CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Firenze University Press: E-Journals

Form@re
Open Journal per la formazione in rete

articoli

Mediazione semiotica: dalle proprietà della moltiplicazione alle espressioni aritmetiche

Semiotic mediation: from multiplication properties to arithmetical expressions

Andrea Maffia[a], Maria Alessandra Mariotti[b]

[a] *Università di Modena e Reggio Emilia, andrea.maffia@unimore.it*
[b] *Università di Siena, mariotti21@unisi.it*

Abstract

La moltiplicazione viene presentata presto nella scuola primaria, ma le sue proprietà sono introdotte solo dopo che le cosiddette tabelline sono state memorizzate. Nell'articolo si presenta un *teaching experiment* volto a introdurre precocemente le proprietà della moltiplicazione per facilitare la memorizzazione di fatti moltiplicativi. L'esperimento è centrato sull'uso di un artefatto costruito sul modello rettangolare della moltiplicazione. L'attività degli studenti è progettata e analizzata nel quadro della Teoria della Mediazione Semiotica (TMS). Lo sviluppo del significato relazionale delle espressioni aritmetiche viene mostrato attraverso la concatenazione di rappresentazioni che vanno da segni strettamente legati all'attività con l'artefatto fino a segni matematici. In particolare, si evidenzia il ruolo dell'insegnante nello sviluppo del processo di mediazione semiotica.

Parole chiave: tabelline; proprietà distributiva; mediazione semiotica; rettangoli.

Abstract

Multiplication is introduced early in primary school, but its properties are usually introduced after the rote memorization of multiplicative facts. In this paper we present a teaching experiment aimed to early introducing arithmetical properties of multiplication. It is realized through an artefact built on the rectangle model for multiplication. Children activity is designed and analyzed using Theory of Semiotic Mediation. The development of the relational meaning of arithmetical expressions is shown through the enchaining of representations from signs related to the activity with the artefact to mathematical ones. In particular, the role of the teacher in the process of semiotic mediation results as crucial.

Keywords: multiplicative fact; distributive property; semiotic mediation; rectangles.

CC BY-NC-ND

1. Proprietà delle operazioni

Seppure avversata dalla ricerca didattica, è diffusa in molti Paesi e certamente ben consolidata in Italia la tradizione di far imparare a memoria le cosiddette tabelline alla fine della seconda primaria; tale tradizione va di pari passo con il luogo comune per cui “se non si imparano presto, le tabelline non si impareranno mai”. Di qui nasce la pratica didattica della memorizzazione meccanica della tavola pitagorica, discussa e criticata in letteratura sia dal punto di vista cognitivo (Butterworth, Marchesini & Girelli, 2003) sia metacognitivo (Zan, 1998).

Il problema della memorizzazione della tavola pitagorica può essere considerato un caso particolare del problema della automatizzazione di formule per il calcolo e della necessità di sviluppare, a lato dei processi di memorizzazione, competenze metacognitive[1] che permettano all’allievo di gestire in modo efficace le proprie risorse, ivi compresa la possibilità di ricostruire l’informazione qualora non fosse disponibile in memoria (Maffei & Mariotti, 2008).

In questa prospettiva, le proprietà delle operazioni possono essere usate per ricostruire risultati di moltiplicazioni difficili basandosi sui risultati di quelle più semplici. Questa strategia può essere particolarmente utile quando le tabelline non sono ancora completamente memorizzate. In altre parole, l’introduzione precoce delle proprietà delle operazioni può promuovere strategie flessibili che possono – almeno inizialmente – sostituire una memorizzazione meccanica, offrendo altresì risorse efficaci per lo sviluppo di competenze metacognitive.

L’uso delle proprietà delle operazioni richiede un approccio relazionale al calcolo così da stabilire l’equivalenza tra diverse procedure; tale equivalenza nasce mettendo in relazione due espressioni aritmetiche che esprimono, attraverso strutture diverse, procedure di calcolo con lo stesso risultato. Nel mondo, le proprietà delle operazioni sono tradizionalmente introdotte con rappresentazioni grafiche: i rettangoli sono stati ampiamente utilizzati come modello per la moltiplicazione (Izsák, 2005), dagli “Elementi” di Euclide ai moderni libri di testo. In linea con tale tradizione, abbiamo sviluppato un intervento didattico centrato sull’uso di uno strumento, le Tabelline geometriche (Bruscaglioni, Ferri & Mattiassich, 2000), che materializza il modello classico dei numeri rettangolari. Il quadro teorico nel quale si sviluppa l’esperienza è quello della Teoria della Mediazione Semiotica, nel seguito TMS (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; 2009), che fornisce un modello per il processo di insegnamento-apprendimento basato sulle potenzialità didattiche offerte dall’uso di un artefatto per costruire collettivamente un significato matematico.

Dopo un’introduzione che delinea gli elementi chiave del quadro teorico, descriveremo le tappe salienti dell’evoluzione, così come appare nei compiti svolti dagli allievi e nelle discussioni in classe, del significato di espressione aritmetica: l’emergere del significato di espressioni aritmetiche come rappresentazione numerica delle operazioni svolte sull’artefatto e lo sviluppo del significato di tali rappresentazioni verso quello di espressioni simboliche relazionali che rappresentano la proprietà distributiva.

[1] “Le abilità metacognitive riguardano la gestione delle risorse (cognitive). Tale gestione si articola in due momenti:
- la consapevolezza delle proprie risorse;
- la regolazione del comportamento in base a tali risorse (cioè l’attivazione di processi di controllo)” (Zan, 2002, p. 4).

2. Quadro teorico

La TMS propone un modello del processo di insegnamento-apprendimento basato sulla possibilità di ricontestualizzare i concetti matematici mettendo al centro dell'attenzione uno strumento e i suoi modi d'uso, come mediatori tra pratica e teoria, tra significati spontanei e matematici (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Prendendo una prospettiva a un tempo didattica e semiotica, elabora il costrutto della mediazione semiotica di Vygotskij (1978) e in particolare ipotizza che lo sviluppo dei significati emergenti dalle attività con strumenti possa fornire la base potenziale per la costruzione, opportunamente guidata, di conoscenze matematiche.

