Su alcune ricadute concettuali dei teoremi di incompletezza di Kurt Gödel

Riccardo Bruni

The present paper deals with two distinct but related purposes: (i) to shed light on certain controversial aspects of Gödel's view toward mathematics by referring to that part of Gödel's writings belonging to his *Nachlass* (namely, unpublished essays and lectures, and correspondence material); (ii) to discuss recent developments of the debate concerning some implications of Gödel's well known incompleteness theorems, which have been looked by someone as a tool to 'disprove' (a formulation of) the mechanistic view of human mind. We emphasize an 'epistemological flavour' of Gödel's view which usually remains unnoticed (contrary to what happens to his overemphasized 'platonistic' convictions) on one side. On the other, we try to introduce new topics in the debate by making reference to less conventional sources.

Keywords: *Gödel's theorems, mechanism, Turing's test, Lucas argument, Penrose's argument, trial and error predicates*.

1. *Introduzione*

L'opera di pubblicazione ragionata di una parte ingente del materiale inedito di Kurt Gödel custodito presso l'Institute for Advanced Studies di Princeton[1], consente indubbiamente di colmare importanti lacune storiche e storiografiche relative all'opera di uno degli indiscussi protagonisti della recente ricerca in campo logico. Già una simile operazione, seppur di taglio monografico, non è esente, proprio perché condotta in relazione a contributi di tale peso, da ricadute più ampie che finiscono per interessare quantomeno le varie direzioni di sviluppo dell'intera indagine fondazionale e metamatematica tradizionalmente intese.

Tuttavia, l'opportunità di misurare le capacità analitiche di Gödel su terreni spesso diversi dalla pubblicazione scientifica, e perciò più adatti

[1] Si tratta, all'interno della collezione dei *Collected Works* di quest'autore, degli ultimi tre volumi relativi ad articoli non pubblicati e materiale di corrispondenza, l'edizione dei quali è iniziata nel 1995.

Annali del Dipartimento di Filosofia 2003-2004, ISBN 88-8453-270-1

alla trattazione di tematiche meno consuete, fornisce anche preziose indicazioni per una lettura che voglia evidenziare le conseguenze rilevanti per la disciplina filosofica di alcuni sviluppi della ricerca logica.

Il presente lavoro, intende offrire un contributo ad entrambe le direzioni d'indagine indicate.

In un senso, si è inteso ricostruire l'evoluzione della riflessione gödeliana che culmina con la formulazione di alcune istanze di tipo filosofico sulla natura del discorso matematico e che, come si è cercato di argomentare, appare così strettamente connessa ad un'analisi delle implicazioni concettuali delle proprie scoperte in campo logico e fondazionale. La strategia di fondo, tenuta presente la sopraggiunta disponibilità delle fonti primarie di cui si è detto in apertura, è stata quella di far parlare lo stesso Gödel attraverso i suoi scritti (motivazione principale, questa, per la scelta del titolo del paragrafo «Gödel secondo Gödel»). Si è trattato perciò di mettere a confronto il contenuto degli inediti con gli scritti pubblicati non solo per ricercare eventuali discordanze o approfondimenti tematici, ma per individuare, tra questi, quanti permettessero di gettare luce sugli aspetti più controversi della filosofia della matematica di Gödel.

Il fatto tuttavia che tale lavoro di analisi non venga finalizzato all'elaborazione di una risposta ai quesiti aperti relativi alla filosofia gödeliana, ai quali è dedicato il dibattito presente nella letteratura più recente, si spiega proprio con la volontà di muoversi anche nella seconda direzione di ricerca menzionata in precedenza. Lo spunto per un esame di certe implicazioni filosofiche dell'indagine metamatematica (uno spunto che permette immediatamente, peraltro, di connettere questo piano della disamina con le esigenze monografiche del precedente), è costituito da quella lettura dei teoremi di incompletezza di Gödel, la quale, pur offrendo un punto di vista inconsueto, così tanto spazio si è meritata nella letteratura anche di recente pubblicazione,[2] e che tende a vedere in tale risultato un'acquisizione 'immediatamente spendibile', per così dire, in campo filosofico, attribuendo ad esso, in particolare, un ruolo centrale nella costruzione di un argomento anti-meccanicista in filosofia della mente.

