{b}{d}\right\|. \end{cases} \quad (31)$$

Доказательство. При $\left\|\frac{b}{d}\right\| = 0$ первый и второй случай в равенстве (31) следует из (29), (26) и (25).

При $\left\|\frac{b}{d}\right\| \geqslant \frac{1}{|d|}$ и $|d| \geqslant 2$ область суммирования в формуле (30) не содержит целых точек, поэтому сумма равна 0 и третий случай в равенстве (31) доказан.

При $0 < \left\|\frac{b}{d}\right\| < \frac{1}{|d|}$ и $|d| \geqslant 2$ область суммирования в формуле (30) содержит только одну целую точку $m = 0$, поэтому сумма содержит только одно слагаемое и четвертый случай в равенстве (31) доказан.

При $\left\|\frac{b}{d}\right\| > \left\|\frac{1}{|d|}\right\|$ и $1 \leqslant |d| < 2$ область суммирования в формуле (30) содержит только две целых точки $m = 0$ и $m = -1$, поэтому сумма содержит только два слагаемых и пятый случай в равенстве (31) доказан.

При $0 < \left\|\frac{b}{d}\right\| \leqslant \left\|\frac{1}{|d|}\right\|$ и $1 \leqslant |d| < 2$ область суммирования в формуле (30) также как и в четвертом случае содержит только одну целую точку $m = 0$, поэтому сумма содержит только одно слагаемое и шестой случай в равенстве (31) доказан.

Наконец, при $0 < \left\|\frac{b}{d}\right\|$ и $0 < |d| < 1$ область суммирования $-\left|\frac{1}{d}\right| < m + \left\|\frac{b}{d}\right\| < \left|\frac{1}{d}\right|$ в формуле (30) можно записать в виде $-\left[\frac{1}{|d|} + \left\|\frac{b}{d}\right\|\right] \leqslant m \leqslant \left[\left|\frac{1}{d}\right| - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right]$, поэтому сумма преобретает указанный вид и седьмой случай в равенстве (31) доказан. □

5.1. Дзета-функция сдвинутой решетки

Для получения функционального уравнения для дзета-функции сдвинутой решетки $\Lambda(d, b)$ нам еще потребуется дзета-функция второго рода сдвинутой решетки $\zeta^*(\Lambda(d, b)|\alpha)$, которая задается равенством

$$\zeta^*(\Lambda(d, b)|\alpha) = \begin{cases} \zeta(\Lambda(d, b)|\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0, \\ \sideset{}{'}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos\left(2\pi m \frac{b}{d}\right)}{|dm|^\alpha}, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| > 0. \end{cases} \quad (32)$$

Взаимную сдвинутую решётку определим равенством $\Lambda^*(d,b) = \Lambda\left(\frac{1}{d}, \frac{b}{d^2}\right)$. Нетрудно видеть, что $\Lambda^{**}(d,b) = \Lambda^*\left(\frac{1}{d}, \frac{b}{d^2}\right) = \Lambda(d,b)$.

Лемма 10. *Для дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$ на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, где полюс первого порядка, справедливо равенство*

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \dfrac{2\zeta(\alpha)}{|d|^\alpha}, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\ \dfrac{1}{|d|^\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha; \left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right) + \zeta^*\left(\alpha; 1 - \left\|\dfrac{b}{d}\right\|\right)\right), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| > 0. \end{cases} \tag{33}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала правую полуплоскость $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$.

При $\left\|\frac{b}{d}\right\| = 0$ согласно равенству (22) (стр. 85) имеем

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' |dm+b|^{-\alpha} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m + \frac{b}{d}\right|\right)^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m + \left\{\frac{b}{d}\right\}\right|\right)^{-\alpha} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' (|d|\,|m|)^{-\alpha} = \frac{2\zeta(\alpha)}{|d|^\alpha}$$

и первый случай равенства (33) для правой полуплоскости доказан.

Аналогично, при $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$ имеем

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' |dm+b|^{-\alpha} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m + \frac{b}{d}\right|\right)^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \left(|d|\left|m + \left\{\frac{b}{d}\right\}\right|\right)^{-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(|d|\left(m + \left\{\frac{b}{d}\right\}\right)\right)^{-\alpha} +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty}{}' \left(|d|\left(m + 1 - \left\{\frac{b}{d}\right\}\right)\right)^{-\alpha} = \frac{1}{|d|^\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha; \left\|\frac{b}{d}\right\|\right) + \zeta^*\left(\alpha; 1 - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\right)$$

и второй случай равенства (33) для правой полуплоскости доказан.

Так как все функции, входящие в правую часть равенства (33), аналитичны на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, где у двух функций полюс первого порядка, то, применяя принцип аналитического продолжения, получим справедливость равенства (33) на всей α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$. $\square$

Лемма 11. *Для дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha)$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \dfrac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0; \\ \dfrac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| > 0. \end{cases} \tag{34}$$

Доказательство. Действительно, если $\left\|\frac{b}{d}\right\| = 0$, то $\Lambda(d,b) = \Lambda(d)$, $\Lambda^*(d,b) = \Lambda^*(d) = \Lambda\left(\frac{1}{d}\right) = \Lambda\left(\frac{1}{d}, \frac{b}{d^2}\right)$ и согласно лемме 10 и функциональному уравнению для дзета-функции Римана

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \frac{2\zeta(\alpha)}{|d|^\alpha} = \frac{2M(\alpha)\zeta(1-\alpha)}{|d|^\alpha} =$$
$$= \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)} \sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' \frac{1}{\left|\frac{m}{d} + \frac{b}{d^2}\right|^{1-\alpha}} = \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha)$$

и первый случай равенства (34) доказан.