2.1. Strumenti e segni nella mediazione semiotica

L'elemento chiave nella dialettica tra teoria e pratica è costituito dagli strumenti che svolgono una duplice funzione: da un lato, orientati esternamente, permettono l'azione e di conseguenza la soluzione di un problema pratico, dall'altro, orientati internamente, controllano tale azione e concorrono alla costruzione di significati.

Strumenti e segni sono per Vygotskij prodotti culturali e sono parte integrante dell'attività sociale nella quale si espleta il loro funzionamento; oltre il linguaggio, Vygotskij stesso cita il conteggio come esempio riferito alla matematica (Vygotskij, 1974/2010).

È proprio il caso del conteggio e in particolare l'uso dell'abaco che risulta particolarmente calzante per descrivere lo sviluppo che dall'uso di uno strumento può portare alla costruzione di una teoria matematica. La storia mostra che l'attività con lo strumento, seppur fondamentale, non è di per sé sufficiente alla costruzione del sapere matematico. L'uso dell'abaco è stato solo l'origine del processo, mentre un passo cruciale è dato dalla transizione dall'uso dell'abaco per rappresentare quantità, alla registrazione su carta, e in particolare l'introduzione del segno grafico "0" per indicare l'asta vuota. La transizione dall'uso dell'artefatto alla scrittura da esso derivata ha rappresentato l'elemento chiave nell'evoluzione dal contare pratico alla teoria della rappresentazione dei numeri (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Rotman, 1987). In generale, la produzione di un segno, grafico o di altra natura, permette l'emergere di significati che, pur mantenendo una relazione con l'azione mediata dallo strumento, sono passibili di evolvere, fino a guadagnare tanta autonomia da poter essere usati per la soluzione di problemi diversi da quelli che l'hanno originato. Seguendo Vygotskij, possiamo dire che l'internalizzazione del segno prodotto in relazione all'uso dello strumento concorre alla formazione di concetti che trascendono lo strumento stesso (Vygotskij, 1978).

3. Elementi chiave del modello della Teoria della Mediazione Semiotica (TMS)

Abbiamo introdotto le ipotesi di base del modello della TMS, di seguito accenniamo agli elementi chiave necessari per discutere i risultati poi presentati.

3.1. Distinzione artefatto-strumento

Abbiamo fin qui parlato di strumenti e delle loro potenzialità (didattiche), ma la nostra discussione e la coerenza con la letteratura richiedono l'introduzione di una distinzione che dia conto di due elementi chiave dell'idea di strumento che useremo.

Da un lato, consideriamo l'oggetto in sé (si può trattare di un oggetto materiale come un cacciavite o un compasso, ma anche un elemento virtuale come un comando di software); dall'altro consideriamo le diverse modalità d'uso che possono essere messe in atto per ottenere un particolare effetto/prodotto tramite l'oggetto. Seguendo Rabardel (1995) useremo il termine "artefatto" per identificare l'oggetto in sé e "strumento" per parlare del costrutto mentale costituito dall'artefatto e dagli schemi d'uso costruiti da un dato soggetto in rapporto all'artefatto e alle situazioni.

Questa distinzione risulta utile per analizzare il processo che determina l'appropriazione di schemi d'uso efficaci rispetto ad artefatti complessi e compiti diversificati[2], appare necessaria ogni qual volta si intenda sfruttare il potenziale didattico di un artefatto.

3.2. Potenziale semiotico

Nella classe, la richiesta di usare un artefatto in relazione a un compito specifico determina il modo in cui è effettivamente usato dagli studenti, e dunque i significati che dall'attività con esso possono emergere. Tali significati possono richiamare per l'esperto (l'insegnante) significati matematici e dunque conoscenze che possono essere obiettivi didattici di un intervento.

Si definisce potenziale semiotico di un artefatto la duplice relazione che lo lega da un lato con i significati personali degli allievi, così come emergono nelle attività di classe, e dall'altro con i significati matematici evocati (agli occhi dell'esperto) dall'uso dell'artefatto. In questo senso, l'analisi dei modi d'uso di un artefatto in relazione a compiti specifici diventa un elemento chiave della pianificazione di un intervento didattico centrato sull'uso dell'artefatto stesso. La sequenza di attività da presentare agli allievi, così come l'organizzazione di tali attività, deve basarsi sull'analisi del potenziale dell'artefatto in modo che i significati emergenti nello svolgimento del compito con l'artefatto possano svilupparsi acquisendo, anche per gli allievi, lo status di significati matematici.

3.3. Ciclo didattico

Usando un dato strumento si costruiscono significati legati a esso e al suo uso: le attività semiotiche libere o programmate (dialogo, scrittura di testi, conversazioni) che accompagnano o seguono l'azione con l'artefatto non solo rivelano l'emergere di tali significati, ma costituiscono, in una prospettiva vygotskiana, il contesto sociale nel quale i significati evolvono.

"Nello sviluppo culturale del bambino ogni funzione compare due volte, su due piani: dapprima compare sul piano sociale, poi sul piano psicologico. Prima compare tra due persone, sotto forma di categoria interpsicologica, poi all'interno del bambino, come categoria intrapsicologica" (Vygotskij, 1974/2010, p. 28).

Assumere questo duplice processo come modello per l'apprendimento significa distinguere i ruoli giocati da allievi e insegnante, in particolare riconoscere un ruolo specifico al docente come guida del processo di passaggio dal piano interpersonale a quello intrapersonale. La transizione dai significati personali a quelli matematici, che

[2] Tale distinzione risulta fondamentale nel caso di artefatti tecnologici complessi in cui le modalità d'uso possono essere non direttamente identificabili dall'allievo. In questo senso uno stesso artefatto può corrispondere a strumenti diversi a seconda del soggetto che lo usa. Un'analisi più dettagliata dei risvolti didattici di questi aspetti si trova in Artigue (2002).

rappresentano l'obiettivo, richiede un intervento specifico dell'insegnante che guida l'evoluzione secondo i propri fini didattici.