Si è voluto in tal senso offrire una presentazione della questione che, ampliando la gamma dei riferimenti rispetto a quanto si faccia usualmente in relazione a questo tipo di problematica, intende evidenziarne

[2] Piuttosto che tentare qui un'impossibile rassegna di tutti i contributi sul tema, si invita alla lettura, ad esempio, dei due lavori di A. Antonelli, *Gödel, Penrose e i fondamenti dell'intelligenza artificiale*, inedito 1996 e, dello stesso autore, *I teoremi di Gödel e la filosofia della mente*, inedito 2000 (entrambi disponibili in rete, all'indirizzo http://kleene.ss.uci.edu/~aldo) per farsi un'idea, comunque parziale, del numero degli interventi al riguardo e della 'qualità' degli autori dei contributi.

una valenza che ci pare andare al di là della semplice valutazione sulla cogenza concettuale e sulla coerenza logica delle posizioni in campo.

È in tale prospettiva, avendo scelto la questione del significato dei teoremi di incompletezza come chiave di lettura per l'analisi del materiale gödeliano, che va misurata la portata dell'indagine monografica e della posizione di Gödel al riguardo.

2. *Gödel secondo Gödel*

È un fatto noto che la pubblicazione da parte di Gödel nel 1931 del contributo che contiene la dimostrazione dei teoremi di incompletezza,[3] abbia rappresentato uno snodo cruciale per l'intera indagine metamatematica, in particolare per ciò che riguarda le ricadute di essa su problematiche di carattere fondazionale. Può essere considerato un fatto altrettanto acquisito come l'intera riflessione filosofica di Gödel, la quale si colloca, cronologicamente parlando, soprattutto dagli anni '40 del '900 in poi, risenta in modo essenziale dell'analisi del significato delle proprie scoperte in campo logico e fondazionale, tra le quali i suddetti teoremi di incompletezza ricoprono un ruolo di primo piano.

Quest'ultimo fatto, è stato messo in evidenza nel modo forse più efficace da Solomon Feferman,[4] quando si riferisce alla «Dottrina di Gödel» come al punto di vista secondo il quale l'iterazione transfinita dell'operazione di potenza insiemistica è necessaria per rendere conto della matematica finitaria.

Una simile posizione, che contiene in sé l'idea che certi concetti matematici astratti (come quelli appartenenti alla teoria degli insiemi) risultino essenziali per la risoluzione di problemi che riguardano nozioni (come quelle relative al dominio della teoria dei numeri) maggiormente dominabili da un punto di vista intuitivo, permette di dar conto tanto dell'elemento fondazionalmente rilevante legato alla scoperta di Gödel (la critica di un approccio cosiddetto 'finitista', della scuola del matematico tedesco David Hilbert), quanto dell'aspetto forse preminente dell'impostazione filosofica gödeliana (l'idea che l'essenza del discorso matematico nel suo insieme, consista nell'approfondire quella relazione conoscitiva

[3] Cfr. K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, in «Monatschefte für Mathematik und Physik», 38, 1931, pp. 173-198 (ristampato, con traduzione inglese a fianco, in *Kurt Gödel Collected Works vol. I: Publications 1929-1938*, a cura di S. Feferman et al., Oxford University Press, Oxford 1986, pp. 144-195).

[4] Cfr. S. Feferman, *Infinity in mathematics: Is Cantor necessary?,* in *L'Infinito nella Scienza*, a cura di G. Toraldo di Francia, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma 1987, pp. 151-209.

delle nozioni astratte che a detta di Gödel si esplica, verrebbe da dire in sommo grado, proprio nella costruzione transfinita alla quale allude l'affermazione surricordata).

Eppure, per quanto efficace, una simile riduzione della portata della riflessione gödeliana può essere fuorviante, soprattutto perché da essa non traspare a sufficienza il tipo di chiarificazione concettuale alla quale la posizione di Gödel, dal 1931 in avanti, è andata incontro.

Se si escludono fraintendimenti pressoché totali degli aspetti più tecnici della scoperta di Gödel,[5] vi era almeno un aspetto meritevole di approfondimento ulteriore (e, come tale, riconosciuto dallo stesso Gödel[6] e sottolineato da personalità logicamente smaliziate come Alonzo Church): e cioè il fatto che la possibilità di enunciare i teoremi di Gödel in tutta generalità, presuppone il possesso di una definizione chiara di cosa è un sistema formale e quindi, in quanto questa nozione ne dipende in modo essenziale, di cosa si intenda con l'espressione 'procedura effettiva di computo'.[7]

Ciò significa che la vicenda del risultato gödeliano si lega in modo indissolubile a quella della caratterizzazione matematica della nozione informale di 'funzione numerica calcolabile', che, come è forse noto, rappresenta uno degli aspetti concettualmente più interessanti della ricerca logica degli anni '30 del '900.[8]