Пусть теперь $\left\|\frac{b}{d}\right\| > 0$, тогда по лемме 10 имеем:

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \frac{1}{|d|^\alpha}\left(\zeta^*\left(\alpha; \left\|\frac{b}{d}\right\|\right) + \zeta^*\left(\alpha; 1 - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\right).$$

Применим функциональное уравнение (5) (стр. 82) к правой части, получим

$$\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha) = \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha}\zeta^{**}\left(1-\alpha; \left\|\frac{b}{d}\right\|\right) = \frac{M(\alpha)}{|d|^\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{|m|^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\cos\left(2\pi\frac{m\frac{b}{d^2}}{\frac{1}{d}}\right)}{\left|\frac{m}{d}\right|^{1-\alpha}} = \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha).$$

□

Рассмотрим теперь двумерную сдвинутую решётку $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) = \Lambda(d_1,b_1)\times\Lambda(d_2,b_2) = d_1\mathbb{Z}\times d_2\mathbb{Z} + (b_1,b_2)$. Её дзета-функция определяется естественным образом:

$$\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha) = \zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)\cdot\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha).$$

Аналогично определяется дзета-функция второго рода сдвинутой решетки:

$$\zeta^*(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha) = \zeta^*(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)\cdot\zeta^*(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha).$$

Нетрудно видеть, что если положить $\Lambda^*(d_1,b_1,d_2,b_2) = \Lambda^*(d_1,b_1)\times\Lambda^*(d_2,b_2)$, то

$$\Lambda^{**}(d_1,b_1,d_2,b_2) = \Lambda^*\left(\frac{1}{d_1},\frac{b_1}{d_1^2},\frac{1}{d_2},\frac{b_2}{d_2^2}\right) = \Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2).$$

Лемма 12. *Для дзета-функции сдвинутой решетки $\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)|\alpha)$ в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)|\alpha) = \frac{M^2(\alpha)}{\det\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)}\zeta^*(\Lambda^*(d_1,b_1,d_2,b_2)|1-\alpha). \tag{35}$$

Доказательство. Действительно, так как $\det\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2) = \det\Lambda(d_1,b_1)\cdot\det\Lambda(d_2,b_2)$, то утверждение леммы непосредственно следует из определения дзета-функции сдвинутой решётки и леммы 11. □

5.2. Интегральные представления

Обозначим через $n(d,b)$ количество решений системы неравенств

$$-1 \leqslant dm + b \leqslant 1$$

в целых числах m, а через $n^*(d,b)$ — количество решений системы неравенств

$$-1 < dm + b < 1.$$

Нетрудно видеть, что $n(d,b) = n\left(|d|, |d|\cdot\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$, $n^*(d,b) = n^*\left(|d|, |d|\cdot\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)$, кроме того

$$n^*(d,b) = \begin{cases} n(d,b), & \text{при } \frac{1-b}{d}, \frac{1+b}{d} \notin \mathbb{Z};\\ n(d,b)-1, & \text{при } \frac{1-b}{d} \in \mathbb{Z},\ \frac{1+b}{d}, \frac{2}{d} \notin \mathbb{Z};\\ n(d,b)-1, & \text{при } \frac{1-b}{d}, \frac{2}{d} \notin \mathbb{Z},\ \frac{1+b}{d} \in \mathbb{Z};\\ n(d,b)-2, & \text{при } \frac{1-b}{d}, \frac{1+b}{d}, \frac{2}{d} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Рассмотрим шесть положительных чисел

$$\omega_1=\omega_1(d,b)=1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\},\quad \omega_2=\omega_2(d,b)=1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\},$$
$$\omega_1^*=\omega_1^*(d,b)=\frac{1}{|d|}+\left\{\left\|\frac{b}{d}\right\|-\frac{1}{|d|}\right\},\quad \omega_2^*=\omega_2^*(d,b)=\frac{1}{|d|}+\left\{-\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\},$$
$$\omega_1^{**}=\begin{cases}\{\omega_1^*(d,b)\}, & \text{при } \{\omega_1^*(d,b)\}>0;\\ 1, & \text{при } \{\omega_1^*(d,b)\}=0;\end{cases},\quad \omega_2^{**}=\begin{cases}\{\omega_2^*(d,b)\}, & \text{при } \{\omega_2^*(d,b)\}>0;\\ 1, & \text{при } \{\omega_2^*(d,b)\}=0.\end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что

$$\omega_1=\begin{cases}\omega_1^*, & \text{при } \left\{\frac{1}{|d|}\right\}\neq\left\|\frac{b}{d}\right\|;\\ \\ \omega_1^*+1, & \text{при } \left\{\frac{1}{|d|}\right\}=\left\|\frac{b}{d}\right\|;\end{cases},\quad \omega_2=\begin{cases}\omega_2^*, & \text{при } \left\{1-\frac{1}{|d|}\right\}\neq\left\|\frac{b}{d}\right\|;\\ \\ \omega_2^*+1, & \text{при } \left\{1-\frac{1}{|d|}\right\}=\left\|\frac{b}{d}\right\|;\end{cases}$$

Теорема 1. *В α-полуплоскости $\alpha=\sigma+it$, $\sigma>1$ справедливы тождества*

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha;d,b)=n(d,b)\Gamma(\alpha)+$$
$$+|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}\right)dx= \tag{36}$$
$$=n^*(d,b)\Gamma(\alpha)+\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}+\left\{\left\|\frac{b}{d}\right\|-\frac{1}{|d|}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(\frac{1}{|d|}+\left\{-\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}\right)dx= \tag{37}$$
$$=f_1^*(\alpha;d,b)\Gamma(\alpha)+\begin{cases}\dfrac{1}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}\left(e^{-\left\|\frac{b}{d}\right\|\cdot x}+e^{-\left(1-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\cdot x}\right)}{1-e^{-x}}dx, & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0;\\ \dfrac{2}{|d|^\alpha}\displaystyle\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}e^{-x}dx, & \textit{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0.\end{cases} \tag{38}$$

Доказательство. Без ограничения общности согласно лемме 8 (стр. 86) можно считать $d>0$, $0\leqslant b\leqslant\frac{d}{2}$.

Известно, что при $\sigma>0$ справедливо интегральное представление для гамма функции

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Заменим теперь в этом интеграле переменную x на $\overline{dm+b}\cdot x$ [3]. Эта замена даст равенство:

$$\Gamma(\alpha)\left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha}=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\overline{dm+b}\cdot x}dx.$$

[3]Здесь и далее $\overline{dm+b}=\max(1,|dm+b|)$

Суммируя по всем целым $m \in \mathbb{Z}$, получим

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha; d, b) = \Gamma(\alpha) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\overline{dm+b}\right)^{-\alpha} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=-N}^{N} \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\overline{dm+b}\cdot x} dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \left(\sum_{m=-N}^{N} e^{-\overline{dm+b}\cdot x}\right) dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} S(N,d,b) dx,$$

где

$$S(N,d,b) = \sum_{m=-N}^{N} e^{-\overline{dm+b}\cdot x}.$$

Пусть $N_1 = \left[\frac{1-b}{d}\right]$, $N_2 = \left[\frac{1+b}{d}\right]$, тогда $n(d,b) = N_1 + N_2 + 1$. Аналогично, положим $N_1^* = -\left[\frac{b-1}{d}\right] - 1$, $N_2^* = -\left[-\frac{1+b}{d}\right] - 1$, тогда $n^*(d,b) = N_1^* + N_2^* + 1$ и справедливы неравенства $N_1^* \leqslant N_1$, $N_2^* \leqslant N_2$ и

$$N_1^* = \begin{cases} N_1, & \text{при } \left\{\frac{1-b}{d}\right\} > 0; \\ N_1 - 1, & \text{при } \left\{\frac{1-b}{d}\right\} = 0, \end{cases} \qquad N_2^* = \begin{cases} N_2, & \text{при } \left\{\frac{1+b}{d}\right\} > 0; \\ N_2 - 1, & \text{при } \left\{\frac{1+b}{d}\right\} = 0; \end{cases}.$$

