ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

УДК 511.9.

О МАТРИЧНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПРИВЕДЕННОЙ КУБИЧЕСКОЙ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ[1]

Н. М. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева (г. Тула, г. Москва)

Аннотация

В данной работе рассмотрено матричное разложение приведенной кубической иррациональности α, удовлетворяющей уравнению

$$x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0.$$

Для матричного разложения

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 310941 \cdot k + 155427 & 156744 \cdot k + 78333 \\ 61578 \cdot k + 30882 & 31041 \cdot k + 15564 \end{pmatrix}$$

построен алгоритм перехода к обычной непрерывной дроби.

Ключевые слова: непрерывная дробь, матричное разложение, приведенная кубическая иррациональность, алгоритм перехода от матричного разложения к непрерывной дроби.
Библиография: 2 названия.

ON MATRIX DECOMPOSITION OF ONE REDUCED CUBIC IRRATIONAL

N. M. Dobrovol'skii, V. N. Soboleva, D. K. Sobolev (Tula, Moscow)

Abstract

In this work we considered the matrix decomposition of the cubic irrational α satisfying the equation

$$x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0.$$

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ 11-01-00571

For decomposition of the matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 310941 \cdot k + 155427 & 156744 \cdot k + 78333 \\ 61578 \cdot k + 30882 & 31041 \cdot k + 15564 \end{pmatrix}$$

an algorithm of transition to regular continued fraction is constructed.

Keywords: continued fraction, matrix decomposition, reduced cubic irrational, algorithm of transition from matrix decomposition to continued fraction.

Bibliography: 2 titles.

Посвящается 85-й годовщине со дня рождения
Зинаиды Никитичны Добровольской
(01.02.1928 — 30.06.1950)

1. Введение

Пусть α приведенная кубическая иррациональность, то есть $\alpha^{(1)} = \alpha > 1$, а сопряженные алгебраические иррациональности удовлетворяют соотношению $-1 < \alpha^{(3)} < \alpha^{(2)} < 0$. Понятие приведенной кубической иррациональности является естественным обобщением приведенной квадратической иррациональности.

Нетрудно видеть, что положительный корень α уравнения

$$x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

является приведенной кубической иррациональностью.

Действительно, для многочлена $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 1$ имеем:

$$f(-1) = f(0) = f(5) = -1, \quad f(6) = 41, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},$$

поэтому $\alpha = \alpha^{(1)} > 5$, $-1 < \alpha^{(3)} < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < \alpha^{(2)} < 0$.

В работах [1] и [2] рассматриваются матричные разложения алгебраических иррациональностей. В частности, для кубической иррациональности α, удовлетворяющей уравнению

$$f(t) = t^3 + at^2 + bt + c, \quad f(\alpha) = 0$$

дается матричное разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(\begin{pmatrix} t & -at^2 - 2bt - 3c \\ 1 & 3t^2 + 2at + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ 0 & 3k+1 \end{pmatrix} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 + 2at + b & -at^2 - 2bt - 3c \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ab - 9c & 2b^2 - 6ac \\ 2a^2 - 6b & ab - 9c \end{pmatrix} \right) \quad (1)$$

и утверждается, что оно сходится при t, для которых разность $|t - \alpha|$ мала.

Общее определение сходимости матричного разложения следующее.

Определение 1. *Говорят, что матричное разложение*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

сходится к числу α, если для матриц

$$M_n = \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha.$$

В этом случае пишется

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

Цель данной работы — получить новую форму матричного разложения приведенной кубической иррациональности α, рассмотреть реализацию алгоритма Лагранжа разложения этой иррациональности в обыкновенную непрерывную дробь, построить алгоритм перевода матричного разложения в обыкновенную цепную дробь, сравнить результаты работы двух алгоритмов.

Во втором разделе рассматривается алгоритм Лагранжа разложения в непрерывную дробь для произвольной приведенной иррациональности n-ой степени.

Третий раздел содержит описание основных свойств матричных разложений.

Четвертый раздел посвящен построению алгоритма перевода матричного разложения в обыкновенную непрерывную дробь.

Пятый раздел содержит сравнение результатов работы двух алгоритмов для приведенной кубической иррациональности α.

2. Алгоритм Лагранжа для приведенной алгебраической иррациональности n-ой степени

Прежде всего дадим определение приведенной алгебраической иррациональности n-ой степени.

Определение 2. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен[2]*, у которого все корни* $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *— различные вещественные числа, удовлетворяющие условию*

$$-1 < \alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < 0, \quad \alpha^{(1)} > 1,$$

тогда алгебраическое число $\alpha = \alpha^{(1)}$ *называется приведенной алгебраической иррациональностью степени* n.

Заметим, что для минимального многочлена $f(x)$, задающего приведенную алгебраическую иррациональность α степени n, всегда выполнено неравенство $a_0 < 0$, так как на промежутке $[0; \infty)$ имеется только один корень α, при $x > \alpha$ имеем $f(x) > 0$, поэтому $f(0) < 0$.

Для любого вещественного α, являющегося приведенной алгебраической иррациональностью степени n, рассмотрим разложение в бесконечную непрерывную дробь

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Как обычно через P_k и Q_k будем обозначать числитель и знаменатель k-ой подходящей дроби

$$\frac{P_k}{Q_k} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k}}}, \quad k \geqslant 0,$$

[2]В частности, неприводимость многочлена означает, что $(a_0, \ldots, a_n) = 1$.