[5] Intendiamo con ciò riferirci alle controversie sorte in relazione alle critiche avanzate da Ernst Zermelo, uno dei padri della teoria assiomatica degli insiemi, e dal matematico svizzero Paul Finsler. Pur trattandosi di fatti noti (si veda al proposito, ad esempio, J.W. Dawson, *The reception of Gödel's incompleteness theorems*, in «Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association», 2, 1985, pp. 253-271), non si tratta di un'operazione interamente superflua, quella di ricostruire le controversie in questione sulla base dei dettagli contenuti nella corrispondenza gödeliana (cfr. *Kurt Gödel Collected Works vol. IV: Correspondence A-G*, a cura di S. Feferman et al., Oxford University Press, Oxford 2003, pp. 406-415 e, degli stessi curatori, *Kurt Gödel Collected Works vol. V: Correspondence H-Z*, Oxford University Press, Oxford 2003, pp. 420-431).

[6] Cfr. K. Gödel, *On undecidable propositions of formal mathematical systems* M. Davis (a cura di), *The Undecidable*, Raven Press, New York 1965, pp. 346-371 (ristampato in *Kurt Gödel Collected Works vol. I: Publications 1928-1938*, a cura di S. Feferman et al., cit., pp. 346-371), che riproduce il contenuto delle lezioni tenute da Gödel all'Institute for Advanced Studies di Princeton nel 1934.

[7] Quanto detto riguarda il primo dei due teoremi di indecidibilità enunciati da Gödel nel 1931. L'esito del cosiddetto secondo teorema di incompletezza, il quale asserisce l'indecidibilità in ogni sistema formale che soddisfa certe ipotesi dell'enunciato che esprime la non contraddittorietà del sistema, è più complicato: ancora negli anni '50 e '60 del '900 furono prodotti dei controesempi ad esso, e solo con il lavoro di Feferman del 1960 sull'aritmetizzazione della sintassi (cfr. S. Feferman, *Arithmetization of metamathematics in a general setting*, in «Fundamenta Mathematicae», 49, 1960, pp. 35-92) se ne sono comprese realmente le sottigliezze tecniche.

[8] Tra i contributi sul tema, vale certamente la pena di citare i lavori di Wilfried Sieg (si veda almeno W. Sieg, *Mechanical procedures and mathematical experience*, in A. George

Non stupisce perciò il fatto che la discussione più compiuta da parte di Gödel della propria scoperta e delle sue implicazioni, sia contenuta in un lavoro inedito che appartiene, con ogni probabilità, alla seconda metà degli anni '30,[9] e che segue la pubblicazione dell'articolo di Alan Turing del 1937 (ossia, di quest'autore, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, in «Proceedings of the London Mathematical Society» (2), 42, 1936, pp. 230-265), al quale si deve la 'soluzione' della questione concettuale alla base della teoria della ricorsività di cui si è detto.[10]

Il materiale in questione è fonte di interesse ulteriore per il fatto che la discussione di Gödel si riferisce non tanto ai teoremi di incompletezza nella loro formulazione usuale, quanto piuttosto ad un risultato di indecidibilità generalizzato dal quale discende in modo immediato un corollario che richiama il teorema originario.

In sostanza, Gödel si riferisce, offrendo un'idea del procedimento dimostrativo,[11] ai seguenti fatti:

1. non esiste una procedura meccanica di decisione per la classe **A** di problemi aritmetici della forma:

$$\forall x_1,\dots,x_m\ \exists y_1,\dots,y_n\ \mathbf{P}(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_n)=0$$

dove P è un polinomio a coefficienti interi,

2. In ogni sistema formale, il linguaggio del quale permetta di esprimere tutti i problemi della classe **A**, esiste, tra le proposizioni che rappresentano gli elementi della collezione, almeno un caso di enunciato indecidibile.

Gödel legge il primo risultato come una dimostrazione del fatto che non è possibile formalizzare il ragionamento matematico in modo adeguato. Esso mostra cioè come non sia possibile pensare di «rimpiazzare

(a cura di), *Mathematics and Mind*, Oxford University Press, Oxford 1994, pp. 71-117, e, dello stesso autore, *Step by recursive step: Church's analysis of effective calculability*, in «The Bullettin of Symbolic Logic», 3, 1997, pp. 154-180.).

[9] Cfr. *Kurt Gödel Collected Works vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, a cura di S. Feferman et al., Oxford University Press, Oxford 1995, pp. 157-175. Il testo in questione riproduce uno scritto ritrovato tra le carte del *Nachlass* gödeliano senza titolo e data di riferimento. Alcune ipotesi sulla sua collocazione temporale, si possono trovare nella nota introduttiva di Martin Davis che lo precede.

[10] Si rimanda ai lavori di Sieg citati in precedenza, per un chiarimento di quest'ultima affermazione.