Нетрудно видеть, что при $N > \max(N_1, N_2)$

$$S(N,d,b) = \sum_{m=-N}^{N} e^{-\overline{dm+b}\cdot x} = \sum_{m=N_1+1}^{N} e^{-|dm+b|\cdot x} + \sum_{m=-N_2}^{N_1} e^{-x} + \sum_{m=-N}^{-(N_2+1)} e^{-|dm+b|\cdot x} =$$

$$= (N_1 + N_2 + 1)e^{-x} + \sum_{m=1}^{N-N_1} e^{-(dm+dN_1+b)\cdot x} + \sum_{m=1}^{N-N_2} e^{-(dm+dN_2-b)\cdot x} =$$

$$= (N_1 + N_2 + 1)e^{-x} + \sum_{m=1}^{N-N_1} e^{-\left(dm+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} + \sum_{m=1}^{N-N_2} e^{-\left(dm+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x} =$$

$$= (N_1 + N_2 + 1)e^{-x} + \frac{e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} - e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}} +$$

$$+ \frac{e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x} - e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}.$$

Поэтому

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha; d, b) = \Gamma(\alpha)(N_1 + N_2 + 1) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \frac{e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} + e^{-\left(d+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}} dx -$$

$$- \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} \frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x} + e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}} dx =$$

$$= n(d,b)\Gamma(\alpha) + |d|^{-\alpha} \int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}} \left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x} + e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}-\left\{\frac{1}{|d|}+\left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\cdot x}\right) dx,$$

так как

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx=0$$

в силу оценок

$$\left|x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant x^{\sigma-2}\left(e^{-\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}\right)\frac{x}{e^{dx}-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{d}\cdot x^{\sigma-2}\left(e^{-\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}\right);$$

$$\left|\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{e^{-\left(d(N-N_1+1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2+1)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}}{1-e^{-dx}}dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^\infty\frac{1}{d}\cdot x^{\sigma-2}\left(e^{-\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)\cdot x}+e^{-\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)\cdot x}\right)dx=\frac{1}{d}\cdot$$

$$\cdot\left(\left(d(N-N_1)+1-d\left\{\frac{1-b}{d}\right\}\right)^{1-\sigma}+\left(d(N-N_2)+1-d\left\{\frac{1+b}{d}\right\}\right)^{1-\sigma}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^\infty x^{\sigma-2}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(\sigma-1)}{d}\cdot(dN)^{1-\sigma}\cdot$$

$$\cdot\left(\left(1-\frac{N_1}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1-b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}+\left(1-\frac{N_2}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1+b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}\right),$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\Gamma(\sigma-1)}{d}\cdot(dN)^{1-\sigma}=0,$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\left(1-\frac{N_1}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1-b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}+\left(1-\frac{N_2}{N}+\frac{1}{dN}-\frac{\left\{\frac{1+b}{d}\right\}}{N}\right)^{1-\sigma}\right)=2.$$

Аналогично получим и тождество (37).

Для полноты изложения проверим непосредственно, что правые части в (36) и (37) равны. Для этого надо рассмотреть только случай, когда $\left\{\frac{1-b}{d}\right\}=0$ или $\left\{\frac{1+b}{d}\right\}=0$. Оба эти случаи разбираются одинаково и сводятся к доказательству равенства

$$\Gamma(\alpha)+|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx=\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx.$$

Но

$$\frac{1}{|d|^\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx-|d|^{-\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(1+\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)dx=$$

$$= \frac{1}{|d|^{\alpha}}\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}\left(e^{-\left(\frac{1}{|d|}\right)\cdot x}\right)\left(1-e^{-x}\right)dx = \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \Gamma(\alpha),$$

и равенство правых частей в (36) и (37) доказано.

Перейдем к доказательству последнего равенства в утверждении теоремы. Из леммы 8 (стр. 86) следует, что

$$\Gamma(\alpha)\zeta_H(\alpha;d,b) = \Gamma(\alpha)\zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\Big|\,\alpha\right) + \Gamma(\alpha)f_1^*\left(\alpha;|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right).$$

Повторяя для дзета-функции $\zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\big|\,\alpha\right)$ предыдущие рассуждения, получим

$$\Gamma(\alpha)\zeta\left(\Lambda\left(|d|,|d|\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\Big|\,\alpha\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{|d|^{\alpha}}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}\left(e^{-\left\|\frac{b}{d}\right\|\cdot x}+e^{-\left(1-\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)\cdot x}\right)}{1-e^{-x}}dx, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|>0; \\ \dfrac{2}{|d|^{\alpha}}\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-e^{-x}}e^{-x}dx, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\|=0 \end{cases}$$

и доказательство полностью завершено. □

Напомним определение контура Ханкеля C, состоящего из трех последовательных частей C_1, C_2 и C_3. Делается разрез комплексной α-плоскости вдоль вещественной оси от 0 до бесконечности. Берется положительное число r, удовлетворяющее неравенствам $0<r<2\pi$. C_1 обозначает луч, начинающийся в бесконечности и идущий до точки $\alpha=r$ вдоль верхнего края разреза плоскости, C_2 — окружность радиуса r с центром в точке $\alpha=0$, которая обходится в положительном направлении, и C_3 — луч, начинающийся в точке $\alpha=r$ и идущий в бесконечность вдоль нижнего края разреза плоскости.

Определим для комплексных α и положительных ω функцию $F(\alpha;\omega)$ равенством

$$F(\alpha;\omega) = \int\limits_C \frac{z^{\alpha-1}e^{-\omega z}}{1-e^{-z}}dz. \tag{39}$$

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Интеграл $F(\alpha;\omega)$ всюду сходится и изображает целую функцию.*

2. *Для любого $\alpha\neq 1$ справедливы тождества*

$$F(\alpha;\omega_1)+F(\alpha;\omega_2) = \left(e^{2\pi i\alpha}-1\right)\cdot|d|^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\left(\zeta_H(\alpha;d,b)-n(d,b)\right), \tag{40}$$

$$F(\alpha;\omega_1^*)+F(\alpha;\omega_2^*) = \left(e^{2\pi i\alpha}-1\right)\cdot|d|^{\alpha}\cdot\Gamma(\alpha)\cdot\left(\zeta_H(\alpha;d,b)-n^*(d,b)\right). \tag{41}$$

3. *Функция $\zeta_H(\alpha;d,b)$ аналитически продолжается на всю α-плоскость, кроме точки $\alpha=1$, где она имеет полюс 1-го порядка, причём*

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1}\zeta_H(\alpha;d,b) = \frac{2}{|d|}. \tag{42}$$

4. В полуплоскости $\sigma < 0$ справедливы тождества:

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi m \frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}} =$$

$$= f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \zeta^{**}\left(1-\alpha, \frac{b}{d}\right). \tag{43}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 31 из [33] (см. [33], стр. 82).

