ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 18 Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2017-18-4-338-346

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

В. Н. Чубариков, М. Л. Шарапова (г. Москва)

Аннотация

В настоящей работе построены эффективные многомерные интерполяционные формулы для периодических функций, точные на классах многочленов Фурье. Эта работа продолжает исследования Н.М.Коробова [5], В.С.Рябенького [11], С.М.Воронина [8] и других учёных по применению теоретико-числового метода в приближённом анализе. Эти авторы число узлов рассматриваемых ими сеток брали равным простому числу в кольце целых рациональных чисел и в кольцах целых алгебраических чисел.

Здесь мы рассматриваем класс строго регулярных периодических функций $f(x_1,\dots,x_n)$, имеющих период единица по каждой переменной и разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье (см., например, [15], с.447) вида

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=-\infty}^{\infty}c(m_1,\dots,m_n)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_nx_n)},$$

где

$$c(m_1,\dots,m_n)=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 f(x_1,\dots,x_n)e^{-2\pi i(m_1x_1+\dots+m_nx_n)}\,dx_1\dots dx_n.$$

Далее, выбирая число точек решётки N в виде $N=N_1\dots N_n$, где $(N_s,N_t)=1$ при $s\neq t, 1\leq s,t\leq n$ и $N_s\asymp N^{1/n}, 1\leq n$, и используя китайскую теорему об остатках, строим интерполяционный многочлен вида

$$P(x_1,\dots,x_n)=\sum_{m_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{m_n=0}^{N_n-1}\tilde{c}(m_1,\dots,m_n)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots m_nx_n)},$$

где

$$c(m_1,\dots,m_n)=\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n}f\left(\frac{M_1^*k_1}{N_1},\dots,\frac{M_n^*k_n}{N_n}\right)e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^*m_1}{N_1}+\dots+\frac{M_n^*m_n}{N_n}\right)},$$

причём $N_sM_s=N, M_sM_s^*\equiv 1 \pmod{N_s}$.

Ключевые слова: теоретико-числовой метод в приближённом анализе, точки решётки, метод В.С.Рябенького, интерполяционный многочлен, кольца целых рациональных и целых алгебраических чисел, китайская теорема об остатках.

Библиография: 15 названий.

ON INTERPOLATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

V.N.Chubarikov, M.L.Scharapova (Moscow)

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант $\mathcal{N}$ 16-01-00-071

Abstract

In this paper we constructed effective multivariate interpolation formulas for periodic functions, which are the precise on the Fourier polynomial classes. This paper continues investigations by N.M.Korobov [5], V.S.Rjaben'kii [11], S.M.Voronin [8], and others scientists on the application of the number-theoretic methods in numerical analysis. These authors was given the number of knots of a network equals to a prime number in the ring of integer rational numbers and in rings of integer numbers in algebraic numbers.

Here we consider the class of strictly regular periodic functions $f(x_1, \ldots, x_n)$, having the period on of one the each variables, and expanding in the absolute convergent Fourier series (see, for example, [15], p. 447) of the form

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} c(m_1, \ldots, m_n) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n)},$$

where

$$c(m_1, \ldots, m_n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n) e^{-2\pi i (m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n)}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Further, we select the number of lattice points N in the form $N = N_1 \ldots N_n$, where $(N_s, N_t) = 1$ as $s \neq t, 1 \leq s, t \leq n$, and $N_s \asymp N^{1/n}, 1 \leq n$, and using the Chinesse theorem on remainders, we construct the interpolation polynomial of the form

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{m_n=0}^{N_n-1} \tilde{c}(m_1, \ldots, m_n) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots m_n x_n)},$$

where

$$c(m_1, \ldots, m_n) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \ldots, \frac{M_n^* k_n}{N_n}\right) e^{-2\pi i \left(\frac{M_1^* m_1}{N_1} + \cdots + \frac{M_n^* m_n}{N_n}\right)},$$

moreover $N_s M_s = N, M_s M_s^* \equiv 1 \pmod{N_s}$.