а через α_k — k-ую остаточную дробь

$$\alpha_k = q_k + \cfrac{1}{q_{k+1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \quad k \geqslant 0.$$

Таким образом $\alpha = \alpha_0$ и справедливо равенство

$$\alpha = \frac{\alpha_{k+1}P_k + P_{k-1}}{\alpha_{k+1}Q_k + Q_{k-1}}, \quad k \geqslant 0,$$

если принять обычное соглашение, что $P_{-1} = 1$ и $Q_{-1} = 0$.

Лемма 1. *Для произвольной приведенной алгебраической иррациональности α степени n её остаточная дробь α_1 также является приведенной алгебраической иррациональностью степени n, удовлетворяющей неприводимому многочлену*

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1}x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,1} > 0,$$

где

$$a_{k,1} = \frac{b_k}{d}, \quad d = (b_0, \ldots, b_n), \quad b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$g(x) = -f\left(q_0 + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

Так как $\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, то $g(\alpha_1) = 0$.

Справедливы равенства

$$f\left(q_0 + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}(q_0x+1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \sum_{m=0}^{k} C_k^m q_0^m x^m =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{m=n-k}^{n} C_k^{m+k-n} q_0^{m+k-n} x^m = \sum_{k=0}^{n} x^k \sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n},$$

поэтому

$$b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

и $b_n = -f(q_0)$. Так как $q_0 < \alpha$, $f(\alpha) = 0$, $a_n > 0$ и α — единственный положительный корень многочлена $f(x)$, то $f(q_0) < 0$ и, следовательно, $b_n > 0$.

Поэтому, разделив многочлен $g(x)$ на наибольший общий делитель его коэффициентов, получим неприводимый многочлен $f_1(x)$.

Далее заметим, что корням $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ многочлена $f(x)$ соответствуют корни $\beta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ многочлена $g(x)$, которые связаны равенствами

$$\alpha^{(k)} = q_0 + \frac{1}{\beta^{(k)}}, \quad \beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)} - q_0} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что

$$-1 < \beta^{(k)} < 0 \quad (2 \leqslant k \leqslant n), \beta^{(1)} > 1$$

и, значит, $\alpha_1 = \beta^{(1)}$ — приведенная алгебраическая иррациональность степени n. Лемма полностью доказана. □

Теорема 1. *Для произвольной приведенной алгебраической иррациональности α степени n все её остаточные дроби α_m также являются приведенными алгебраическими иррациональностями степени n, удовлетворяющими неприводимым многочленам*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0,$$

где

$$a_{k,m} = \frac{b_{k,m}}{d_m}, \quad d_m = (b_{0,m}, \ldots, b_{n,m}),$$
$$b_{k,m} = -\sum_{l=n-k}^{n} a_{l,m-1} C_l^{l+k-n} q_{m-1}^{l+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Доказательство. Действительно, утверждение теоремы следует по индукции из леммы 1. □

Теорема 2. *Неполное частное q_k определяется однозначно как натуральное число, удовлетворяющие условию*

$$f_k(q_k) < 0, \quad f_k(q_k + 1) > 0.$$

Доказательство. Действительно, так как $f_k(\alpha_k) = 0$, $q_k < \alpha_k < q_k + 1$, $a_{n,k} > 0$ и α_k — единственный положительный корень многочлена $f_k(x)$, то $f_k(q_k) < 0$ и $f_k(q_{k+1}) > 0$. □

Нетрудно понять, что для вычисления q_k требуется $O(\ln q_k)$ вычислений значений $f_k(x)$. Действительно, рассмотрим последовательность $f_k(1)$, $f_k(2)$, ..., $f_k(2^m)$, $f_k(2^{m+1})$, где $m = [\log_2(q_k)]$. Ясно, что $f_k(2^j) < 0$ при $0 \leqslant j \leqslant m$ и

$f_k(2^{m+1}) > 0$. Далее методом деления пополам стягиваем отрезок $[2^m; 2^{m+1}]$ до отрезка $[q_k; q_k + 1]$, что потребует ещё вычисления m значений $f_k(x)$.

Таким образом описание версии алгоритма Лагранжа для вычисления неполных частных разложения приведенной алгебраической иррациональности α степени n в цепную дробь закончено.

Теорема 1 обобщается на случай цепной дроби произвольной чисто-вещественной алгебраической иррациональности α степени n. Докажем предварительно лемму о преобразовании корней.

Лемма 2. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен, у которого все корни $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *— различные вещественные числа, удовлетворяющие условию*

$$\alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < \alpha^{(1)},$$

и для целого q *справедливы неравенства*

$$\begin{cases} \alpha^{(k)} < q & \textit{при } k \geqslant k_0, \\ q < \alpha^{(k)} < q + 1 & \textit{при } k_0 > k \geqslant k_1, \\ \alpha^{(k)} > q + 1 & \textit{при } k_1 > k \geqslant 1, \end{cases}$$

тогда многочлен

$$g(x) = -f\left(q + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

имеет корни $\beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)} - q}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\begin{cases} \beta^{(k)} < 0 & \textit{при } k \geqslant k_0, \\ 1 < \beta^{(k)} & \textit{при } k_0 > k \geqslant k_1, \\ 0 < \beta^{(k)} < 1 & \textit{при } k_1 > k \geqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение леммы доказывается аналогично доказательству леммы 1. □

Теорема 3. *Для произвольной чисто-вещественной алгебраической иррациональности* α *степени* n *все её остаточные дроби* α_m, *начиная с некоторого номера* $m_0 + 1$, *являются приведенными алгебраическими иррациональностями степени* n.