При $\sigma > 1$, повторяя рассуждения из теоремы 31 из [33] и пользуясь теоремой 1 (стр. 90), получим первое равенство второго утверждения теоремы. Второе равенство доказывается аналогично.

Так как все входящие в (40) функции имеют аналитическое продолжение на всю комплексную α-плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, то и функция $\zeta_H(\alpha; d, b)$ аналитически продолжается на всю α-плоскость, кроме точки $\alpha = 1$.

Таким образом второе утверждение доказано полностью, причём из равенства (40) следует, что в α-полуплоскости $\sigma \leqslant 1$ гиперболическая дзета-функция Гурвица определяется равенством

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = n(d, b) + \frac{F(\alpha; \omega_1) + F(\alpha; \omega_2)}{(e^{2\pi i\alpha} - 1) \cdot |d|^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)}.$$

Из последнего выражения следует, что особенности гиперболической дзета-функции Гурвица, если таковые вообще существуют, могут находиться только в точках $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Но в точках $\alpha = 2, 3, \ldots$ особенностей быть не может, ибо во всей α-полуплоскости $\sigma > 1$ гиперболическая дзета-функция Гурвица изображается абсолютно сходящимся рядом (20).

Далее, в точках $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$ нули функции $e^{2\pi i\alpha} - 1$ "гасят" полюсы гамма функции; поэтому эти точки также не являются особыми точками для гиперболической дзета-функции Гурвица. Остаётся только точка $\alpha = 1$. Для неё имеем:

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=1} \zeta_H(\alpha; d, b) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{\alpha - 1}{e^{2\pi i\alpha} - 1} \cdot \frac{F(1; \omega_1) + F(1; \omega_2)}{|d| \cdot \Gamma(1)} =$$

$$= \frac{1}{|d| \cdot 2\pi i} \left(\int_C \frac{z^{\alpha-1} e^{-\omega_1 z}}{1 - e^{-z}} dz + \int_C \frac{z^{\alpha-1} e^{-\omega_2 z}}{1 - e^{-z}} dz \right) = \frac{2}{|d|}$$

в силу рассуждений при доказательстве теоремы 31 из [33] (см. стр. 85). Тем самым третье утверждение теоремы доказано.

Наконец, повторяя дословно рассуждения из монографии [33] на стр. 87, при $\sigma < 0$ получим:

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{i(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha} \left(e^{-\pi i \frac{\alpha}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m \omega_1^{**}} + e^{-2\pi i m \omega_2^{**}}}{m^{1-\alpha}} - \right.$$

$$\left. - e^{\pi i \frac{\alpha}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m \omega_1^{**}} + e^{2\pi i m \omega_2^{**}}}{m^{1-\alpha}} \right) = f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \omega_1^{**}) + \sin(2\pi m \omega_2^{**})}{m^{1-\alpha}} + \sin\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi m \omega_1^{**}) + \cos(2\pi m \omega_2^{**})}{m^{1-\alpha}} \right).$$

Теперь воспользуемся периодичность тригонометрических функций и видом величин ω_1^{**} и ω_2^{**}, получим:

$$\sin(2\pi m\omega_1^{**}) + \sin(2\pi m\omega_2^{**}) = \sin\left(2\pi m\left(1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) +$$
$$+ \sin\left(2\pi m\left(1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} + \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) = \sin\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) - \sin\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right) = 0,$$
$$\cos(2\pi m\omega_1^{**}) + \cos(2\pi m\omega_2^{**}) = \cos\left(2\pi m\left(1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} - \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) +$$
$$+ \cos\left(2\pi m\left(1 + \frac{1}{|d|} - \left\{\frac{1}{|d|} + \left\|\frac{b}{d}\right\|\right\}\right)\right) = 2\cos\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right),$$

$$\zeta_H(\alpha; d, b) = f_1(\alpha; d, b) + \frac{4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \sin\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi m\left\|\frac{b}{d}\right\|\right)}{m^{1-\alpha}} =$$
$$= f_1(\alpha; d, b) + \frac{4(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \sin\frac{\pi\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}} =$$
$$= f_1(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{m^{1-\alpha}} = f_1^*(\alpha; d, b) + \frac{2M(\alpha)}{|d|^\alpha} \cdot \zeta^{**}\left(1-\alpha, \frac{b}{d}\right)$$

и теорема полностью доказана. □

6. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции сдвинутых диагональных решёток

Диагональные решётки и сдвинутые диагональные решётки относятся к классу простейших декартовых решёток. Уже на их примере видно, что функциональные уравнения для гиперболической дзета-функции решёток имеют дополнительные слагаемых, которых нет в функциональном уравнении для дзета-функции Римана.

В этом разделе рассмотрим одномерный случай функционального уравнения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(d\mathbb{Z} + b \mid \alpha)$ и двумерный случай функционального уравнения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} + \vec{b} \mid \alpha)$.

Нам потребуется следующее определение.

Определение 2. *Гиперболической дзета-функцией второго рода сдвинутой решетки $\zeta^*(\Lambda(d,b)|\alpha)$ называется функция $\zeta_H^*(\Lambda(d,b)|\alpha)$, которая задается равенством*

$$\zeta_H^*(\Lambda(d,b)|\alpha) = \begin{cases} \zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha), & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| = 0, \\ \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}{}' \dfrac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)}{\overline{dm}^{\,\alpha}}, & \text{при } \left\|\frac{b}{d}\right\| > 0. \end{cases} \tag{44}$$

Если ввести обозначения

$$f_2(\alpha; d, b) = \sum_{-1<dm<1}{}' \cos\left(2\pi m\frac{b}{d}\right)\left(1 - |dm|^{-\alpha}\right), \tag{45}$$

то ясно, что справедливо равенство

$$\zeta_H^*(\Lambda(d,b)|\alpha) = \zeta^*(\Lambda(d,b)|\alpha) + f_2(\alpha; d, b). \tag{46}$$