Keywords: the number-theoretic method in the numerical analysis, a lattice points, the V.S.Rjaben'kii method, the interpolation polynomial, rings of the integer rational and the integer algebraic numbers, the Chinesse theorem on remainders.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

В настоящей работе продолжены исследования В.С.Рябенького [11]по применению теоретико-числового метода к задаче интерполяции периодической функции многих переменных тригонометрическим многочленом. Этот многочлен называют интерполяционным, если при возрастании числа узлов интерполяции погрешность, т.е. разность между значением функции и рассматриваемым тригонометрическим многочленом, при каком-либо способе взятия предела стремится к нулю. Следуя Н.М.Коробову [5], в теоретико-числовом методе последовательность N чисел узлов интерполяции пробегала последовательность всех простых чисел. Здесь мы берем эту последовательность в виде

$$N = N_1 \ldots N_n, N_r \asymp N^{1/n}, (N_s, N_t) = 1, 1 \leq r, s, t \leq n, s \neq t,$$

где n — число переменных интерполируемой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Заметим, что условие $N_r \asymp N^{1/n}, 1 \leq r \leq n$, обеспечивает "равноправность" переменных $x_1, \ldots, x_n$, а условие $(N_s, N_t) = 1, 1 \leq s, t \leq n, s \neq t$, имеет арифметический характер и связано с применением китайской теоремы об остатках.

Для большей ясности изложения в качестве примера рассмотрим сначала случай функций одной переменной.

2. Одномерный случай

Пусть $f(x) \in E_1^\alpha, \alpha > 1$, и является периодической функцией, определенной на вещественной оси и имеющей ограниченную вариацию на периоде, равном 1. Тогда она разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье вида

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c(m)e^{2\pi imx}, \quad c(m) = c(m; f) = \int\limits_0^1 f(x)e^{-2\pi imx}\, dx.$$

Далее для любого натурального числа N определим функцию

$$F(x) = F_N(x) = \sum_{N/2<m\le N/2} \tilde{c}(m)e^{2\pi ix}, \quad \tilde{c}(m) = \tilde{c}(m; f) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)e^{-2\pi i\frac{mk}{N}}.$$

Пусть $R(x) = f(x) - F(x)$ погрешность при замене функции $f(x)$ на функцию $F(x)$. Оценим сверху величины $|R(x)|$ и

$$\Delta_2 = \sup_f \int\limits_0^1 |R(x)|^2\, dx,$$

где f принадлежит определённому выше классу функций.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема А. $\Delta_2 \ll N^{1-2\alpha}$.

Доказательство. Выразим коэффициенты $\tilde{c}(m)$ тригонометрического многочлена $F(x)$ через коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Для любых целых k и m имеем

$$c\left(m; e^{2\pi ikx}\right) = \int\limits_0^1 e^{2\pi i(k-m)x}\, dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k = m, \\ 0, & \text{если} \quad k \ne m, \end{cases}$$

$$\tilde{c}\left(m; e^{2\pi ikx}\right) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} e^{2\pi i\frac{(k-m)l}{N}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k \equiv m \pmod N, \\ 0, & \text{если} \quad k \not\equiv m \pmod N. \end{cases}$$

Таким образом, используя последние соотношения, находим

$$\tilde{c}(m) = \tilde{c}(m; f) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)e^{-2\pi i\frac{km}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c(l)e^{2\pi i\frac{kl}{N}}e^{-2\pi i\frac{km}{N}} =$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{c(l)}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i\frac{k(l-m)}{N}} = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\equiv m \pmod N}}^{+\infty} c(l).$$

Равенство Ляпунова–Парсеваля даёт

$$\int\limits_0^1 |R(x)|^2\, dx = \sum_{N/2<m\le N/2} |\tilde{c}(m) - c(m)|^2 + \sum_{-N/2\le m} |c(m)|^2 + \sum_{m>N/2} |c(m)|^2.$$

Отсюда, используя предыдущее равенство, получим

$$\int\limits_0^1 |R(x)|^2\, dx = \sum_{-N/2<m\le N/2}\left|\sum_{\substack{l=-\infty \\ l\equiv m \pmod N}}^{\infty}{}' c(l)\right|^2 +$$

$$+\sum_{m\le -N/2}|c(m)|^2+\sum_{m>N/2}|c(m)|^2=R_1+R_2+R_3,$$

где штрих в суммировании означает, что $l\neq m$.