[11] La tecnica dimostrativa impiegata non rappresentà una novità: si tratta di un raffinamento, sulla base di acquisizioni derivanti dallo studio della ricorsività generale, di una metodologia impiegata precedentemente da Gödel per trovare equivalenti aritmetici degli enunciati indecidibili.

il matematico con una macchina», neppure confinandosi al dominio della teoria dei numeri.[12] Gödel non ritiene invece che tale conclusione negativa possa essere estesa alla convinzione, di matrice hilbertiana,[13] che la mente umana sia sempre in grado di trovare risposte ai problemi matematici da essa sollevati, se correttamente formulati: è una riprova di ciò, secondo Gödel, l'esistenza di regole di inferenza, le quali, pur non essendo esprimibili nel formalismo da cui si può aver preso le mosse, sono altrettanto evidenti di quelle date ed offrono la possibilità di decidere i problemi, altrimenti indecidibili, in questione.

L'osservazione di Gödel si presta ad un'interpretazione banale: l'enunciato che esprime la non contraddittorietà di un sistema d'assiomi, ad esempio, è indecidibile per i teoremi di Gödel nel sistema stesso, ma risulta ovviamente decidibile nel sistema ottenuto dal primo per aggiunta, come nuovo assioma, dell'enunciato in questione. In realtà, l'analisi combinata di vari passi dell'opera di Gödel di tenore analogo, sembrerebbe suggerire un'interpretazione diversa che, seppur tecnicamente non sorprendente, possiede una certa rilevanza storica.[14]

Come si evince soprattutto dal materiale appartenente alla corrispondenza gödeliana,[15] all'origine della scoperta da parte di Gödel dei teoremi di incompletezza si situa un primordiale tentativo di soddisfare l'aspettativa avanzata da Hilbert di una dimostrazione di non contraddittorietà per l'analisi nel sistema della teoria dei numeri. La tecnica individuata da Gödel prevedeva la definizione, nel linguaggio dell'aritmetica, di un predicato di verità per le formule di quel linguaggio medesi-

[12] Offrendo il primo dei teoremi succitati una (ulteriore) soluzione negativa dell'*Entscheidungsproblem* o «problema della decisione», la conclusione di Gödel è coerente con l'analisi delle implicazioni della questione sollevata da Hilbert condotta da altri studiosi (si veda, ad esempio, la riflessione di John von Neumann al riguardo contenuta in, di quest'autore, *Zur hilbertischen Beweistheorie*, in «Mathematische Zeitschrifft», 26, 1927, pp.1-46, a p. 12).

[13] Si tratta di un'idea avanzata dal matematico tedesco in un celebre intervento al Secondo Congresso Internazionale dei Matematici, svoltosi a Parigi nel 1900 (cfr. D. Hilbert, *Problemi matematici*, in *Ricerche sui Fondamenti della Matematica. Scritti Fondazionali di David Hilbert*, a cura di V.M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 145-162).

[14] Che la risposta suggerita sia di fatto insufficiente risulta d'altra parte anche da un'analisi formale del caso: in assenza di criteri ulteriori, infatti, non è possibile iterare indebitamente l'aggiunta dell'enunciato che esprime la consistenza di un sistema formale in modo da preservare la consistenza (se F è un sistema consistente che soddisfa le ipotesi dei teoremi di Gödel, il sistema $F+\neg Con_F$ è consistente per il secondo teorema di incompletezza ma $F+\neg Con_F+ Con_{F+\neg Con_F}$ è dimostrabilmente inconsistente).

[15] Particolarmente indicativa sotto questo aspetto risulta essere la lettera spedita da Gödel a Paul Bernays il 2 aprile 1931 (riprodotta nel quarto volume dei *Collected Works* di Gödel). Indicazioni analoghe, seppur meno dettagliate, si ricavano anchedall'epistolario gödeliano con Jean van Heijenoort e con un giovane ricercatore di nome Jossef Balas.

mo. Fu la conseguente possibilità di formalizzare i ben noti paradossi per la verità nel linguaggio naturale, ad indurre Gödel alla cruciale intuizione che, dunque, in un contesto formale occorresse tenere ben distinte la 'verità' per un certo linguaggio e la 'dimostrabilità' in un dato sistema d'assiomi basato su quel linguaggio (dal momento che al contrario della verità, il concetto di dimostrabilità si presta ad una definizione formale), e che quindi dovessero esistere enunciati veri indecidibili in sistemi formali corretti (nei quali, cioè, si dimostrano solo enunciati veri).[16]