6.1. Одномерный случай

Лемма 13. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(d,b)\mid\alpha)$ произвольной сдвинутой решётки $\Lambda(d,b)$ вида $\Lambda(d,b)=d\cdot\mathbb{Z}+b$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda(d,b)\mid\alpha)$ справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)\mid\alpha)=\zeta(\Lambda(d,b)\mid\alpha)+f_1(\alpha;d,b). \tag{47}$$

Доказательство. Действительно, из определения гиперболической дзета-функции решётки следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)\mid\alpha)=\sum_{|dm+b|\geqslant 1}|dm+b|^{-\alpha}+\sum_{-1<dm+b<1}{}' 1=$$
$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}'|dm+b|^{-\alpha}+\sum_{-1<dm+b<1}{}'\left(1-|dm+b|^{-\alpha}\right)=\zeta(\Lambda(d,b)\mid\alpha)+f_1(\alpha;d,b).$$

□

Теорема 3. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda=d\cdot\mathbb{Z}$, где $d>0$, в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda\mid\alpha)-f(\alpha,d)=\frac{M(\alpha)}{\det\Lambda}\left(\zeta_H\left(\Lambda^*\right|1-\alpha)-f(1-\alpha,d^{-1})\right). \tag{48}$$

Доказательство. См. [16]. □

Для сдвинутой решётки $\Lambda(d,b)$, когда $\left\|\frac{b}{d}\right\|\neq 0$, ситуация несколько другая.

Теорема 4. *Для гиперболической дзета-функции произвольной сдвинутой декартовой решётки $\Lambda(d,b)$ вида $\Lambda(d,b)=d\cdot\mathbb{Z}+b$, где $\left\|\frac{b}{d}\right\|>0$, в левой полуплоскости $\sigma<0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)\mid\alpha)-f_1(\alpha,d,b)=$$
$$=\frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d,b)}\left(\zeta_H^*\left(\Lambda^*(d,b)\right|1-\alpha)-f_2\left(1-\alpha,\frac{1}{d},\frac{b}{d^2}\right)\right). \tag{49}$$

Доказательство. Действительно, согласно формулам (23) и (46) имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(d,b)|\alpha)-f_1(\alpha;d,b)=\zeta(\Lambda(d,b)|\alpha),$$
$$\zeta_H^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha)-f_2\left(1-\alpha;\frac{1}{d},\frac{b}{d^2}\right)=\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha).$$

Согласно лемме 11 (см. стр. 88) правые части связаны функциональным уравнением, отсюда следует утверждение теоремы. □

Уже в одномерном случае можно проиллюстрировать эффективность функционального уравнения для гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки.

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda(d)=d\cdot\mathbb{Z}$ и её подрешетку $\Lambda(d_1)=d_1\cdot\mathbb{Z}$. Ясно, что $d_1=n\cdot d$, $n\in\mathbb{N}$ и имеет место разбиение на сдвинутые подрешётки

$$\Lambda(d)=\bigcup_{b=0}^{n-1}\Lambda\left(d_1,bd\right). \tag{50}$$

Из этого разбиения вытекает равенство в правой полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1)$:

$$\zeta_H(\Lambda(d)|\alpha)=\sum_{b=0}^{n-1}\zeta_H(\Lambda\left(d_1,bd\right)|\alpha). \tag{51}$$

Применим функциональные уравнения для левой и правой частей данного равенства, тогда в левой полуплоскости $\sigma < 0$ получим

$$\zeta_H(\Lambda(d) \mid \alpha) - f(\alpha, d) = \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda(d)} \left(\zeta_H \left(\Lambda^*(d) \right| 1 - \alpha) - f(1-\alpha, d^{-1}) \right),$$

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, bd) \mid \alpha) - f_1(\alpha, d_1, bd) =$$
$$= \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, bd)} \left(\zeta_H^* \left(\Lambda^*(d_1, bd) \right| 1 - \alpha) - f_2 \left(1 - \alpha, \frac{1}{d_1}, \frac{bd}{d_1^2} \right) \right).$$

Лемма 14. *Справедливо равенство*

$$f(\alpha, d) = \sum_{b=0}^{n-1} f_1(\alpha, dn, bd). \tag{52}$$

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{b=0}^{n-1} f_1(\alpha, dn, bd) = \sum_{b=0}^{n-1} \sideset{}{'}\sum_{-1<dnm+bd<1} \left(1 - |dnm + db|^{-\alpha}\right) =$$
$$= \sideset{}{'}\sum_{-1<dm<1} \left(1 - |dm|^{-\alpha}\right) = f(\alpha, d),$$

так как

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{b=0}^{n-1} \{nm + b | m \in \mathbb{Z}\}.$$

□

Лемма 15. *Справедливо равенство*

$$f(1-\alpha, d^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} f_2 \left(1 - \alpha, \frac{1}{dn}, \frac{bd}{(dn)^2} \right). \tag{53}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} f_2 \left(1 - \alpha, \frac{1}{dn}, \frac{bd}{(dn)^2} \right) =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} \sideset{}{'}\sum_{-1<\frac{m}{dn}<1} \cos\left(2\pi m \frac{b}{n}\right) \left(1 - \left|\frac{m}{dn}\right|^{\alpha-1}\right) =$$
$$= \sideset{}{'}\sum_{-1<\frac{m}{dn}<1} \left(1 - \left|\frac{m}{dn}\right|^{\alpha-1}\right) \frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} \cos\left(2\pi m \frac{b}{n}\right) =$$
$$= \sideset{}{'}\sum_{-1<\frac{m}{d}<1} \left(1 - \left|\frac{m}{d}\right|^{\alpha-1}\right) = f(\alpha, d^{-1}),$$

так как

$$\frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} \cos\left(2\pi m \frac{b}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } m \equiv 0 \pmod n, \\ 0, & \text{при } m \not\equiv 0 \pmod n) \end{cases}.$$

□

Лемма 16. *Справедливо равенство*

$$\zeta\left(\Lambda^*(d)\right|1-\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\zeta^*(\Lambda^*(dn,bd)|1-\alpha). \tag{54}$$

Доказательство. Действительно, $\Lambda^*(dn,bd) = \Lambda\left(\frac{1}{dn},\frac{b}{dn^2}\right)$ и

$$\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\zeta^*(\Lambda^*(d,b)|1-\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right)}{\left|\frac{m}{dn}\right|^{1-\alpha}} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\left|\frac{m}{dn}\right|^{1-\alpha}}\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\left|\frac{m}{d}\right|^{1-\alpha}} = \zeta\left(\Lambda^*(d)\right|1-\alpha),$$

так как

$$\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{n-1}\cos\left(2\pi m\frac{b}{n}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } m\equiv 0 \pmod n,\\ 0, & \text{при } m\not\equiv 0 \pmod n\end{cases}.$$

□

Из лемм 14 — 16 видно, что правые части функционального уравнения для сдвинутых решёток, содержащие функции второго рода, обеспечивают выделение подрешёток из решёток.