Доказательство. Действительно, пусть $\alpha = \alpha^{(j)}$ и

$$\alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < \alpha^{(1)}$$

— вещественные корни целочисленного неприводимого многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0.$$

Пусть $q_0 = [\alpha]$, $k_{0,0} = k_0$ и $k_{1,0} = k_1$ определены как и в лемме 2 при $q = q_0$, тогда $k_{0,0} > j \geqslant k_{1,0}$ и многочлен

$$f_1(x) = -f\left(q_0 + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1} x^k$$

имеет корни

$$\alpha_1^{(n)} < \ldots < \alpha_1^{(2)} < \alpha_1^{(1)},$$

среди которых $n+1-k_{0,0}$ отрицательных корней, $k_{1,0}-1$ положительных, меньше 1 и $k_{0,0} - k_{1,0}$ положительных корней больше 1.

Заметим, что остаточная дробь $\alpha_1 = \alpha_1^{(j_1)}$ и $k_{0,0} - k_{1,0} \geqslant j_1 \geqslant 1$.

Пусть уже определен целочисленный многочлен $f_m(x)$ для остаточной дроби $\alpha_m = \alpha_m^{(j_m)}$, тогда, полагая $q = q_m = [\alpha_m]$, $k_{0,m} = k_0$ и $k_{1,m} = k_1$ определены как и в лемме 2, тогда $k_{0,m} > j_m \geqslant k_{1,m}$ и многочлен

$$f_{m+1}(x) = -f_m\left(q_m + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m+1} x^k$$

имеет корни

$$\alpha_{m+1}^{(n)} < \ldots < \alpha_{m+1}^{(2)} < \alpha_{m+1}^{(1)},$$

среди которых $n+1-k_{0,m}$ отрицательных корней, $k_{1,m}-1$ положительных, меньше 1 и $k_{0,m} - k_{1,m}$ положительных корней больше 1.

Заметим, что остаточная дробь $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+1}^{(j_{m+1})}$ и $k_{0,m} - k_{1,m} \geqslant j_{m+1} \geqslant 1$.

Из доказательства леммы 2 следует, что $j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_m \geqslant \ldots$; $k_{0,1} \geqslant$ $\geqslant k_{0,2} = k_{0,1} - k_{1,0} + 1 \geqslant \ldots \geqslant k_{0,m} = k_{0,m-1} - k_{1,m-1} + 1 \geqslant \ldots$.

Величины $k_{0,m}$, $k_{1,m}$ имеют простой смысл — числа $\alpha_m^{(\nu)}$ при $k_{0,m} > \nu \geqslant k_{1,m}$ являются $m-$ыми остаточными дробями для чисел $\alpha^{(\nu+j-j_m)}$. Так как из однозначности разложения числа в цепную дробь следует, что найдется m_0 такое, что неполные частные q_k при $0 \leqslant k < m_0 - 1$ одинаковые для чисел $\alpha^{(\nu)}$ при $k_2 \geqslant \nu \geqslant k_3$, $k_2 \geqslant j \geqslant k_3$ и неполное частное q_{m_0-1} для числа $\alpha = \alpha^{(j)}$ отлично от соответствующих неполных частных для чисел $\alpha^{(\nu)}$ при $k_2 \geqslant \nu \geqslant k_3$, то $k_{0,m_0-1} = k_{1,m_0-1} + 1$, $k_{0,m_0} = 2$, $k_{1,m_0} = 1$. Отсюда следует, что $\alpha_{m_0+1} = \alpha_{m_0+1}^{(1)}$ является приведенной алгебраической иррациональностью. □

Остановимся на описании целого класса приведенных кубических иррациональностей.

Рассмотрим при натуральном $p \geqslant 4$ многочлены

$$f(p,x) = x(x+1)(x-p) - 1 = x^3 - (p-1)x^2 - px - 1.$$

Утверждается, что положительный корень $\alpha(p)$ уравнения $f(p,x)=0$ является приведенной кубической иррациональностью.

Действительно, для многочлена $f(p,x)=x^3-(p-1)x^2-px-1$ имеем:

$$f(p,-1)=f(p,0)=f(p,p)=-1,\quad f(p+1)=p^2+3p+1>0,$$
$$f\left(p,-\frac{1}{2}\right)=\frac{2p+1}{8}-1>0,$$

поэтому $p+1>\alpha(p)=\alpha^{(1)}>p$, $-1<\alpha^{(3)}<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<\alpha^{(2)}<0$. Так как многочлен $f(p,x)$ не имеет рациональных корней, то он неприводим.

```
cfki1(p,n) := | a ← (−1  −p  −p+1  1)^T, q_{floor((n−1)/40),39} ← 0, q_{0,0} ← p, D^⟨0⟩ ← a, D^⟨n⟩ ← a
              | l0 ← 0, l1 ← 1, b ← p
              | for k ∈ 1..n−1
              |   | r ← b, a ← (−a3  −a3·3·r − a2  −a3·3·r^2 − a2·2·r − a1  −a3·r^3 − a2·r^2 − a1·r − a0)^T
              |   | d ← −a0
              |   | for j ∈ 1..3
              |   |   | m ← d, l ← aj
              |   |   | r ← m, m ← l, l ← r  if  m > l
              |   |   | while  m > 0
              |   |   |   r ← floor(l/m), r1 ← l − r·m, l ← m, m ← r1
              |   |   | d ← l
              |   | b ← 1, c ← 2, D^⟨k⟩ ← a
              |   | while  [(a3·c + a2)·c + a1]·c + a0 < 0
              |   |   b ← c, c ← 2·c
              |   | m ← b
              |   | while  m ≥ 1
              |   |   | r ← b + m, f ← [(a3·r + a2)·r + a1]·r + a0
              |   |   | b ← r  if  f < 0
              |   |   | c ← r  otherwise
              |   |   | m ← m/2
              |   | q_{l0,l1} ← b, l1 ← l1 + 1
              |   | l0 ← l0 + 1, l1 ← 0  if  l1 = 40
              | q
```

Рисунок 1.