Fu cioè un confronto tra la nozione insiemistica di verità ed il concetto aritmetico di dimostrabilità formale, e cioè il presupposto di un teorema comunemente attribuito ad Alfred Tarski, a portare Gödel a ritenere, come si legge nel lavoro originario del 1931 alla nota 48a, che la «vera ragione dell'incompletezza» risiedesse nel fatto che «la formazione di tipi superiori può essere proseguita nel transfinito [...], mentre in ogni sistema formale è disponibile solo un numero al massimo numerabile di essi» (ossia ad offrire lo spunto, a detta di Feferman, per la prima formulazione della propria Dottrina).[17]

Dovrebbe risultare anche chiaro, allora, come la scoperta dell'esistenza di equivalenti logici degli enunciati indecidibili nel dominio delle equazioni diofantee, dovette rappresentare per Gödel una conferma della valenza matematica o, per meglio dire, fondazionale, di quanto implicitamente contenuto nella suddetta nota dell'articolo del 1931: l'idea che nella comprensione dei concetti più astratti del discorso matematico, possa risiedere la soluzione di problemi appartenenti a domini, quali quello della teoria dei numeri, le cui nozioni di base vengono comunemente viste come aventi un grado ben maggiore di immediatezza intuitiva.[18] A ciò occorre aggiungere il fatto che Gödel riteneva le inferenze

[16] Questa sorta di versione non costruttiva dei teoremi di incompletezza, viene richiamata da Gödel in una lettera (del 12 ottobre 1931) a Zermelo. Si tratta dello stesso argomento che è possibile poi trovare nel § 7 delle lezioni di Gödel a Princeton del 1934.

[17] Cfr. S. Feferman, *Kurt Gödel: Conviction and caution*, in «Philosophia Naturalis», 21, 1984, pp. 546-562. Tale lettura del passo suddetto del testo di Gödel del 1931, viene attribuita da Feferman ad un suggerimento di Saul Kripke.

[18] È in quest'idea, che è racchiusa l'essenza della critica gödeliana all'impostazione finitista alla base del programma fondazionale di Hilbert: risulta infatti che una costruzione non finitaria, e come tale appartenente all'ambito della 'matematica ideale' secondo la terminologia hilbertiana, è necessaria, sulla base dei teoremi ricordati, per la decisione di problemi aritmetici, i quali rientrano nella 'matematica reale' di Hilbert (Cfr. K. Gödel, *Vortrag bei Zilsel*, in *Kurt Gödel Collected Works vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, a cura di S. Feferman et al., cit., pp. 86-113 e, dello stesso autore, *Über eine bisher noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes*, in «Dialectica», vol. 12 1958, pp. 280-287, *On an extension of finitary mathematics which has not yet been used*, in *Kurt Gödel Collected Works vol. II: Publications 1938-1974*, a cura di S. Feferman et al., Oxford University Press, Oxford 1990, pp. 271-280). La posizione di Gödel al proposito è frutto

necessarie per la decisione di enunciati altrimenti indecidibili essere altrettanto evidenti di quelle dalle quali si è preso le mosse. Per usare i termini utilizzati da Gödel nel corso del proprio intervento alla conferenza del 1946 per il bicentenario della Princeton University, si tratta di veri e propri «nuovi assiomi» che emergono dalla «contemplazione» del formalismo dato.[19]

Una simile posizione, tuttavia, pare offrire il fianco ad un'obiezione di carattere fondazionale: il passaggio concettuale richiesto per la decisione dei problemi aritmetici aritmeticamente irresolubili che preveda la definizione di un predicato di verità, è tutt'altro che conservativo, per così dire, rispetto all'evidenza.[20]

È su questo punto che la riflessione di Gödel sul significato dei teoremi di incompletezza si intreccia indissolubilmente con la disamina del problema posto dalla cosiddetta Ipotesi del Continuo di Cantor, che proprio Gödel aveva dimostrato intorno alla metà degli anni '30 del '900 essere consistente con i principi usuali della teoria degli insiemi,[21] e che, all'epoca della conferenza del 1946, egli riteneva per di più essere indipendente da quegli stessi assiomi.[22]

La convinzione fondamentale che Gödel esprime nei contributi più specificamente dedicati alle problematiche connesse con la congettura cantoriana, e che viene confermata da quanto emerge dal materiale inedito, è che possano esistere dei principi insiemistici del tutto nuovi, ma

di una riflessione articolata che passa anche attraverso una prima fase (superata grossomodo nel 1933, come testimonia l'inedito gödeliano *The present situations in the foundations of mathematics*, in *Kurt Gödel Collected Works vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, a cura di S. Feferman et al., cit., pp. 36-53.), durante la quale Gödel sosteneva come la concezione hilbertiana non fosse affatto messa in crisi dalla propria scoperta.