Теорема 5. *Для любого $\alpha_0 = \sigma_0 + it_0$ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ пусть $K(\alpha_0)$ — произвольный компакт в этой полуплоскости, содержащий точку α_0, тогда для любого $d_0 > 0$ и для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки $\Lambda(d)$ вида $\Lambda(d) = d\cdot\mathbb{Z}$, где $d > 0$, справедливо равенство*

$$\lim_{d\to d_0}\zeta_H(\Lambda(d)\mid\alpha) = \zeta_H\left(\Lambda(d_0)\right|\alpha). \tag{55}$$

и эта сходимость равномерная во всем компакте $K(\alpha_0)$.

Доказательство. Действительно, для любой точки α из компакта $K(\alpha_0)$ точка α принадлежит левой полуплоскости $\sigma < 0$, а $1-\alpha$ — правой полуплоскости $\sigma > 1$, и согласно теореме 3 (стр. 96) имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(d)\mid\alpha) = f(\alpha,d) + \frac{M(\alpha)}{\det\Lambda(d)}\left(\zeta_H\left(\Lambda^*(d)\right|1-\alpha) - f(1-\alpha,d^{-1})\right).$$

В правой части все функции, зависящие от d, непрерывны, а множитель $M(\alpha)$ — аналитическая функция на компакте $K(\alpha_0)$, поэтому ограничена некоторой константой, зависящей от компакта. Отсюда следует равномерная сходимость в равенстве (61). □

6.2. Двумерный случай

Перейдем к рассмотрению двумерного случая.

Положим $\Lambda_\nu = d_\nu\cdot\mathbb{Z}$, $\Lambda_\nu(d_\nu,b_\nu) = d_\nu\cdot\mathbb{Z} + b_\nu$, $(\nu = 1,2)$.

Лемма 17. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda\mid\alpha)$ произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d_1\cdot\mathbb{Z}\times d_2\cdot\mathbb{Z}$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda\mid\alpha)$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned}\zeta_H(\Lambda\mid\alpha) &= \zeta(\Lambda\mid\alpha) + \zeta(\Lambda_1\mid\alpha) + \zeta(\Lambda_2\mid\alpha) +\\ &+ f(\alpha,d_1)\zeta(\Lambda_2\mid\alpha) + f(\alpha,d_2)\zeta(\Lambda_1\mid\alpha) +\\ &+ f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2) + f(\alpha,d_1) + f(\alpha,d_2) =\\ &= \zeta(\Lambda\mid\alpha) + \zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha) + \zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha) +\\ &+ f(\alpha,d_1)\zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha) + f(\alpha,d_2)\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha) - f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2).\end{aligned} \tag{56}$$

Доказательство. См. [16]. □

Теорема 6. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки* Λ *вида* $\Lambda = d_1\cdot\mathbb{Z}\times d_2\cdot\mathbb{Z}$, *где* $d_1, d_2 > 0$, *в левой полуплоскости* $\sigma < 0$ *справедливо функциональное уравнение*

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda\mid\alpha)-\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha)-\zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha)-f(\alpha,d_1)\zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha)-\\ -f(\alpha,d_2)\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha)+f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2)=\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(\zeta_H\left(\Lambda^*\right|1-\alpha)-\right.\\ -\zeta_H(\Lambda_1^*\mid 1-\alpha)-\zeta_H(\Lambda_2^*\mid 1-\alpha)-\\ -f(1-\alpha,d_1^{-1})\zeta_H(\Lambda_2^*\mid 1-\alpha)-f(1-\alpha,d_2^{-1})\zeta_H(\Lambda_1^*\mid 1-\alpha)+\\ \left.+f(1-\alpha,d_1^{-1})f(1-\alpha,d_2^{-1})\right).\end{gathered}\tag{57}$$

Доказательство. См. [16]. □

Теперь мы можем получить новую форму функционального уравнения для гиперболической дзета-функции двумерной диагональной решётки.

Теорема 7. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки* Λ *вида* $\Lambda = d_1\cdot\mathbb{Z}\times d_2\cdot\mathbb{Z}$, *где* $d_1, d_2 > 0$, *в левой полуплоскости* $\sigma < 0$ *справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda\mid\alpha)=\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta_H\left(\Lambda^*\right|1-\alpha)+$$

$$\begin{gathered}+\zeta_H\left(\Lambda_1^*\right|1-\alpha)\left(\frac{M(\alpha)}{d_1}\left(1+f(\alpha,d_2)\right)-\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_2^{-1})\right)\right)+\\ +\zeta_H\left(\Lambda_2^*\right|1-\alpha)\left(\frac{M(\alpha)}{d_2}\left(1+f(\alpha,d_1)\right)-\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_1^{-1})\right)\right)+\\ +\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}f(1-\alpha,d_1^{-1})f(1-\alpha,d_2^{-1})+f(\alpha,d_1)+f(\alpha,d_2)+f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2)-\\ -\frac{M(\alpha)}{d_1}f(1-\alpha,d_1^{-1})\left(1+f(\alpha,d_2)\right)-\frac{M(\alpha)}{d_2}f(1-\alpha,d_2^{-1})\left(1+f(\alpha,d_1)\right).\end{gathered}\tag{58}$$

Доказательство. Действительно, по теореме 3 имеем:

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha)-f(\alpha,d_1)=\frac{M(\alpha)}{d_1}\left(\zeta_H\left(\Lambda_1^*\right|1-\alpha)-f(1-\alpha,d_1^{-1})\right),\\ \zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha)-f(\alpha,d_2)=\frac{M(\alpha)}{d_2}\left(\zeta_H\left(\Lambda_2^*\right|1-\alpha)-f(1-\alpha,d_2^{-1})\right).\end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda_1\mid\alpha)\left(1+f(\alpha,d_2)\right)=\\ =\left(f(\alpha,d_1)+\frac{M(\alpha)}{d_1}\left(\zeta_H\left(\Lambda_1^*\right|1-\alpha)-f(1-\alpha,d_1^{-1})\right)\right)\left(1+f(\alpha,d_2)\right),\end{gathered}\tag{59}$$

$$\begin{gathered}\zeta_H(\Lambda_2\mid\alpha)\left(1+f(\alpha,d_1)\right)=\\ =\left(f(\alpha,d_2)+\frac{M(\alpha)}{d_2}\left(\zeta_H\left(\Lambda_2^*\right|1-\alpha)-f(1-\alpha,d_2^{-1})\right)\right)\left(1+f(\alpha,d_1)\right).\end{gathered}\tag{60}$$