На рисунке 1 приводится текст программы вычисления неполных частных приведенных кубических иррациональностей $\alpha(p)$.

Для заданного натурального $p\geqslant 4$ программа вычисляет n неполных частных разложения $\alpha(p)$ в непрерывную дробь в виде таблицы по 40 значений в одной строке.

3. Свойства матричных разложений

В этой работе мы будем рассматривать только неотрицательные целочисленные невырожденные матрицы.

Отметим несколько простейших свойств матричных разложений.

Лемма 3. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

— сходящиеся матричное разложение, $i_1 < \ldots i_n < \ldots$ — произвольная монотонная последовательность натуральных чисел и $i_0 = 0$. Если матрицы m_k заданы равенствами

$$m_k = \prod_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

то матричное произведение

$$\prod_{k=0}^{\infty} m_k$$

сходится к числу α.

Доказательство. Действительно, если

$$\prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = M_n \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} M_n,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha,$$

а, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A_{i_k-1}}{C_{i_k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{B_{i_k-1}}{D_{i_k-1}} = \alpha.$$

Но, применяя сочетательный закон матричного умножения, получим

$$\prod_{k=0}^{n} m_k = \prod_{k=0}^{n} \left(\prod_{j=i_k}^{i_{k+1}-1} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \right) = \prod_{k=0}^{i_{n+1}-1} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A_{i_{n+1}-1} & B_{i_{n+1}-1} \\ C_{i_{n+1}-1} & D_{i_{n+1}-1} \end{pmatrix} = M_{i_{n+1}-1},$$

поэтому матричное произведение

$$\prod_{k=0}^{\infty} m_k$$

сходится к числу α. $\square$

Лемма 4. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

— сходящиеся матричное разложение и

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \geqslant 0, \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0,$$

тогда матричное произведение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

сходится к числу $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$.

Доказательство. Действительно, если

$$\prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha,$$

а, следовательно,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA_n + bC_n & aB_n + bD_n \\ cA_n + dC_n & cB_n + dD_n \end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{aA_n + bC_n}{cA_n + dC_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\frac{A_n}{C_n} + b}{c\frac{A_n}{C_n} + d} = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = \lim_{n\to\infty} \frac{a\frac{B_n}{D_n} + b}{c\frac{B_n}{D_n} + d} = \lim_{n\to\infty} \frac{aB_n + bD_n}{cB_n + dD_n},$$

поэтому лемма полностью доказана, так как все матрицы неотрицательные и $\alpha > 0$. □

Лемма 5. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

— сходящиеся матричное разложение, тогда для любого $n > 0$ *матричное произведение*

$$\prod_{k=n}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

сходится к числу β_n *и* $\alpha = \frac{A_{n-1}\beta_n + B_{n-1}}{C_{n-1}\beta_n + D_{n-1}}$.

Доказательство. Действительно, утверждение леммы следует из предыдущей леммы при $a = A_{n-1}$, $b = B_{n-1}$, $c = C_{n-1}$ и $d = D_{n-1}$. □

Лемма 6. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

— сходящиеся матричное разложение, $i_1 < \ldots i_n < \ldots$ — произвольная монотонная последовательность неотрицательных целых чисел и

$$\begin{pmatrix} a_{i_j} & b_{i_j} \\ c_{i_j} & d_{i_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j & 0 \\ 0 & f_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

тогда матричное произведение

$$\prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=i_{j-1}+1}^{i_j-1} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix},$$

где $i_0 = -1$, сходится к числу α.

Доказательство. Действительно, пусть

$$M_n = \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix},$$

$$M'_m = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=i_{j-1}+1}^{i_j-1} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_m & B'_m \\ C'_m & D'_m \end{pmatrix}, \quad F_m = \prod_{j=1}^{m} f_j,$$

тогда

$$M_{i_m} = \begin{pmatrix} A_{i_m} & B_{i_m} \\ C_{i_m} & D_{i_m} \end{pmatrix} = F_m M'_m = \begin{pmatrix} F_m A'_m & F_m B'_m \\ F_m C'_m & F_m D'_m \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\alpha = \lim_{m\to\infty} \frac{A_{i_m}}{C_{i_m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{A'_m}{C'_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{B'_m}{D'_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{B_{i_m}}{D_{i_m}}$$

и лемма доказана. □

Лемма 7. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

— сходящиеся матричное разложение к иррациональному числу α, тогда все матрицы, входящие в разложение, — неособенные.

Доказательство. В самом деле, пусть матрица

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

— особенная. Тогда и матрица

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

также будет особенной, то есть $\frac{B_n}{D_n} = \frac{A_n}{C_n}$ или $C_n = mA_n$, $D_n = mB_n$. Вычисляя

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} & B_{n+1} \\ C_{n+1} & D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix},$$

убеждаемся, что $\frac{A_{n+1}}{C_{n+1}} = \frac{B_{n+1}}{D_{n+1}} = \frac{A_n}{C_n}$ и, вообще, $\frac{A_k}{C_k} = \frac{B_k}{D_k} = \frac{A_n}{C_n}$ при $k \geqslant n$, поэтому лемма доказана. □

Положим $\Delta_n = \det M_n = A_nD_n - B_nC_n$, $\delta_n = a_nd_n - b_nc_n$.