Il ruolo chiave del docente è quello dell'esperto che è consapevole del potenziale semiotico dell'artefatto, ovvero del duplice legame semiotico tra l'artefatto e i significati riferiti ai suoi modi d'uso e quelli riferiti al sapere matematico. L'insegnante potrà così organizzare attività collettive finalizzate alla costruzione di significati matematici. Indicheremo tali attività collettive, svolte dalla classe e orchestrate dall'insegnante, come discussioni matematiche[3].

L'insegnante, introducendo un artefatto in una discussione matematica per interpretarne il funzionamento o discutere la soluzione di uno specifico problema, ne sfrutta il potenziale semiotico; evoca situazioni già vissute o ne crea di nuove e concede tempo per l'articolarsi delle voci, sia quelle della pratica portate dagli allievi, e centrate sull'esperienza con l'artefatto, sia quella della matematica portata dall'esperto. Cercherà di rendere accessibili agli allievi i nuovi significati che sono il suo obiettivo didattico. Il docente consapevole del potenziale semiotico di un artefatto organizza tutte le fasi del lavoro al fine di farlo emergere nelle attività con l'artefatto e svilupparlo nell'ambito del lavoro collettivo della classe (Figura 1).

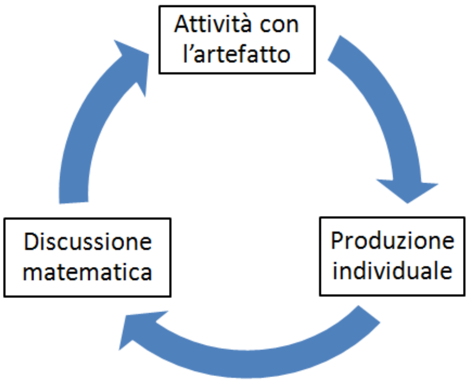

Figura 1. Il ciclo didattico.

Un esempio significativo di ciclo didattico, riguardante l'uso dell'abaco, è discusso in Bartolini Bussi e Boni (2003), mentre un esempio riguardante il compasso è discusso da Bartolini Bussi e colleghi (Bartolini Bussi, Boni, Ferri & Garuti, 1999; Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005).

4. Potenziale semiotico delle Tabelline geometriche

Ispirandosi alla tradizione della aritmetica-geometrica la tavola, riprodotta in Figura 2, presenta una giustapposizione ordinata di rettangoli, ciascuno dei quali rappresenta una moltiplicazione: i lati, con la loro misura, rappresentano i fattori mentre la superficie del rettangolo, con la sua misura, rappresenta il risultato della moltiplicazione. Usiamo il nome

[3] Il termine discussione matematica è usato qui coerentemente con il significato col quale è introdotto da Bartolini Bussi e Boni (1995) e ripreso da UMI (2001), cioè come "polifonia di voci articolate su un oggetto matematico che è uno degli scopi dell'attività di insegnamento/apprendimento" (p. 107).

"Tabelline geometriche" per riferirci a tale tavola. Ciascun rettangolo contenuto in essa ha il potenziale di riferirsi alla moltiplicazione come operazione rappresentandone allo stesso tempo i fattori e la loro relazione con il risultato.

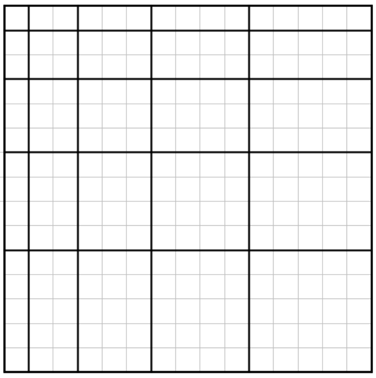

Figura 2. Tabelline geometriche con cinque righe e cinque colonne.

Per analizzare il potenziale semiotico di questo artefatto consideriamo alcuni compiti che possono essere dati agli allievi. Si può richiedere di riprodurre e ritagliare i rettangoli, manipolarli e re-incollarli. In particolare, i rettangoli possono essere scomposti e ricomposti con dimensioni diverse. Con queste operazioni di scomposizione/ricomposizione è possibile riconoscere che, pur cambiando forma e dimensioni, la misura della superficie dei rettangoli non varia (Figura 3).

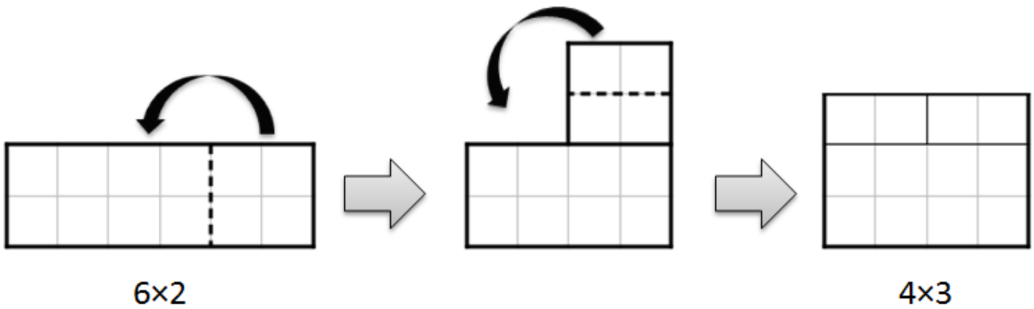

Figura 3. Scomposizione e ricomposizione di rettangoli.