Сложив почленно (57), (59) и (60), получим

$$\zeta_H(\Lambda\mid\alpha)+f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2)=\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\zeta_H\left(\Lambda^*\right|1-\alpha)+$$

$$+\zeta_H\left(\Lambda_1^*|\,1-\alpha\right)\left(\frac{M(\alpha)}{d_1}\left(1+f(\alpha,d_2)\right)-\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_2^{-1})\right)\right)+$$
$$+\zeta_H\left(\Lambda_2^*|\,1-\alpha\right)\left(\frac{M(\alpha)}{d_2}\left(1+f(\alpha,d_1)\right)-\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}\left(1+f(1-\alpha,d_1^{-1})\right)\right)+$$
$$+\frac{M(\alpha)^2}{\det\Lambda}f(1-\alpha,d_1^{-1})f(1-\alpha,d_2^{-1})+f(\alpha,d_1)+f(\alpha,d_2)+2f(\alpha,d_1)f(\alpha,d_2)-$$
$$-\frac{M(\alpha)}{d_1}f(1-\alpha,d_1^{-1})\left(1+f(\alpha,d_2)\right)-\frac{M(\alpha)}{d_2}f(1-\alpha,d_2^{-1})\left(1+f(\alpha,d_1)\right).$$

После приведения подобных получим утверждение теоремы. □

Перейдем к получению функционального уравнения для гиперболической дзета-функции двумерной сдвинутой диагональной решётки $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)=(d_1\mathbb{Z}+b_1)\times(d_2\mathbb{Z}+b_2)$.

Лемма 18. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)$ произвольной сдвинутой решётки $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)$ вида $\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)=(d_1\mathbb{Z}+b_1)\times(d_2\mathbb{Z}+b_2)$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)$ в правой α-полуплоскости $\sigma>1$ справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)=\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)+$$
$$+\zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_2,b_2)+\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1)+f_1(\alpha;d_1,b_1)f_1(\alpha;d_2,b_2). \tag{61}$$

Доказательство. Действительно, из определения гиперболической дзета-функции решётки следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)=\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|\geqslant1\\|d_2m_2+b_2|\geqslant1}}(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}+{\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|\geqslant1\\|d_2m_2+b_2|<1}}}'(|d_1m_1+b_1|)^{-\alpha}+$$
$$+{\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|\geqslant1}}}'(|d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}+{\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}}'1={\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^2}}'(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}+$$
$$+{\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|\geqslant1\\|d_2m_2+b_2|<1}}}'(|d_1m_1+b_1|)^{-\alpha}\left(1-|d_2m_2+b_2|^{-\alpha}\right)+{\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|\geqslant1}}}'(|d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\left(1-|d_1m_1+b_1|^{-\alpha}\right)+$$
$$+{\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}}'\left(1-(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\right)=\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)+$$
$$+\zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_2,b_2)-{\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}}'(|d_1m_1+b_1|)^{-\alpha}\left(1-|d_2m_2+b_2|^{-\alpha}\right)+$$
$$+\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1)-{\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}}'(|d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\left(1-|d_1m_1+b_1|^{-\alpha}\right)+$$
$$+{\sum_{\substack{|d_1m_1+b_1|<1\\|d_2m_2+b_2|<1}}}'\left(1-(|d_1m_1+b_1||d_2m_2+b_2|)^{-\alpha}\right)=\zeta(\Lambda(d_1,b_1,d_2,b_2)\mid\alpha)+$$
$$+\zeta(\Lambda(d_1,b_1)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_2,b_2)+\zeta(\Lambda(d_2,b_2)\mid\alpha)f_1(\alpha;d_1,b_1)+f_1(\alpha;d_1,b_1)f_1(\alpha;d_2,b_2).$$

□

Теорема 8. *Для гиперболической дзета-функции произвольной сдвинутой решётки $\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)$ вида $\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) = (d_1\mathbb{Z} + b_1) \times (d_2\mathbb{Z} + b_2)$, где $d_1, d_2 > 0$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) -$$
$$-\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) =$$
$$= \frac{M^2(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)} \zeta^*(\Lambda^*(d_1, b_1, d_2, b_2) | 1 - \alpha). \tag{62}$$

Доказательство. Действительно, из лемм 13 (стр. 96) и 18 (стр. 100) следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d_\nu, b_\nu) \mid \alpha) = \zeta(\Lambda(d_\nu, b_\nu) \mid \alpha) + f_1(\alpha; d_\nu, b_\nu), \quad (\nu = 1, 2),$$
$$\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) = \zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) +$$
$$+\zeta(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) + \zeta(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2),$$
$$\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - (\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) - f_1(\alpha; d_1, b_1)) f_1(\alpha; d_2, b_2) -$$
$$-(\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) - f_1(\alpha; d_2, b_2)) f_1(\alpha; d_1, b_1) - f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) = \zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha),$$
$$\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) -$$
$$-\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) = \zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha).$$

По принципу аналитического продолжения последнее равенство справедливо на всей комплексной α-плоскости кроме точки $\alpha = 1$.

По лемме 12 (стр. 89) имеем для правой части равенство:

$$\zeta(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) | \alpha) = \frac{M^2(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)} \zeta^*(\Lambda^*(d_1, b_1, d_2, b_2) | 1 - \alpha).$$

Отсюда следует, что

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2) \mid \alpha) - \zeta_H(\Lambda(d_1, b_1) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_2, b_2) -$$
$$-\zeta_H(\Lambda(d_2, b_2) \mid \alpha) f_1(\alpha; d_1, b_1) + f_1(\alpha; d_1, b_1) f_1(\alpha; d_2, b_2) =$$
$$= \frac{M^2(\alpha)}{\det \Lambda(d_1, b_1, d_2, b_2)} \zeta^*(\Lambda^*(d_1, b_1, d_2, b_2) | 1 - \alpha) \tag{63}$$

и утверждение теоремы доказано. □

7. Заключение

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

- во-первых, теория гиперболической дзета-функции Гурвица является вполне содержательной и аналогична теории обычной дзета-функции Гурвица;

- во-вторых, на наш взгляд выделение дзета-функций второго рода является удачным и перспективны;

- в-третьих, последняя доказанная теорема 8 позволяет наметить дальнейшую программу исследований.Следующим этапом должно стать получение функционального уравнения для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки в аналогичной форме. Имеющееся в настоящее время функциональное уравнение не позволяет переходить в нем к пределу, так как предел дзета-функций решёток не всегда существует.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. О. Гельфонд Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. 376 с.
2. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с.
3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 4–107.
4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.
5. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.
6. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.
7. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.
8. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.
9. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.
10. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.
11. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Дис. ... доктора физ.–мат. наук. Тула, 2000.
12. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения. Автореф. дис. ... доктора физ.–мат. наук. Москва, 2000.
13. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. — 195 с.
14. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О гиперболической дзета–функции алгебраических решёток // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 22.
15. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета–функция алгебраических решёток. Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, №2327–В90.
16. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сборник 2015. Т. 16, вып. 4(56). С. 100–149.

17. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.

18. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

19. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета–функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

20. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77–87.

21. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

22. А. А. Карацуба Основы аналитической теории чисел, 2-е изд. М.: Наука, 1983. 240 с.

23. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

24. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Современные проблемы теории чисел: Тез. докл. III Междунар. конф. Тула: Изд-во ТГПУ, 1996. С. 119.

25. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

26. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

27. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МПГУ, 1999.

28. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

29. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

30. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953. 408 с.

31. Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. — М.: Физматгиз, 1963. 516 с.

32. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 188 с.

33. Н. Г. Чудаков Введение в теорию L-функций Дирихле. М. — Л.: ОГИЗ, 1947. 204 с.

34. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Gel'fond A. O., 1977, *Calculus of finite differences*, Nauka, Moscow, 376 p.

2. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovolsky, N. N. 2012, *Multidimensional Number-theoretic grid and lattice algorithms for finding the optimal coefficients* , Izd-vo TSPU L. N. Tolstoy, Tula, 283 p.

3. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovolsky, N. N. 2012, "Hyperbolic zeta-functions on nets and lattices and computation of optimal coefficients *Chebyshevskii sbornik* vol 13, № 4(44) pp. 4–107.

4. Dobrovolskiy, M. N. 2007, "A functional equation for the hyperbolic zeta function of integer lattices. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* no. 5, pp. 18–23.

5. Dobrovolskiy M. N. 2009, *Some questions Number-theoretic methods in approximate analysis.*, dissertation of the candidate physical and mathematical sciences, Moscow.

6. Dobrovolskiy M. N. 2009, *Some questions Number-theoretic methods in approximate analysis.*, author's abstract of dissertation of the candidate physical and mathematical sciences, Moscow.

7. Dobrovolskiy N. M., 1984 "Hyperbolic zeta function of lattices." *Dep. v VINITI 24.08.84*, no. 6090-84

8. Dobrovolskiy N. M., 1984 *Number-theoretic nets and applications.*, dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Tula.

9. Dobrovolskiy N. M., 1985 *Number-theoretic nets and applications.*, author's abstract of dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.

10. Dobrovolskiy N. M., 1985 "Number-theoretic nets and applications. *Number Theory and Its Applications: Proc. rep. All-Union. Conf.* Tbilisi, pp. 67–70.

11. Dobrovolskiy N. M., 2000 *Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications.*, dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences, Tula.

12. Dobrovolskiy N. M., 2000 *Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications.*, author's abstract of dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences, Moscow.

13. Dobrovolskiy N. M., 2005 *Multidimensional number-theoretic nets and lattices and their applications.*,Izd-vo TSPU L. N. Tolstoy, Tula, 195 p.

14. Dobrovolskiy N. M., Vankova V. C., 1990, "On hyperbolic zeta functions of algebraic lattices"*Number theory and its applications: Proc. rep. Republics. Conf. Tashkent, pp. 22.*

15. *Dobrovolskiy N. M., Vankova V. C., Kozlov SL, 1990, "Hyperbolic zeta functions of algebraic lattices. Dep. v VINITI 12.04.90, no. 2327–B90.*

16. *Dobrovolskiy N. M., Dobrovolskiy N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Yushina E. I., 2015 "Hyperbolic zeta function of lattice over quadratic field Chebyshevskii sbornik vol. 16, no. 4(56). pp. 100–149.*

17. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., Rebrova I. Yu., 1998, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices"Mat. Zametki, vol. 63, Issue 4, pp. 522–526*

18. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, "Number of lattice points in the hyperbolic cross"Algebraic, probability, geometry, and combinatorial functional methods in the theory of numbers: Coll. mes. rep. II International. Conf. Voronezh, pp. 53.*

19. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1996, "Analytic continuation of the hyperbolic zeta-function of rational lattices Modern problems theory numbers and its applications: Coll. mes. rep. III International. Conf. Tula, pp. 49.*

20. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L. 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta function of lattices Izvestija Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science. vol. 2. no. 1. pp. 77–87.*

21. *Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L. 1998, "Number of lattice points in the hyperbolic cross Mat. Zametki, vol. 63, Issue 3, pp. 363–369*

22. *Karatsuba A. A., 1983, Basics analytic number theory Nauka, Moscow 1983. p. 240.*

23. *Korobov N. M. 2004 Number-theoretic methods in approximate analysis. Fizmatgiz, Moskow, p. 288*

24. *Rebrova I. Yu., 1996, "Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices // Modern problems of number theory: Tez. rep. III International. Conf. Tula pp. 119*

25. *Rebrova I. Yu., 1998, "The continuity of the generalized hyperbolic zeta function of lattices and its analytic continuation"Izvestija Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science. vol. 4. no .3. pp. 99–108.*

26. *Rebrova I. Yu., 1999, The space lattices and functions on it, dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.*

27. *Rebrova I. Yu., 1999, The space lattices and functions on it, author's abstract of dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.*

28. *Roshchenya A. L., 1998, Analytic continuation of the hyperbolic zeta function of lattices, dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.*

29. *Roshchenya A. L., 1998, Analytic continuation of the hyperbolic zeta function of lattices, author's abstract dissertation of the candidate of physical and mathematical sciences, Moscow.*

30. *Titchmarsh E. K., 1953, The theory of the Riemann zeta function, M.: IL, p. 408*

31. *Whittaker E. T., Watson D. H., 1963, Course of modern analysis. Part two. Transcendental functions, Fizmatgiz, Moskow, p. 516*

32. *Chandrasekharan K, 1974, Introduction to analytic number theory Mir, Moscow, p. 188*

33. *Chudakov H. G., 1947 Introduction to the Theory of L–functions of Dirichlet, M. — L.: OGIZ, p. 204*

34. *L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.*

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
Московский педагогический государственный университет.
Институт экономики и управления.
Получено 2.05.2016 г.
Принято в печать 12.09.2016 г.