Следовательно,

$$R_1=\sum_{-N/2<m\le N/2}|\sum_{|q|\ge 1}c(Nq+m)|^2\ll\sum_{0\le m\le N/2}\left|\sum_{q\ge 1}\frac{1}{(Nq-m)^{\alpha}}\right|^2\ll N^{-2\alpha+1},$$

$$R_2+R_3\ll N^{-2\alpha+1}.$$

Теорема доказана.

Теорема Б. *Справедлива оценка*

$$|R(x)|\ll N^{-\alpha+1}.$$

Доказателььство. Имеем

$$R(x)=\sum_{-N/2<m\le N/2}(c(m)-\tilde c(m))e^{2\pi ix}+\sum_{m\le -N/2}c(m)e^{2\pi imx}+\sum_{m>N/2}c(m)e^{2\pi imx}.$$

Поскольку

$$\tilde c(m)-c(m)=\sideset{}{'}\sum_{\substack{l=-\infty\\ l\equiv m\pmod N}}^{+\infty}c(l),$$

отсюда находим

$$|R(x)|\le\sum_{|m|\le N/2}|c(m)-\tilde c(m)|+\sum_{|m|\ge N/2}|c(m)|\ll N^{-\alpha+1}.$$

Теорема доказана.

3. Многомерный случай

Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n)$, имеющая период 1 по каждой переменной, разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=-\infty}^{\infty}c(m_1,\dots,m_n)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_nx_n)},\tag{1}$$

причём будем предполагать, что $f\in E_n^{\alpha},\alpha>1$, то есть для всякого набора $(m_1,\dots,m_n)\in\mathbf{Z}^n$, справедливо неравенство

$$|c(m_1,\dots,m_n)|\le(\bar m_1\dots\bar m_n)^{-\alpha},\quad \bar m=\max\{1,|m|\},\tag{2}$$

и коэффициенты Фурье определяются равенствами

$$c(m_1,\dots,m_n)=c(\bar m;f)=\int\limits_0^1\cdots\int\limits_0^1 f(x_1,\dots,x_n)e^{-2\pi i(m_1x_1+\dots+m_nx_n)}\,dx_1\dots dx_n.\tag{3}$$

Пусть, далее, $N=N_1\dots N_n$, причём $N_r\asymp N^{1/n},r=1,\dots,n,(N_s,N_t)=1$ при $s\neq t,1\le s,t\le n$. Наконец, найдем для M_s, определяемого условием $M_sN_s=N$, вычеты

M_s^* из сравнения $M_s\dot{M}_s^* \equiv 1 \pmod{N_s}, 1 \le s \le n$. Из китайской теоремы об остатках любой вычет x по модулю N единственным способом представляется в виде

$$x \equiv M_1M_1^*x_1 + \cdots + M_nM_n^*x_n, \tag{4}$$

где вычеты x_r пробегают все классы вычетов по модулю $N_r, r = 1, \ldots, n$.

Пусть $\min\{N_1, \ldots, N_n\} = L$. Определим при $|m_1| \le N_1, \ldots, |m_n| \le N_n$, набор чисел

$$\tilde{c}(m_1, \ldots, m_n) = \tilde{c}(\bar{m}) = \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^*k_1}{N_1}, \ldots, \frac{M_n^*k_n}{N_n}\right)\times$$

$$\times e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^*m_1k_1}{N_1}+\cdots+\frac{M_n^*m_nk_n}{N_n}\right)}, \tag{5}$$

функцию

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{-N_1/2<m_1\le N_1/2}\cdots\sum_{-N_n/2<m_n\le N_n/2}\tilde{c}(m_1, \ldots, m_n)e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)}. \tag{6}$$

Положим

$$R(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_n). \tag{7}$$

и

$$\Delta_2 = \sup_{f\in E_n^\alpha}\int_0^1\cdots\int_0^1 |R(x_1, \ldots, x_n)|^2\ dx_1\ldots dx_n. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть $f \in E_n^\alpha$. Тогда тригонометрический многочлен $F(x_1, \ldots, x_n)$, определённый равенством (6), является интерполяционным и справедлива оценка $\Delta_2 \ll N^{2(1-\alpha)/n}$.*