[19] Cfr. K. Gödel, *Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems of mathematics*, in *The Undecidable*, a cura di M. Davis, cit., pp. 84-88 (ristampato in *Kurt Gödel Collected Works vol. II: Publications 1929-1974*, a cura di S. Feferman et al., cit., pp. 150-153).

[20] Tecnicamente parlando, il passaggio in questione corrisponde all'accettazione di opportune restrizioni dell'assioma della comprensione insiemistica. Per fare un esempio, se il formalismo di partenza è quello dell'aritmetica di Peano, al fine di decidere l'enunciato indecidibile di Gödel occorre ammettere almeno un principio di comprensione per formule Δ^1_1.

[21] Per quanto la prima presentazione del risultato sia del 1938, John Dawson, nella sua biografia di Gödel (cfr. J.W. Dawson, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, A.K. Peters, Wellesley 1996), parla di una dimostrazione del teorema completata già intorno al 1935.

[22] Le prime dichiarazioni esplicite in questo senso, sono contenute nell'articolo del 1947 dedicato al problema del continuo di Cantor (cfr. K. Gödel, *What is Cantor's continuum problem?*, in «American Mathematical Monthly», 54, 1947, pp. 515-525). L'analisi di materiale non pubblicato permette ragionevolmente di retrodatare questa convinzione.

strettamente connessi con quelli comunemente indicati come 'assiomi dell'infinito' (ossia assunzioni sull'estensione dell'universo degli insiemi),[23] i quali ci metterebbero presumibilmente in condizione di decidere non solo l'ipotesi di Cantor, ma anche altri problemi indecidibili della teoria degli insiemi o dell'analisi.[24] Più precisamente, l'idea di Gödel, così come egli la discute, nel modo forse più esplicito, nel testo di una conferenza inedita del 1951,[25] è che il tentativo stesso di assiomatizzare il concetto di insieme per passi successivi, un accorgimento necessario al fine di evitare i paradossi della teoria ingenua degli insiemi, conduce in modo naturale ad una successione transfinita di assunzioni circa l'esistenza di collezioni sempre più grandi. Gli «assiomi dell'infinito», che scaturiscono in tal senso dalla riflessione su concetti basilari del ragionamento matematico, sono quindi il risultato dell'approfondimento, da parte nostra, della compresione di quelle nozioni fondamentali. Essi stanno perciò, dal punto di vista dell'evidenza, sullo stesso piano degli altri assiomi insiemistici.[26] Ed è sulla base del loro emergere da un atto, quello basato su una 'relazione' con certi termini astratti, il quale è, per Gödel, il fondamento del ragionamento matematico stesso, che potrebbe trovare spiegazione l'idea che da tali principi possa dipendere la soluzione di problemi matematici (non necessariamente confinati alla teoria dei numeri) attualmente irresolubili.

Alla base di tale posizione parrebbe celarsi un'assunto di tipo epistemologico: è possibile che non via sia fine alle risorse del ragionamento matematico umano, come dimostra la serie transfinita di assunzioni

[23] Tali assiomi, in generale, sanciscono infatti l'esistenza di collezioni tanto grandi da non poter essere determinate sulla base degli usuali principi della teoria assiomatica degli insiemi.

[24] Occorre tenere presente che tale posizione di Gödel in merito alla congettura di Cantor, dovrebbe essere guardata come il risultato del suo punto di vista 'più stabile' al proposito. Una disamina più dettagliata dei lavori di Gödel farebbe infatti emergere un approccio complicato e non privo di cambiamenti di opinione.

[25] Cfr. K. Gödel, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, in *Kurt Gödel Collected Works vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, a cura di S. Feferman et al., cit., pp. 304-323. La parte del testo rilevante ai fine della nostra discussione, è quella che si trova alle pp. 305-307.

[26] Si tenga presente che l'estensione di un formalismo di cui si è detto in precedenza e che passa attraverso la definizione di un predicato di verità e l'assunzione di un principio di comprensione insiemistica, equivale, nel caso del formalismo insiemistico, all'assunzione di un opportuno assioma dell'infinito (per una spiegazione più dettagliata, si può vedere S. Feferman, *Kurt Gödel: Conviction and caution*, cit.). La ragione sulla base della quale Gödel guardava a questi principi come ad assiomi tanto legittimati quanto le usuali assunzioni della teoria degli insiemi, può dunque essere correlata in modo diretto con il problema dell'evidenza di quelle inferenze che rendono decidibili enunciati contrariamente indecidibili.