Dal punto di vista matematico possiamo riconoscere in queste operazioni con i rettangoli il significato di una relazione di equivalenza basata sul fatto che nelle manipolazioni la misura della superficie del rettangolo può conservarsi o meno. Inoltre, in tale relazione di equivalenza è riconoscibile (per l'esperto) il significato matematico di specifiche proprietà delle operazioni. Per esempio, la proprietà commutativa del prodotto è riconoscibile nell'invarianza della superficie operando rotazioni che scambiano la posizione dei lati (Figura 4).

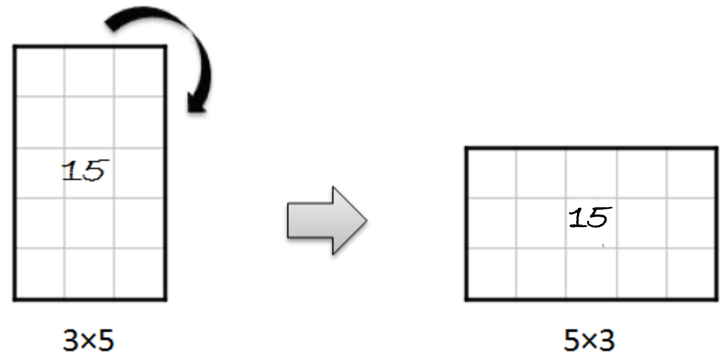

Figura 4. Esempio di rotazione collegabile alla commutatività.

Sulla base di questa analisi del potenziale semiotico è stata progettata una sequenza di cicli didattici. Nella prima parte della sequenza gli allievi esplorano l’artefatto, manipolando i rettangoli della tavola liberamente; sono state poi proposte richieste specifiche che introducono le espressioni numeriche. Ogni volta si chiede di spiegare come numeri e operazioni possono essere messi in relazione con quanto fatto con i rettangoli. Dopo due mesi di queste attività, sono state implementate delle consegne volte a introdurre la proprietà distributiva.

5. I cicli didattici sulla proprietà distributiva

L’esplorazione delle relazioni aritmetiche alla base della proprietà distributiva viene proposta in due cicli didattici innescati da due diverse consegne, seguite dall’elaborazione personale e successivamente dalla discussione collettiva. Nella prima, viene chiesto di:

- colorare due caselle nella stessa riga;
- scrivere in ciascuna di esse la moltiplicazione corrispondente;
- ritagliare due pezzi di cartoncino con dimensioni uguali alle caselle colorate;
- incollare i due pezzi di cartoncino lungo il lato di lunghezza comune;
- cercare nella tavola una casella corrispondente al rettangolo così ottenuto;
- colorare tale casella (se trovata) e scrivere in essa la moltiplicazione corrispondente.

Ci si aspetta che gli alunni traslino e ruotino il rettangolo ottenuto unendo i pezzi di cartoncino per trovare una casella a cui si sovrapponga (Figura 5). Può essere messa in luce la relazione fra l’operazione di incollatura dei cartoncini per formare un rettangolo più grande e la somma di due moltiplicazioni con un fattore comune che porta a ottenerne un’altra, ovvero la trasformazione di un’espressione aritmetica usando la proprietà distributiva: $a \times b + c \times b \rightarrow (a + c) \times b$.

Nell’analisi a priori abbiamo previsto che gli alunni avrebbero notato che i rettangoli di una stessa riga hanno altezza in comune e che il rettangolo ottenuto dall’unione dei due cartoncini ha come base la somma delle basi delle caselle inizialmente colorate.

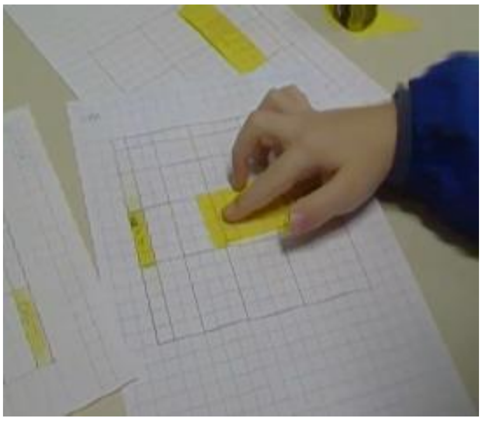

Figura 5. Uno studente, dopo aver incollato i rettangoli 1 × 4 e 5 × 4, ha ottenuto 6 × 4.

Allo scopo di lavorare anche sulla direzione inversa della trasformazione, $a \times b + c \times b \leftarrow (a + c) \times b$, è stata realizzata la seconda consegna. Ogni studente riceve una lettera da Giovanni, un bambino immaginario, che spiega di dover calcolare 3 × 7 e di non riuscirci perché ricorda solo i prodotti con numeri minori di cinque. Nell'analisi a priori abbiamo previsto che gli alunni avrebbero usato i segni prodotti nella prima consegna per scomporre 3 × 7 in due moltiplicazioni con fattori più piccoli, eventualmente usando la tavola per trovare quelli corretti. La scelta del prodotto 3 × 7 è legata al fatto che non c'è un'unica scomposizione corretta ma le possibilità sono comunque poche (3 × 5 + 3 × 2 o 3 × 3 + 3 × 4).

6. Sviluppo del significato della proprietà

Usando le lenti della TMS, analizziamo i dati raccolti durante le attività dei bambini relative ai cicli didattici presentati. In accordo con la prospettiva semiotica, individuiamo i segni prodotti e le loro relazioni per esplicitare il processo di mediazione semiotica e descriverne l'efficacia. Qui mostreremo l'analisi dell'implementazione delle consegne in una classe seconda.

Le lezioni sono video-registrate e analizzate seguendo il metodo di Powell, Francisco e Maher (2003): vedendo più volte i video si selezionano gli eventi critici (quelli in cui un nuovo segno è introdotto) che sono trascritti e le trascrizioni, insieme agli elaborati dei bambini, sono serviti a ricostruire la *storyline* interpretata di seguito.