Лемма 8. *Пусть в бесконечном матричном произведении*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

все матрицы — неособенные, целочисленные, положительные с условием

$$\delta_k < 0, \quad \min\left(\frac{|\delta_n|}{a_nd_n}, \frac{|\delta_n|}{c_nb_n}\right) \leqslant \delta < 1,$$

тогда матричное произведение сходится.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что

$$\begin{gathered} \Delta_n = \det M_n = A_nD_n - B_nC_n = \\ = (A_{n-1}a_n + B_{n-1}c_n)(C_{n-1}b_n + D_{n-1}d_n) - \\ -(A_{n-1}b_n + B_{n-1}d_n)(C_{n-1}a_n + D_{n-1}c_n) = \\ = (A_{n-1}D_{n-1} - B_{n-1}C_{n-1})(a_nd_n - b_nc_n) = \Delta_{n-1}\delta_n. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что $\Delta_n = (-1)^{n+1}|\Delta_n| \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Рассмотрим разности $\frac{A_n}{C_n} - \frac{B_n}{D_n}$ при $n = 0, 1, \ldots$. Имеем:

$$\frac{A_n}{C_n} - \frac{B_n}{D_n} = \frac{\Delta_n}{C_nD_n} = \frac{\Delta_{n-1}\delta_n}{(C_{n-1}a_n + D_{n-1}c_n)(C_{n-1}b_n + D_{n-1}d_n)},$$

$$\left|\frac{A_n}{C_n}-\frac{B_n}{D_n}\right| \leqslant \frac{|\Delta_{n-1}|}{C_{n-1}D_{n-1}}\min\left(\frac{|\delta_n|}{a_n d_n}, \frac{|\delta_n|}{c_n b_n}\right) < \frac{|\Delta_{n-1}|\delta}{C_{n-1}D_{n-1}};$$

$$\frac{A_n}{C_n}-\frac{A_{n-1}}{C_{n-1}} = \frac{(A_{n-1}a_n+B_{n-1}c_n)C_{n-1}-A_{n-1}(C_{n-1}a_n+D_{n-1}c_n)}{C_nC_{n-1}} =$$
$$= \frac{c_n(B_{n-1}C_{n-1}-A_{n-1}D_{n-1})}{C_nC_{n-1}} = \frac{-c_n\Delta_{n-1}}{C_nC_{n-1}};$$

$$\frac{B_n}{D_n}-\frac{B_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{(A_{n-1}b_n+B_{n-1}d_n)D_{n-1}-B_{n-1}(C_{n-1}b_n+D_{n-1}d_n)}{D_nD_{n-1}} =$$
$$= \frac{b_n(A_{n-1}D_{n-1}-B_{n-1}C_{n-1})}{D_nD_{n-1}} = \frac{b_n\Delta_{n-1}}{D_nD_{n-1}};$$

$$\frac{A_n}{C_n}-\frac{B_{n-1}}{D_{n-1}} = \frac{(A_{n-1}a_n+B_{n-1}c_n)D_{n-1}-(C_{n-1}a_n+D_{n-1}c_n)B_{n-1}}{C_nD_{n-1}} =$$
$$= \frac{a_n(A_{n-1}D_{n-1}-B_{n-1}C_{n-1})}{C_nD_{n-1}} = \frac{a_n\Delta_{n-1}}{C_nD_{n-1}};$$

$$\frac{B_n}{D_n}-\frac{A_{n-1}}{C_{n-1}} = \frac{(A_{n-1}b_n+B_{n-1}d_n)C_{n-1}-(C_{n-1}b_n+D_{n-1}d_n)A_{n-1}}{D_nC_{n-1}} =$$
$$= \frac{-d_n(A_{n-1}D_{n-1}-B_{n-1}C_{n-1})}{D_nC_{n-1}} = \frac{-d_n\Delta_{n-1}}{D_nC_{n-1}}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$\frac{A_0}{C_0} < \frac{B_0}{D_0}, \quad \frac{A_{2k}}{C_{2k}} < \frac{B_{2k}}{D_{2k}}, \quad \frac{B_{2k+1}}{D_{2k+1}} < \frac{A_{2k+1}}{C_{2k+1}},$$
$$\left[\frac{A_0}{C_0};\frac{B_0}{D_0}\right] \supset \left[\frac{B_1}{D_1};\frac{A_1}{C_1}\right] \supset \left[\frac{A_2}{C_2};\frac{B_2}{D_2}\right] \supset \ldots \supset$$
$$\supset \left[\frac{A_{2k}}{C_{2k}};\frac{B_{2k}}{D_{2k}}\right] \supset \left[\frac{B_{2k+1}}{D_{2k+1}};\frac{A_{2k+1}}{C_{2k+1}}\right] \supset \left[\frac{A_{2k+2}}{C_{2k+2}};\frac{B_{2k+2}}{D_{2k+2}}\right] \supset \ldots$$

Таким образом, мы имеем стягивающуюся последовательность вложенных отрезков, а значит последовательность их концов сходится к общему пределу, что и доказывает утверждение леммы. □