insiemistiche ognuna delle quali garantisce la soluzione di nuovi problemi matematici.[27] Ad una simile assunzione, costituendone un possibile completamento, si può affiancare il convincimento di Gödel relativo alla natura non computazionale della mente umana, ossia della sua capacità di andare oltre i limiti delle procedure meccaniche identificate con i processi di calcolo eseguibili mediante una macchina di Turing.[28]

Tale posizione, che potrebbe apparire a prima vista come estrinseca rispetto al tipo di problematiche fin qui discusse, risulta essere a ben vedere, invece, intimamente connessa con esse. E non solo perché Gödel, come risulta da una nota sui risultati di indecidibilità dei primi anni '70 del '900, era fermamente convinto che la natura non computazionale della ragione si esplicasse in sommo grado «nel corso dell'applicazione» della «procedura mentale» che rende possibile il ragionamento matematico (e che consiste nella comprensione «sempre più precisa» degli enti astratti, e nell'ingresso di enti astratti del tutto nuovi «nella sfera della nostra comprensione»). Ma anche perché egli riteneva che un esempio significativo a tale proposito fosse rappresentato proprio dalla costruzione di assiomi dell'infinito sempre più forti in teoria degli insiemi.

Per quanto la posizione di Gödel rimanga permeata di un certo 'esoterismo' che ne impedisce una completa chiarificazione, l'impressione di cui si diceva di un legame con quanto fin qui ricordato può essere confermata tenendo presente che, in accordo con quanto stabilisce il teorema di incompletezza in versione generalizzata, la collezione delle equazioni diofantee di tipo $\mathbf{\Pi}^0_2$ indicata con $\mathbf{A}$ rappresenta, per quanto è possibile dimostrare in relazione ad essa, un limite invalicabile per le potenzialità matematiche di ogni macchina di Turing. D'altra parte, è una conseguenza della riflessione gödeliana sull'ipotesi di Cantor e gli assiomi dell'infinito, che è possibile individuare una successione transfinita di principi che permettono proprio una soluzione dei proble-

[27] Tale posizione implicherebbe l'idea che non esistono problemi matematici assolutamente irresolubili, ossia problemi rispetto ai quali la ragione umana non sia 'costituzionalmente' in grado di offrire una soluzione. È interessante notare che di problemi matematici assolutamente irresolubili in questo senso, problemi legati all'ipotesi del continuo di Cantor ed all'assioma di costruibilità, era stato lo stesso Gödel a parlare in materiale inedito tra la fine degli anni '30 ed i primissimi anni'40 del '900 (cfr. *Kurt Gödel Collected Works vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, a cura di S. Feferman et al., cit., pp. 129, 175 e 184-185).

[28] Oltre all'ultima delle tre note dalle quali è composto il breve scritto di Gödel *Some remarks on the undecidability results* (in *Kurt Gödel Collected Works vol. II: Publications 1929-1974*, a cura di S. Feferman et al., cit., pp. 305-306), concorrono a sostenere tale tesi anche le dichiarazioni dello stesso Gödel al riguardo raccolte da Hao Wang (si veda, di quest'ultimo, *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*, MIT Press, Cambridge 1996, cap. 6).

mi di tal genere, la quale, per il fenomeno dell'incompletabilità dei sistemi formali connesso con i teoremi di incompletezza, non può essere il frutto di una procedura meccanica di computo. Ciò comporterebbe allora, *qualora si guardasse alla successione transfinita di assiomi in questione come al risultato naturale della pratica del ragionamento matematico*, che la ragione umana è sempre capace di nuove assunzioni (originate in modo *non effettivo*), le quali la portano al di là delle potenzialità matematiche di ogni macchina di Turing.

Gödel ben sapeva come tale ragionamento mal si presti ad un tentativo di rigorizzazione che ne volesse rendere il contenuto indipendente da quell'assunzione fondazionale enfatizzata con il corsivo nel capoverso precedente: già nel 1951, egli si era reso conto di come l'uso logicamente coerente e concettualmente corretto dei teoremi di incompletezza non permettesse di concludere l'insostenibilità di un'equivalenza in campo matematico tra la mente umana ed una macchina di Turing.[29]

Proprio l'ineliminabilità di una simile assunzione, che si lega ad un approccio acritico alla metodologia di indagine matematica ed è quindi compatibile con il ben noto 'platonismo' gödeliano in campo matematico, potrebbe giustificare, ma a nostro avviso non in modo decisivo, quella semplificazione della filosofia di Gödel alla quale talvolta si ricorre, e che consiste nel ridurne i contenuti alla sola idea dell'esistenza indipendente dei concetti matematici dalle nostre definizioni o costruzioni.