6.1. Prima consegna

Attività con l'artefatto. Su alcuni elaborati compaiono correzioni: sono state colorate caselle su righe diverse ma i bambini si sono corretti l'un l'altro. Molti di loro scelgono due caselle che, insieme, portano a ottenere un rettangolo di cartoncino non contenuto nella tavola con cinque righe e colonne su cui lavorano (Figura 5). Tutti individuano correttamente i fattori corrispondenti alle caselle anche se due di loro li scrivono con ordine invertito rispetto a quello convenzionalmente usato dalla classe (prima la dimensione della base, poi l'altezza del rettangolo).

Produzione individuale. Gli alunni lavorano a "isole", cioè quattro bambini siedono intorno a uno stesso banco. Sono abituati a confrontarsi fra pari e, stimolati dall'insegnante, condividono le loro osservazioni. Notano che, se la tavola fosse più grande (come quella appesa alla parete della classe) potrebbero trovare la casella corrispondente al proprio rettangolo di cartoncino. Per esempio, mentre la maestra parla con Zeno[4], Gaia nota che serve una tavola diversa:

M: Ma l'hai trovata una mattonella grande come codesta?

Zeno: No.

M: Perché no? Prova a girarla [*Zeno sposta il cartoncino alla ricerca della casella corrispondente*]. Come possiamo fare? Troviamo un'altra soluzione, proviamo a pensarci.

Gaia: Non si può fare perché non è fino al dieci. […]

R: Gaia che cos'è che stavi dicendo? Non si trova perché…

Gaia: Perché non arriva al dieci. Se c'era fino all'otto [*prende il suo cartoncino che ha dimensioni 8 × 3*] ci stava.

Si può notare che la bambina ritiene che il cartoncino ottenuto corrisponda a una casella nella tavola di dieci righe e colonne e ha individuato la dimensione del cartoncino da lei ottenuto ("Se c'era fino all'otto ci stava"). Tuttavia, da questo discorso non emerge ancora il legame fra la dimensioni del rettangolo ottenuto e quelle delle caselle colorate inizialmente.

Discussione matematica. Quando gli studenti hanno finito il lavoro individuale, la maestra chiede di condividere le loro osservazioni. Molti chiedono di poter cercare la casella corrispondente al proprio cartoncino nella tavola con dieci righe e colonne appesa alla parete. Interviene Lapo:

Lapo: Che quando due mattonelle sono lontane [*mette la mano sul cartellone*] puoi calcolare il risultato e poi lo sai [*mette la mano nella stessa zona del cartellone*].

R: E come fai a calcolarlo il risultato?

Lapo: Fra questi due [*indica due caselle nella quarta riga*] fai 9 × 4 fa 36 [*indica 4 × 9*] più 20 [*indica 4 × 5*] fa 56.

R: […] Lapo mi ha fatto un esempio e mi ha detto che se si conosce il risultato di due mattonelle si può scoprire quello di un'altra. Io ho capito così, poi mi dici se ho capito bene. Te mi hai detto che se io so il risultato di due mattonelle [*indica due caselle immaginarie nell'aria*, Figura 6] posso fare l'addizione [*avvicina le dita*, Figura 6]. Vero?

Figura 6. I gesti del ricercatore.

[4] I nomi degli studenti sono stati sostituiti con nomi fittizi. Allo stesso nome fittizio corrisponde lo stesso bambino così come a nomi diversi corrispondono alunni diversi.

Il ricercatore rielabora l'affermazione del bambino generalizzandola e interpretando il calcolo (l'addizione fra moltiplicazioni) come combinazione di rettangoli. Usa termini matematici come "addizione" e "risultati" ma mescolandoli con parole che richiamano l'attività con l'artefatto (ossia l'unione di pezzi di cartoncino) come "mattonelle". Tale attività viene richiamata anche attraverso i gesti. La parola "mattonella" e i gesti sono segni che richiamano l'artefatto stesso, per questo diremo che sono "segni artefatto" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

L'insegnante decide di rilanciare la discussione e propone un esempio più semplice per coinvolgere tutti in questa fase di cambiamento dei significati in gioco:

R: Proviamo a fare un esempio perché forse non tutti sono riusciti a vedere quello che faceva Lapo. […] Se io prendo la mattonella 2 × 3 [*disegna un rettangolo alto 2 e largo 3, scrive 2 × 3*]. Siete d'accordo che questa è la mattonella 2 × 3?

Coro: Sì!

R: E ci metto insieme la mattonella 2 × 4 [*disegna il rettangolo alto 2 e largo 4 affiancato al precedente, scrive 2 × 4*] questo qui è grande come quale mattonella… messo tutto insieme?

L'insegnante torna a usare segni artefatto come "mattonella" e "metto insieme" ma introduce una nuova rappresentazione grafica in cui compaiono rettangoli con scritte dentro le operazioni: si tratta di un sistema semiotico misto che richiama i cartoncini usati dagli studenti e le caselle (segni artefatto) ma anche le operazioni (segni matematici). Dopo questo episodio, viene disegnato anche il rettangolo 2 × 7 inserendo un simbolo "=" fra i due rettangoli affiancati e quello ottenuto incollandoli (Figura 7). Questo simbolo è un segno matematico ma il suo significato è riconducibile sia alla parola "uguale" (così come è usata nel linguaggio quotidiano) in modo da riferirsi all'uguaglianza fra mattonelle, sia all'equivalenza matematica fra espressioni numeriche. I segni grafici sulla lavagna sono legati sia al contesto dell'artefatto sia a quello matematico. Hanno la funzione di collegare segni artefatto e matematici e sono per questo detti segni pivot (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Infine viene chiesto agli studenti di indicare quanti quadretti sono contenuti nei rettangoli e i numeri detti dai bambini sono scritti sotto il rettangolo corrispondente.