Доказательство. Пользуясь равенством Ляпунова–Парсеваля, находим

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 |R(x_1, \ldots, x_n)|^2\ dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \sum_{-N_1/2<m_1\le N_1}\cdots\sum_{-N_n/2<m_n\le N_n}|\tilde{c}(m_1, \ldots, m_n) - c(m_1, \ldots, m_n)|^2 +$$

$$+\sum_{\substack{m_1\\ \exists s:|m_s|>L_s}}\cdots\sum_{m_n}|c(m_1, \ldots, m_n)|^2.$$

Имеем для коэффициентов Фурье функции $f(\bar{\mathbf{x}})$ и тригонометрического многочлена $F(\bar{\mathbf{x}})$ при $k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}$ следующие соотношения

$$c(\bar{\mathbf{m}}; e^{2\pi i(\bar{\mathbf{k}},\bar{\mathbf{x}})}) = \int_0^1 e^{2\pi i(\bar{\mathbf{k}}-\bar{\mathbf{m}},\bar{\mathbf{x}})}\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{m}},\\ 0, & \text{если} \quad \bar{\mathbf{k}} \ne \bar{\mathbf{m}},\end{cases}$$

$$\tilde{c}(\bar{\mathbf{m}}; e^{2\pi i(\bar{\mathbf{k}},\bar{\mathbf{x}})}) = \frac{1}{N}\sum_{l_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{l_n=0}^{N_n-1} e^{2\pi i\left(\frac{M_1^*(k_l-m_1)l_1}{N_1}+\cdots+\frac{M_n^*(k_n-m_n)l_n}{N_n}\right)} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \bar{\mathbf{k}} \equiv \bar{\mathbf{m}} \pmod{\bar{\mathbf{N}}},\\ 0, & \text{если} \quad \bar{\mathbf{k}} \not\equiv \bar{\mathbf{m}} \pmod{\bar{\mathbf{N}}},\end{cases}$$

где выражение $\bar{\mathbf{k}} \equiv \bar{\mathbf{m}} \pmod{\bar{\mathbf{N}}}$ означает, что выполняются n сравнений вида $k_s \equiv m_s \pmod{N_s}$, $\quad s = 1, \ldots, n$.

Наконец, имеем

$$\tilde{c}(\bar{\mathbf{m}}) = \tilde{c}(\bar{\mathbf{m}}; f) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^* k_1}{N_1}, \ldots, \frac{M_n^* k_n}{N_n}\right) \exp\left\{-2\pi i \sum_{s=1}^{n} \frac{M_s^* k_s m_s}{N_s}\right\} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} \left(\sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{+\infty} c(\bar{\mathbf{l}}) \exp\left\{2\pi i \sum_{s=1}^{n} \frac{M_s^* k_s l_s}{N_s}\right\}\right) \exp\left\{-2\pi i \sum_{s=1}^{n} \frac{M_s^* k_s m_s}{N_s}\right\} =$$

$$= \sum_{l_1=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{l_n=-\infty}^{N_n} c(\bar{\mathbf{l}}) \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n} \exp\left\{2\pi i \sum_{s=1}^{n} \frac{M_s^* k_s (l_s - m_s)}{N_s}\right\} =$$

$$= \sum_{l_1 \equiv m_1 \pmod{N_1}} \cdots \sum_{l_n \equiv m_n \pmod{N_n}} c(l_1, \ldots, l_n).$$

Таким образом, получим

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |R(x_1, \ldots, x_n)|^2 \, dx_1 \ldots dx_n = R_1 + R_2,$$

где

$$R_1 = \sum_{-N_1/2 < m_1 \leq N_1/2} \cdots \sum_{-N_n < m_n \leq N_n/2} \left| \sum_{\substack{l_1 \equiv m_1 \pmod{N_1} \\ l_1 \neq m_1}} \cdots \sum_{\substack{l_n \equiv m_n \pmod{N_n} \\ l_n \neq m_n}} c(l_1, \ldots, l_n) \right|^2,$$

$$R_2 = \sum_{\substack{m_1 \\ \exists s: |m_s| \geq N_s/2}} \cdots \sum_{m_n} |c(m_1, \ldots, m_n)|^2.$$