Заметим, что из доказательства леммы следует, что имеем две монотонные последовательности дробей, сходящихся к α:

$$\frac{A_0}{C_0} < \frac{B_1}{D_1} < \frac{A_2}{C_2} < \ldots < \frac{A_{2k}}{C_{2k}} < \frac{B_{2k+1}}{D_{2k+1}} < \frac{A_{2k+2}}{C_{2k+2}} < \ldots, \tag{2}$$

$$\frac{B_0}{D_0} > \frac{A_1}{C_1} > \frac{B_2}{D_2} > \ldots > \frac{B_{2k}}{D_{2k}} > \frac{A_{2k+1}}{C_{2k+1}} > \frac{B_{2k+2}}{D_{2k+2}} > \ldots. \tag{3}$$

Рассмотрим следующую последовательность матриц:

$$M_n = \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{n+1}+(-1)^{n+1} & 2\cdot 2^n+(-1)^n \\ 2^{n+1} & 2^n \end{pmatrix} \quad (n \geqslant 0). \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что

$$M_0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_n = M_{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (n \geqslant 1).$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2^n + (-1)^n & 2 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1} \\ 2^n & 2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{n+1} + (-1)^{n+1} & 2 \cdot 2^n + (-1)^n \\ 2^{n+1} & 2^n \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$M_n = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^n$$

и матричное произведение

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

сходится к натуральному числу 2, то есть имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Последовательность матриц (4) и матричное произведение (5) демонстрируют, что не всякое матричное произведение можно перевести в обыкновенную цепную дробь.

Выделим класс матриц $\mathfrak{M}^+$ и подклассы $\mathfrak{M}^+(q)$, $\mathfrak{M}^\pm$, $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{M}^*(q)$ $(q \in \mathbb{N})$.

Определение 3. *Будем говорить, что целочисленная неотрицательная матриц $M \in \mathfrak{M}^+$, если выполнены условия*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; a \geqslant c \geqslant 0, \; b \geqslant d \geqslant 0, \quad \det M = ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Подкласс $\mathfrak{M}^\pm$ задается равенством

$$\mathfrak{M}^\pm = \left\{ M \in \mathfrak{M}^+ | \det M < 0 \right\}, \tag{7}$$

а подкласс $\mathfrak{M}^+(q)$ — равенством

$$\mathfrak{M}^+(q) = \left\{ M \in \mathfrak{M}^+ \left| \left[\frac{a}{c}\right] = \left[\frac{b}{d}\right] = q \right.\right\}, \tag{8}$$

Лемма 9. $\mathfrak{M}^+$ — *мультипликативная полугруппа.*
Для любых матриц $M, K, L \in \mathfrak{M}^\pm$ *справедливо включение*

$$M \cdot K \cdot L \in \mathfrak{M}^\pm.$$

Доказательство. Действительно, если

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad M, K \in \mathfrak{M}^+,$$

то

$$ae + bg \geqslant ce + dg \geqslant 0, \quad af + bh \geqslant cf + dh \geqslant 0, \quad \det MK = \det M \det K \neq 0,$$

поэтому $M \cdot K \in \mathfrak{M}^+$ и первое утверждение леммы доказано.

Если

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M \cdot K \cdot L,$$

то $a \geqslant c \geqslant 0$, $b \geqslant d \geqslant 0$ и $\det M \cdot K \cdot L < 0$ и лемма полностью доказана. □

Определение 4. *Будем говорить, что целочисленная неотрицательная матриц* $M \in \mathfrak{M}^*$, *если выполнены условия*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^\pm, \quad \left[\frac{a}{c}\right] = \left[\frac{b}{d}\right] \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Подкласс $\mathfrak{M}^*(q)$ *задается равенством*

$$\mathfrak{M}^*(q) = \left\{ M \in \mathfrak{M}^* \,\middle|\, \left[\frac{a}{c}\right] = \left[\frac{b}{d}\right] = q \right\}. \tag{10}$$

Ясно, что

$$\mathfrak{M}^* = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^*(q).$$

Лемма 10. *Пусть матрица*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^*(q)$$

и

$$K = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

— *произвольная невырожденная целочисленная матрица, удовлетворяющая условию* $\det K > 0$, a_1, b_1, c_1, $d_1 \geqslant 0$, *тогда* $M \cdot K \in \mathfrak{M}^*(q)$.

Доказательство. Действительно, из условия следует, что $a = qc + r$, $0 \leqslant r < c$, $b = qd + s$, $0 \leqslant s < d$. Далее имеем:

$$M \cdot K = \begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} q(ca_1 + dc_1) + ra_1 + sc_1 & q(cb_1 + dd_1) + rb_1 + sd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det M \cdot K < 0$, $0 \leqslant ra_1 + sc_1 < ca_1 + dc_1$, $0 \leqslant rb_1 + sd_1 < cb_1 + dd_1$, то

$$\left[\frac{aa_1 + bc_1}{ca_1 + dc_1}\right] = \left[\frac{ab_1 + bd_1}{cb_1 + dd_1}\right] = q$$

и утверждение леммы полностью доказано. □

Теорема 4. *Пусть в бесконечном матричном произведении*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} m_k, \quad m_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \tag{11}$$

все матрицы $m_k \in \mathfrak{M}^*$, *тогда матричное произведение сходится к числу* $\alpha > 1$.