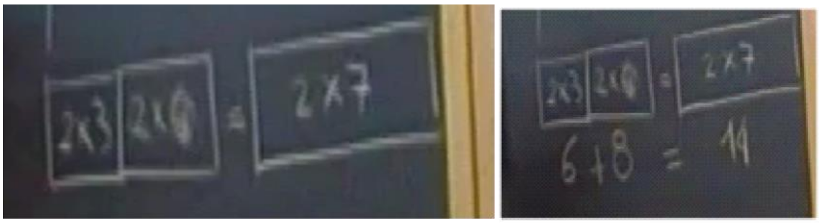

Figura 7. Segni grafici sulla lavagna.

Alcuni notano che 6 sommato a 8 dà risultato 14. Il ricercatore prova a mettere in relazione l'operazione di "mettere insieme" i rettangoli con la somma aritmetica:

R: Allora, quando io metto insieme i quadratini di questa mattonella [*indica il primo rettangolo*] e di questa mattonella [*indica il secondo*] mi vengono fuori i quadratini [*indica il rettangolo a destra dell'uguale*] di tutta questa mattonella. Vero?

Nicola: È vero!

R: Mettere insieme a che operazione corrisponde?

Coro: Sei più otto!

Marco: Che fa quattordici.

R: [*scrive + fra 6 e 8 e = fra 8 e 14,* Figura 7] Allora, questo che vuol dire? Che se conosco i risultati di due mattonelle piccoline [*indica i rettangoli a sinistra dell'uguale*] le posso mettere insieme [*indica 6 e 8*] e scopro che cosa? [*indica il 14*] il risultato…

Coro: Di una mattonella!

R: Ha la stessa altezza e questa… [*indica la larghezza dei due rettangoli affiancati*]

Luca: È larga per tutte e due.

In questa parte della discussione le parole "mettere insieme" sono messe in relazione con l'addizione, ma si riferiscono alla combinazione dei cartoncini e all'addizione delle larghezze dei rettangoli. Come suggerito dai bambini, il ricercatore inserisce il segno matematico "+" nel discorso. Si noti che sono messe in luce le relazioni fra i diversi rettangoli comparsi nell'attività e il simbolismo usato per rappresentarli fa riferimento ai rettangoli di cartoncino sebbene compaiano dei segni matematici. Abbiamo ancora segni ibridi che fungono da segni pivot.

Viene poi chiesto ai bambini di produrre altri esempi a piacere. Tutti i testi prodotti (Figura 8) sono formati da due righe: la prima è composta di segni ibridi, mentre la seconda è costituita da simboli matematici. Sono una sorta di Stele di Rosetta che esplicita la relazione fra le due righe di testo e invita a tradurre i segni artefatto in segni matematici. Perciò può divenire una risorsa per dispiegare il potenziale semiotico dell'artefatto.

Quattro bambini trasformano il disegno inserendo il simbolo "+" fra i rettangoli (Figura 9) creando un'ulteriore ibridazione. L'insegnante decide di focalizzare l'attenzione degli allievi su tali segni e ne promuove la condivisione: nei giorni successivi chiede agli studenti di dare altri esempi usando la rappresentazione col segno "+" fra i rettangoli.

Figura 8. I segni prodotti da Fabio dopo la discussione.

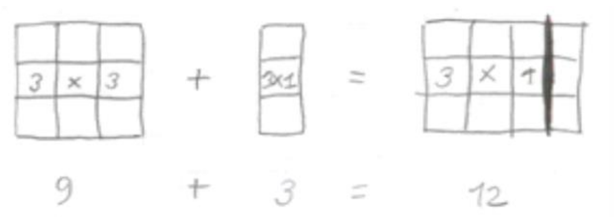

Figura 9. I segni prodotti da Massimo dopo la discussione.

Dopo un paio di giorni la maestra propone una variazione: dà un esempio scrivendolo alla lavagna e chiede ai bambini di copiarlo sul quaderno (Figura 10) per poi inventarne ulteriori a piacere. In questo modo l'insegnate fornisce una "traduzione" alternativa sia del testo composto di segni artefatto sia dell'operazione di addizione. Solo alcuni ragazzi producono esempi personali usando anche l'espressione proposta (Figura 12), ma la possibilità di tradurre il testo in modi diversi sarà essenziale nell'affrontare la consegna successiva.

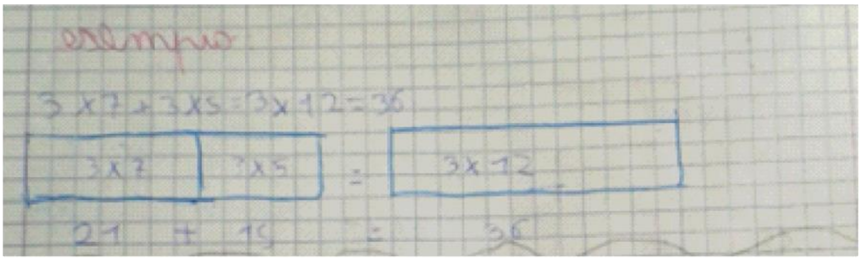

Figura 10. La copia dell'esempio dell'insegnante fatta da Mirko.

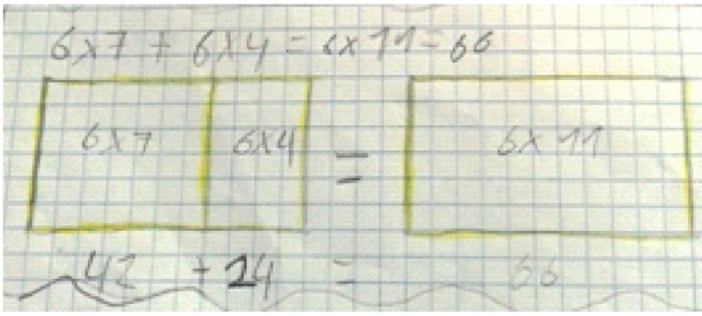

Figura 11. L'esempio prodotto da Lapo.