Сначала оценим R_1. Находим

$$R_1 \ll \sum_{-N_1 < m_1 \leq N_1/2} \cdots \sum_{-N_n/2 < m_n \leq N_n/2} \left| \sum_{q_1=1}^{+\infty} \cdots \sum_{q_n=1}^{+\infty} (\overline{N_1 q_1 + m_1} \ldots \overline{N_n q_n + m_n})^{-\alpha} \right|^2,$$

Поскольку при $N_s \geq 1$ и $m_s \geq 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$

$$\sum_{q_s=1}^{+\infty} (\overline{N_s q_s + m_s})^{-\alpha} \leq \frac{1}{(N_s + m_s)^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(N_s x + m_s)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{1}{N_s^\alpha},$$

получим

$$R_1 \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^n N^{1-2\alpha}.$$

Теперь оценим R_2. Имеем

$$R_2 \ll \frac{n}{\alpha - 1} N^{2(1-\alpha)/n}.$$

Теорема 2. *Пусть $f \in E_n^\alpha$. Тогда тригонометрический многочлен $F(x_1,\ldots,x_n)$, определённый равенством (6), является интерполяционным и для функции $R(x_1,\ldots,x_n)$, определённой равенством (7), справедлива оценка $R(x_1,\ldots,x_n) \ll N^{(1-\alpha)/n}$.*

Доказательство. По формуле (7) имеем

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{-N_1/2<m_1\le N_1/2} \cdots \sum_{-N_n/2<m_n\le N_n/2} \tilde{c}(m_1,\ldots,m_n)e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)},$$

где

$$\tilde{c}(m_1,\ldots,m_n) = \tilde{c}(\bar{m}) = \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n} f\left(\frac{M_1^*k_1}{N_1},\ldots,\frac{M_n^*k_n}{N_n}\right)\times$$
$$\times e^{-2\pi i\left(\frac{M_1^*m_1k_1}{N_1}+\cdots+\frac{M_n^*m_nk_n}{N_n}\right)}.$$

Отсюда получим

$$|R(x_1,\ldots,x_n)| \le R_1 + R_2,$$

где

$$R_1 = \sum_{-N_1/2<m_1\le N_1/2} \cdots \sum_{-N_n<m_n\le N_n/2} \left| \sum_{\substack{l_1\equiv m_1 \pmod{N_1}\\ l_1\ne m_1}} \cdots \sum_{\substack{l_n\equiv m_n \pmod{N_n}\\ l_n\ne m_n}} c(l_1,\ldots,l_n)\right|,$$

$$R_2 = \sum_{\substack{m_1\\ \exists s:|m_s|\ge N_s/2}}\cdots\sum_{m_n} |c(m_1,\ldots,m_n)|.$$

Наконец, поскольку $f \in E_n^\alpha$, находим

$$R_1 \ll \sum_{-N_1<m_1\le N_1/2} \cdots \sum_{-N_n/2<m_n\le N_n/2} \left(\sum_{q_1=1}^{+\infty}\cdots\sum_{q_n=1}^{+\infty}(\overline{N_1q_1+m_1}\ldots\overline{N_nq_n+m_n})^{-\alpha}\right).$$

Пользуясь оценкой

$$\sum_{q_s=1}^{+\infty}(\overline{N_sq_s+m_s})^{-\alpha} \le \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{N_s^\alpha},$$

получим

$$R_1 \le \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^n N^{1-\alpha}.$$

Теперь оценим R_2. Имеем

$$R_2 \ll \frac{n}{\alpha-1}N^{(1-\alpha)/n}.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

Отметим, что в настоящей работе в теоретико-числовом методе взяты простейшие узлы интерполяции в многомерном случае, обеспечивающие интерполяционный характер рассматриваемых формул, поэтому результаты теорем 1 и 2 могут быть улучшены. Естественно, если известны условия “неравноправия” переменных, то изменяя соотвествующие условия порядка, приведенные выше, в этом случае получим интерполяционные формулы, в которых степени интерполяционных тригонометрических многочленов по различным переменным будут отличаться друг от друга.

Другая сторона, связанная с арифметикой количества узлов интерполяции и применением китайской теоремы об остатках, также может быть модифицирована для большей привязки к условию решаемой задачи.