Если число α *— иррациональное, то для любой матрицы* $m \in \mathfrak{M}^+ \setminus \mathfrak{M}^*$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *найдется* $t \geqslant n$ *такое, что*

$$m \prod_{k=n}^{t} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^*.$$

Доказательство. Положим $q_k = \left[\frac{a_k}{c_k}\right] = \left[\frac{b_k}{d_k}\right]$ и $\alpha_k = \left\{\frac{a_k}{c_k}\right\}$, $\beta_k = \left\{\frac{b_k}{d_k}\right\}$, тогда $a_k = (q_k + \alpha_k) \cdot c_k$, $b_k = (q_k + \beta_k)d_k$ и $\delta_k = a_k d_k - b_k c_k = c_k d_k(\alpha_k - \beta_k) < 0$. Поэтому

$$\min\left(\frac{|\delta_k|}{a_k d_k}, \frac{|\delta_k|}{c_k b_k}\right) = \min\left(\frac{\beta_k - \alpha_k}{q_k + \alpha_k}, \frac{\beta_k - \alpha_k}{q_k + \beta_k}\right) < \frac{\beta_k}{1 + \beta_k} < \frac{1}{2}$$

и по лемме 8 матричное произведение (11) сходится к числу $\alpha > q_0 \geqslant 1$.

Пусть

$$m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M_{n,t} = \prod_{k=n}^{t} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = M_{n-1}^{-1} M_t = \begin{pmatrix} A_{n,t} & B_{n,t} \\ C_{n,t} & D_{n,t} \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 5 имеем:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{A_{n,t}}{C_{n,t}} = \lim_{t \to \infty} \frac{B_{n,t}}{D_{n,t}} = \beta_n.$$

Так как α — иррациональное число, то и β_n — иррациональное число для любого натурального n.

Заметим, что

$$m \cdot M_{n,t} = \begin{pmatrix} aA_{n,t} + bC_{n,t} & aB_{n,t} + bD_{n,t} \\ cA_{n,t} + dC_{n,t} & cB_{n,t} + dD_{n,t} \end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{aA_{n,t} + bC_{n,t}}{cA_{n,t} + dC_{n,t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{aB_{n,t} + bD_{n,t}}{cB_{n,t} + dD_{n,t}} = \frac{a\beta_n + b}{c\beta_n + d} \notin \mathbb{Q},$$

поэтому найдется натуральное t_0 такое, что для любого $t \geqslant t_0$ выполняется равенство

$$\left[\frac{aA_{n,t} + bC_{n,t}}{cA_{n,t} + dC_{n,t}}\right] = \left[\frac{a\beta_n + b}{c\beta_n + d}\right] = \left[\frac{aB_{n,t} + bD_{n,t}}{cB_{n,t} + dD_{n,t}}\right],$$

что и доказывает утверждение теоремы, если положить

$$t = \begin{cases} t_0, & \text{при } \det m \cdot (-1)^{t_0-n} > 0, \\ t_0 + 1, & \text{при } \det m \cdot (-1)^{t_0-n} < 0. \end{cases}$$

□

Лемма 11. *Пусть матрица*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q),$$

тогда её можно представить в виде

$$M = \left(\prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot K \qquad (12)$$

и матрица

$$K = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^+ \setminus \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $M \in \mathfrak{M}^+(q)$, то

$$M = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ a - qc & b - qd \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a - qc & b - qd \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^+$$

и это представление единственное. Отметим, что $\max(c, d) > \max(a - qc, b - qd)$, $\max(a, b) \geqslant \max(c, d)$. Поэтому, если

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a - qc & b - qd \end{pmatrix} \in \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q),$$

то процесс выделения сомножителей вида

$$\begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

можно продолжить, но он оборвется за конечное число шагов. Оставшаяся матрица K, будет принадлежать множеству

$$\mathfrak{M}^+ \setminus \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q).$$

□

4. Алгоритм перевода матричного разложения в обыкновенную цепную дробь

Для $\alpha(p)$ рассмотрим матричное разложение (1) при $t = p$, $a = -p+1$, $b = -p$ и $c = -1$, получим

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha(p) \\ 1 \end{pmatrix} &= \prod_{k=0}^{\infty} \left(\begin{pmatrix} p & p^3+p^2+3 \\ 1 & p^2+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ 0 & 3k+1 \end{pmatrix} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \begin{pmatrix} p^2+p & p^3+p^2+3 \\ 1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2-p+9 & 2p^2-6p+6 \\ 2p^2+2p+2 & p^2-p+9 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} M(p,k), \qquad (13)
\end{aligned}$$

где

$$M(p,k) = \begin{pmatrix} p & p^3+p^2+3 \\ 1 & p^2+p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ 0 & 3k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2+p & p^3+p^2+3 \\ 1 & p \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} p^2-p+9 & 2p^2-6p+6 \\ 2p^2+2p+2 & p^2-p+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k(p) & B_k(p) \\ C_k(p) & D_k(p) \end{pmatrix},$$

$$A_k(p) = (27+9p+33p^2+32p^3+8p^4+10p^5+4p^6)k+$$
$$+9+5p+16p^2+16p^3+4p^4+5p^5+2p^6,$$
$$B_k(p) = (18+36p+12p^2+24p^3+8p^4+4p^5+2p^6)k+$$
$$+6+21p+5p^2+12p^3+4p^4+2p^5+p^6,$$
$$C_k(p) = (6+24p+26p^2+8p^3+10p^4+4p^5)k+$$
$$+4+13p+14p^2+4p^3+5p^4+2p^5,$$
$$D_k(p) = (27+9p+21p^2+8p^3+4p^4+2p^5)k+$$
$$+18+4p+11p^2+4p^3+2p^4+p^5.$$

В следующей программе на рисунке 2 реализован алгоритм перехода от матричного разложения $\alpha(5)$ к обычной непрерывной дроби.