6.2. Seconda consegna

Attività con l'artefatto. Dopo due settimane dalla consegna precedente, agli studenti viene chiesto di leggere la lettera di Giovanni e discutere possibili soluzioni. Il legame della consegna con l'artefatto non è immediato ma emerge all'interno dei piccoli gruppi:

Mara: È come questo! [*apre il quaderno mostrando un esempio precedente*]

Zeno: È vero! Un lavoro come questo può essere!

R: Però che rettangoli fareste in un lavoro come questo?

Zeno: Te lo posso spiegare? Tipo: se qui [*indica il quaderno*] c'è 3 × 15. Di larghezza è il dieci. Perché… l'unità [*indica la cifra 1 del 15*] cioè il 15 è composto da una decina e da cinque unità, prendi il quin…l'uno è la decina e si mette qui e questo si fa lungo dieci [*indica un rettangolo 3 × 10 sul quaderno*] e alto tre. Poi tre, lunghezza tre [*indica l'altezza del rettangolo 3 × 5*] e lungo cinque; e uguale poi si trova, poi si mettono insieme e vien fuori il risultato.

R: Ah ho capito! E nel caso di questo bambino quindi che cosa potrebbe fare lui che c'ha 3 × 7?

Alex: Aspetta! Aspetta! […] Ce l'hai fatto fare anche te quando bisognava ritagliare i cartoncini e usare lo scotch per metterli insieme. È come questo!

Produzione individuale. Dopo che i bambini hanno discusso fra loro, viene chiesto di presentare le soluzioni trovate. Fabio, per rappresentare la sua soluzione (Figura 12), scrive prima l'espressione 3 × 5 + 3 × 2 (usando solo simboli matematici) e successivamente completa la rappresentazione disegnando i rettangoli intorno alle operazioni.

Figura 12. I segni prodotti da Fabio.

Discussione matematica. La discussione è iniziata da Mirko che propone una soluzione differente. Mirko scrive l'espressione in Figura 13 (a sinistra) che, dal punto di vista numerico, è uguale a quella di Fabio ma è rappresentata in modo diverso: non c'è nessun riferimento all'artefatto ma viene usato un registro simbolico, così come confermato nel dialogo seguente:

R: Cosa vogliono dire quegli uguali?

Mirko: Tre per cinque [*nel dirlo traccia una linea col dito sotto 3 × 5*] è uguale a quindici [*indica il 15*] e tre per cinque più tre per due [*indica la prima riga*] è uguale a quindici più sei [*indica la seconda riga*].

Figura 13. Le espressioni aritmetiche dei bambini.

I nuovi segni sono strettamente legati ai segni utilizzati precedentemente (come mostrato dal comportamento di Fabio) ma hanno perso le qualità grafiche condivise con l'artefatto. Il testo è ora composto di soli segni matematici culturalmente condivisi, cioè riconoscibili come tali anche da chi non conosce l'attività svolta prima dalla classe. Il significato di questi segni non è stato spiegato ma il collegamento con i segni precedenti, condensati in quella che abbiamo chiamato Stele di Rosetta, permette a tutti di interpretarli. Dopo Mirko, altri studenti intervengono nella discussione per proporre nuove soluzioni con la stessa rappresentazione (Figura 13, a destra).

Dopo la discussione, agli studenti viene chiesto di scrivere una risposta per Giovanni. Nella maggior parte dei testi prodotti individualmente sono presenti espressioni aritmetiche; soltanto tre bambini forniscono solo la rappresentazione con i rettangoli. In molte produzioni ci sono entrambe le rappresentazioni (Figura 14, a sinistra), appaiono così evidenze dell'appropriazione della struttura relazionale delle espressioni aritmetiche (indicata con delle frecce come in Figura 14, a destra) e la loro relazione con l'artefatto.

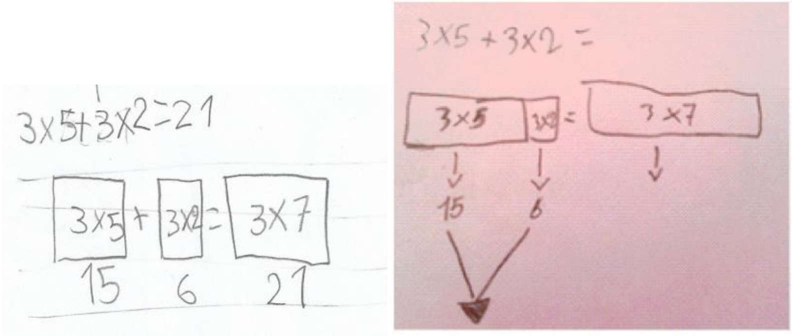

Figura 14. Testi prodotti da Lara e Luca dopo la discussione.

7. Conclusioni

Lo studio ha preso le mosse dall'ipotesi che il processo di memorizzazione di una formula sia avvantaggiato se nasce in situazioni in cui la costruzione della formula è a carico del soggetto che la dovrà memorizzare. In questa prospettiva, la memorizzazione della tavola pitagorica può essere facilitata se nasce in situazioni di calcolo dove ciascun risultato e le relazioni tra risultati di operazioni diverse possano essere riferiti a un significato specifico di misura di rettangoli e ai significati relativi di composizione e/o decomposizione di questi.

Nel quadro della TMS è stato introdotto l'uso delle Tabelline geometriche in attività di composizione/scomposizione di rettangoli, presentando l'evoluzione dei segni che ha portato all'emergere del significato relazionale della proprietà distributiva.

Il processo di appropriazione della rappresentazione simbolica della proprietà distributiva attraverso l'uso di espressioni aritmetiche appare graduale. I bambini lavorano inizialmente con i cartoncini (Figura 5) che nel corso della prima discussione matematica sono rappresentati dall'insegnante come rettangoli affiancati (Figure 7). Gli studenti si appropriano di tale rappresentazione (Figura 8) e la personalizzano creando ibridazioni fra i segni artefatto e quelli matematici (Figura 9). L'insegnante, rilevando la potenzialità di questa particolare rappresentazione come collegamento fra i segni artefatto iniziali e i segni matematici desiderati (segno pivot), ne promuove l'uso in consegne individuali (Figure 10 e 11). Affrontando la consegna della lettera a Giovanni gli studenti richiamano questi segni per rappresentare le loro soluzioni (Figura 12). Nella discussione che segue, compaiono nuovi segni (Figura 13) che richiamano quelli precedenti nella struttura ma hanno perso ogni riferimento grafico all'artefatto.