Наконец, последнее замечание касается использования алгебраических полей, более точно, арифметики колец целых чисел в них. Здесь будут продолжены исследования китайских математиков Хуа Ло-кена [6] и Ван Юаня [7], а также развита теория С.М.Воронина [8], продолженная в работах Н.Т.Темиргалиева.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2-е изд., М.: Наука, 1980, 144 с.

2. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях, М.: Гостехиздат, 1950, гл.III.

3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа, М.: Наука, 1986, 744 с.

4. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы: Учеб.пособие., М.: Наука, 1987, 600 с.

5. *Коробов Н. М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе, МЦНМО, 2004, 288 с.

6. *Hua L.-K.* Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.

7. *Wang Y.* Selected Papers. Bejing, 1999, pp. 458.

8. *Воронин С. М.* Избранные труды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006. 480 с.

9. *Архипов Г. И.* Избранные труды. Орел: Изд-во Орловского гос.ун-та, 2013. 464 с.

10. *Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A.* Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 c.

11. Рябенький В. С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // ДАН СССР. — 1960. — Т.131, № 5. — С.1025-1027.

12. Чубариков В. Н. Арифметические суммы от значений полинома// Докл. РАН — 2016. — Т.466, № 2. — С.152-153.

13. Чубариков В. Н., Шарапова М. Л. Об одной кубатурной формуле для периодических функций// Вестн. Моск. ун-та. Сер.I, Математика, механика. 2017. № 6. 59-62.

14. Чубариков В. Н., Шарапова М. Л. Об аналоге квадратуры Гаусса для периодических функций// Вестн. кибернетики. 2017. **28**, № 2. 60-65.

15. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов, 4-е изд., испр. — М: Дрофа, 2004. 640 с.

REFERENCES

1. [1]IMV *Vinogradov I. M.* Method of trigonometric sums in Number Theory, 2-nd edition, M.: Nauka, 1980, pp.144.

2. [2]ANK *Krylov A. N.* Lectures on numerical calculations, M.: Gostehizdat, 1950, ch.III.(in Russian).

3. [3]KIB *Babenko K. I.* Founndations of numerical analysis, M.: Nauka, 1986, pp. 744.(in Russian).

4. [4]BGK *Bahvalov N. S., Gidkov N. P., Kobel'kov G. M.* Numerical methods: Text-book, M.: Nauka, 1987, pp. 600.(in Russian).

5. [5]NMK *Korobov N. M.* Number theoretical methods in numerical analysis, MZNMO, 2004, pp. 288.(in Russian).

6. [6]LKH *Hua L.-K.* Selected Papers. New York Inc.: Springer Verlag, 1983, pp. 888.

7. [7]WY *Wang Y.* Selected Papers. Bejing, 1999, pp. 458.(in Chinesse).

8. [8]SMV *Voronin S. M.* Selected Papers. M.: Publ. N.E.Bauman MGTU, 2006. pp. 480.(in Russian).

9. [9]Ar *Arkhipov G. I.* Selected Papers. Orel: Publ. Or'el State Univ., 2013. pp. 464.(in Russian).

10. [10]ACK *Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A.* Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39. Berlin, New York, 2004. 554 c.

11. [11]R Ryaben'kii V. S. On tables and interpolation of functions from some class// DAN SSSR . — 1960. — V.131, № 5. — p.1025-1027.

12. [12]Ch4 Chubarikov V. N. Arithmetical sums from polynomial values// Doklady RAS — 2016. — V.466, № 2. — p.152-153.

13. [13]Ch5 Chubarikov V. N., Scharapova M. L. On a cubature formulae for periodic functions// Bull. Moscow Univ. Ser.I, Math, mech. 2017. № 6. p. 59-62.

14. [14]CS Chubarikov V. N., Scharapova M. L. On analogue of .Gaussian quadrature for periodic functions// Bull. of Cybernetics. 2017. **28**, № 2, p. 60-65.(in Russian).

15. [15] ASC *Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N.* Lectures on mathematical analysis: University text-book, 4-th edition. — M: Drofa, 2004. pp. 640. (in Russian).

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет
Получено 11.12.2017