Символьные вычисления дают следующие значения:

$$M(4,k) = \begin{pmatrix} 31311k + 15645 & 16226k + 8106 \\ 7686k + 3864 & 3983k + 2002 \end{pmatrix},$$
$$M(5,k) = \begin{pmatrix} 103647k + 51809 & 52248k + 26111 \\ 20526k + 10294 & 10347k + 5188 \end{pmatrix}$$

Значение $M(5,k)$ использовано в указанной программе.

```
cfki(n) := | M ← (1 0; 0 1), j ← 0, l ← 0
           | for k ∈ 0..n
           |   | M ← M·(103647·k + 51809  52248·k + 26111; 20526·k + 10294  10347·k + 5188)
           |   | A ← M_{0,0}, B ← M_{0,1}, C ← M_{1,0}, D ← M_{1,1}
           |   | r ← floor(A/C)
           |   | while r = floor(B/D)
           |   |   | r1 ← A − C·r, A ← C, C ← r1
           |   |   | r1 ← B − D·r, B ← D, D ← r1
           |   |   | q_{l,j} ← r, j ← j + 1
           |   |   | l ← l + 1, j ← 0  if j = 40
           |   |   | r ← floor(A/C), M ← (A B; C D)
           |   | a ← (A B C D)^T
           |   | d ← a_0
           |   | for kk ∈ 1..3
           |   |   | p ← d, nn ← a_kk
           |   |   | r ← p, p ← nn, nn ← r  if p > nn
           |   |   | while p > 0
           |   |   |    r ← floor(nn/p), r1 ← nn − r·p, nn ← p, p ← r1
           |   |   | d ← nn
           |   | M ← M·1/d
           | q
```

Рисунок 2.

Лемма 12. *Программа на рисунке 2 реализует алгоритм перевода матричного разложения в цепную дробь.*

Доказательство. Действительно, прежде всего заметим что

$$\left[\frac{103647k+51809}{20526k+10294}\right]=5+\left[\frac{1017k+319}{20526k+10294}\right]=5,$$
$$\left[\frac{52248k+26111}{10347k+5188}\right]=5+\left[\frac{513k+171}{10347k+5188}\right]=5$$

и

$$\left(\begin{array}{cc} 103647k+51809 & 52248k+26111 \\ 20526k+10294 & 10347k+5188 \end{array}\right)\in\mathfrak{M}^*,$$

поэтому на основании теоремы 4 матричное разложение

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{cc} 103647k+51809 & 52248k+26111 \\ 20526k+10294 & 10347k+5188 \end{array}\right)$$

сходится.

Далее заметим, что внешний цикл $for\, k\in 0..n$ реализует вычисление произведения

$$\prod_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{cc} 103647k+51809 & 52248k+26111 \\ 20526k+10294 & 10347k+5188 \end{array}\right)$$

и выделение произведения

$$\prod_{j=0}^{J}\left(\begin{array}{cc} q_j & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

с помощью внутреннего цикла $while\, r=floor\left(\frac{B}{D}\right)$.

Вспомогательный цикл $for\, kk\in 1..3$ позволяет уменьшить числа в матрице M, если это возможно. Согласно лемме 6 сокращение на общий делитель всех элементов матрицы не меняет значение матричного разложения. Поэтому на основании теоремы 4 и леммы 11 указанная программа осуществляет вычисление неполных частных. □

5. Результаты символьных расчетов

Символьные вычисления по программам на рисунках 1 и 2 показывают, что программы дают одни и те же неполные частные. Вычисление с помощью программы, основанной на матричном разложении, оказываются более быстрыми.

Вычисления $cfki(100)$ дает значения 592 неполных частных, а $cfki(200)$ уже — 1194 значений. Так как результаты представлены в виде матрицы, содержащий 40 элементов в каждой строке, то последние элементы последней строки могут быть нулевыми. Приведем распределение значений неполных частных с учетом указанных нулевых значений, которые не являются неполными частными.

Это распределение вычисленно с помощью программы на рисунке 4.

$$\mathrm{submatrix}(St,0,1,0,19) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 6 & 484 & 196 & 114 & 75 & 51 & 44 & 30 & 17 & 20 & 11 & 11 & 14 & 9 & 6 & 10 & 5 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{submatrix}(St,0,1,20,39) \rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 27 & 28 & 29 & 30 & 33 & 34 & 35 & 36 & 37 & 40 & 42 & 43 & 44 & 47 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{submatrix}(St,0,1,40,59) \rightarrow \begin{pmatrix} 54 & 55 & 60 & 63 & 68 & 78 & 79 & 82 & 84 & 87 & 93 & 95 & 97 & 111 & 120 & 123 & 128 & 129 & 134 & 140 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{submatrix}(St,0,1,60,75) \rightarrow \begin{pmatrix} 141 & 154 & 164 & 176 & 180 & 201 & 228 & 234 & 244 & 255 & 288 & 425 & 467 & 1333 & 1813 & 3139 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3.

```
R := cfki(200)

St := | t4000 ← 0
      | for k ∈ 0..29
      |   for j ∈ 0..39
      |     r ← R(k,j), t(r) ← t(r) + 1
      | j ← 0
      | for k ∈ 0..4000
      |   N(0,j) ← k, N(1,j) ← t(k), j ← j + 1  if  t(k) > 0
      | N
```

Рисунок 4.

В заключение авторы выражают свою глубокую благодарность профессорам Г. И. Архипову и В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подсыпанин В. Д. О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8. Вып. 3(23). С. 43—46.

2. Подсыпанин Е. В. О разложении иррациональностей высших степеней в обобщенную непрерывную дробь (по материалам В. Д. Подсыпанина) рукопись 1970 // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8. Вып. 3(23). С. 47—49.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Московский педагогический государственный университет
Поступило 10.01.2013