Possiamo notare che nel passaggio dai segni artefatto ai segni matematici veri e propri è fondamentale il ruolo dell'insegnante che, riconoscendo le potenzialità della rappresentazione ibrida inventata dai bambini, ne promuove la condivisione con tutta la classe. Questa rappresentazione agisce quindi da legame fra i segni artefatto e i segni matematici creando così una catena di segni detta catena semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Impiegando i diversi segni di questa catena semiotica, gli alunni elaborano rappresentazioni simboliche fino a costruire il significato relazionale delle proprietà delle operazioni, come uguaglianze tra espressioni numeriche diverse.

La consapevolezza di queste relazioni fra operazioni (non solo dei loro risultati) può avvantaggiare i bambini nel richiamare moltiplicazioni complesse. Come mostrano

Carpenter, Levi, Franke e Zeringue (2005) "comprendere la proprietà distributiva fornisce agli studenti un quadro per l'apprendimento dei fatti aritmetici moltiplicativi mettendo in relazione i fatti non ancora noti con quelli conosciuti" (p. 55); per esempio è possibile trovare il risultato di 3×7 come somma di quelli di 3×5 e 3×2. Così si possono ricostruire i fatti moltiplicativi che coinvolgono fattori maggiori di cinque attraverso quelli più piccoli. Per decomposizione, si può anche sfruttare il prodotto per 10 per calcolare prodotti più piccoli ($9 \times n = 10 \times n - n$). Alcune consegne per introdurre la proprietà distributiva sulla sottrazione usando i rettangoli sono analizzate da Baccaglini-Frank e Bartolini Bussi (2016).

Tornando al problema della dialettica tra teoria e pratica e del suo contributo nella genesi del sapere matematico, il ruolo degli strumenti trova un'interpretazione efficace in termini di mediazione semiotica: un'analisi fine di strumenti, del loro uso e della loro evoluzione può contribuire a fornire suggerimenti al problema didattico della ricontestualizzazione di un sapere matematico.

La realizzazione del passaggio dall'uso dello strumento alla costruzione di un significato resta comunque legata all'intervento dell'insegnante che inserisce tale strumento nell'attività di classe e ne fa un elemento catalizzatore per la costruzione di significati matematici coerenti ai propri obiettivi educativi. Azioni quali il riconoscimento e la produzione di segni ibridi sono elementi chiave del processo di mediazione semiotica e l'uso temporaneo di tali segni (come segni pivot) risulta utile per non "saltare" troppo rapidamente ai segni matematici prima che i significati a essi collegati si siano sviluppati.

Bibliografia

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274.

Baccaglini-Frank, A.E., & Bartolini Bussi, M.G. (2016). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: il progetto "PerContare". *Form@re-Open Journal per la Formazione in Rete*, *15*(3), 170–184.

Bartolini Bussi, M.G., & Boni, M. (1995). Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vygotskiano. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *18*, 221–256.

Bartolini Bussi, M.G., & Boni, M. (2003). Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms. *For the Learning of Mathematics*, *23*(2), 15–22.

Bartolini Bussi, M.G., Boni, M., Ferri, F., & Garuti, R. (1999). Early approach to theoretical thinking: gears in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 67–87.

Bartolini Bussi, M.G., & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L.D. English (ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.750-787). Mahwah, NJ: LEA.

Bartolini Bussi, M.G., & Mariotti, M.A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *32*, 269–294.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A., & Ferri, F. (2005). Semiotic mediation in the primary school. In H. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (eds.), *Activity and sign: grounding mathematics education* (pp. 77-90). New York, NY: Springer.

Bruscaglioni, L., Ferri, F., & Mattiassich, M. (2000). *Matematica che passione. Per la scuola elementare*. Milano: Piccoli.

Butterworth, B., Marchesini, M., & Girelli, L. (2003). Basic multiplication combinations: passive storage or dynamic reorganization?. In A.J. Baroody & A. Dowker (eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: constructing adaptive expertise* (pp.189-202). London: Routledge.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., & Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(1), 53–59.

Izsák, A. (2005). "You have to count the squares": applying knowledge in pieces to learning rectangular area. *The Journal of the Learning Sciences*, *14*(3), 361–403.

Maffei, L., & Mariotti, M.A. (2008). Aspetti meta-cognitivi legati all'utilizzo di un micromondo: il caso di Aplusix. *Form@re-Open Journal per la Formazione in Rete*, *57*. http://formare.erickson.it/wordpress/it/2008/aspetti-meta-cognitivi-legati-all'utilizzo-di-un-micromondo-il-caso-di-aplusix/ (ver.15.04.2016).

Powell, A.B., Francisco, J.M., & Maher, C.A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 405–435.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin.

Rotman, B. (1987). *Signifying nothing: the semiotics of zero*. New York, NY: St. Martin's.

UMI. Unione Matematica Italiana (2001). *Matematica 2001: attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica*. http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo/ (ver. 15.04.2016).

Vygotskij, L.S. (1978). *Mind in society*. *The development of higher psychological processes*. London: Harvard University Press.

Vygotskij, L.S. (2010). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori* (M.S. Veggetti, Trans.). Firenze: Giunti (Original work published 1974).

Zan, R. (1998). Tabelline sì o no? *Notiziario Unione Matematica Italiana*, *6*, 17–23.

Zan, R. (2002). Metacognizione, convinzioni e affettività: un approccio integrato alle difficoltà in matematica. In A. Contardi & B. Piochi (eds.), *Le difficoltà in matematica: metodologia e pratica di insegnamento* (pp.33-44). Trento: Erickson.