Tale riduzione ci pare tanto più ingiustificata se si considera come le 'escursioni' di Gödel su temi, come quello relativo alla natura della ragione umana, apparentemente meno legati ad un discorso relativo alla sola disciplina matematica, intrattengono un forte legame con l'idea cardine dell'approccio fondazionale da lui condiviso (e, sulla base di quanto detto, grossolanamente racchiusa nella Dottrina che porta il suo nome).

3. *Logica e Meccanicismo*

La nota che contiene l'esplicitazione da parte di Gödel del proprio punto di vista circa la vera natura della ragione umana, è concepita dall'autore come una risposta alla posizione sostenuta, a detta di Gödel, dal matematico britannico Alan Turing.[30] L'intento di Gödel si fonda su un'interpretazione del § 9 del già citato lavoro di Turing del 1937 che, alla luce dell'opera di chiarificazione di Wilfried Sieg della quale si

[29] L'esame della questione di cui si dice nel testo, è contenuta nell'intervento inedito di Gödel ad un meeting dell'American Mathematical Society e svoltosi, appunto, nel 1951 (si veda la nota 25), alle pp. 308-310.

[30] Il titolo della terza nota che compone del 1972 alla quale si è fatto riferimento, è infatti «Un errore filosofico nel lavoro di Turing».

è già avuto modo di dire,[31] può essere considerata come fuorviante, se non errata.

Facciamo notare, *en passant*, che l'assenza di indicazioni chiare circa l'esistenza di un presupposto di tipo meccanicista dietro i lavori di Turing, è un fatto la cui sussistenza è rafforzata, e non messa in crisi, come vuole una posizione apparentemente condivisa da molti, da un'analisi di più ampio spettro dei contributi del matematico britannico.

Tale quadro, infatti, mal si concilia con quanto Turing viene dicendo già nel § 11 del proprio lavoro dedicato all'indagine sulle Logiche Ordinali[32] a proposito del ragionamento matematico, alla base del quale egli pone la facoltà dell'*ingegnosità*, la quale è all'origine della capacità di costruire dimostrazioni, e quella dell'*intuizione*, che permette di riconoscere come vera una proposizione matematica senza alcuna concatenazione di idee, e che non può essere a detta di Turing eliminata, come mostrano risultati quali i teoremi di Gödel, mediante l'assunzione di un numero finito di regole di inferenza.

Questo quadro, però, si concilia poco anche con le considerazioni del matematico britannico nei contributi degli anni del secondo dopoguerra, pur essendo questi l'espressione del pionieristico progetto di Turing di dare vita ad un dispositivo meccanico che esibisca un comportamento intelligente. L'idea che il modello rappresentato dalle macchine di Turing possa essere un correlato fedele del *modus operandi* di un essere umano, viene sottoposto ad una critica non meno chiara da parte del matematico britannico: «la *disciplina*», ovvero la capacità di eseguire compiti ed obbedire ad ordini esterni, «non è sufficiente, da sola, per generare intelligenza. Ciò che occorre in aggiunta lo chiamiamo *iniziativa*. [...] Il nostro scopo è quello di scoprire la natura di questo residuo così come esso si presenta nell'uomo, e di cercare di riprodurlo su una macchina».[33]

Il fatto che ciò spinga ad escludere quantomeno che il matematico britannico potesse essere un sostenitore dell'idea che la ragione umana sia in un qualche senso equivalente ad una macchina di Turing,[34] non è

[31] Si veda quanto sottolineato alla nota 8.

[32] Cfr. A.M. Turing, *Systems of logic based on ordinals*, in «Proceedings of the London Mathematical Society», 45, 1939, pp. 161-228 (ristampato in *The undecidable*, a cura di M. Davis, cit., pp. 155-222).

[33] A.M. Turing, *Intelligent Machinery*, in «Machine Intelligence» 5, 1948, p. 21.

[34] Sembra piuttosto plausibile che egli non escludesse l'esistenza di una componente non computazionale della ragione umana: all'ingegnosità corrisponde, nel caso del ragionamento matematico, l'intuizione la cui riducibilità ad un insieme di regole formali è esplicitamente esclusa; alla disciplina (la cui forma «più estrema» viene identificata con il comportamento di una macchina di Turing universale), corrisponde, nel caso del com-

un fatto interamente estrinseco all'argomento principale del presente paragrafo, essendo stato Turing fra i primi, come Gödel,[35] a considerare la possibilità che i teoremi limitativi della logica potessero essere utilizzati per costruire un'«obiezione matematica» all'idea che una macchina possa esibire un comportamento intelligente (ovvero, rovesciando la questione, che la mente possa avere natura computazionale). Anch'egli, come Gödel, giunse ad escludere che ciò potesse essere il caso.

All'origine dell'interesse per una simile problematica vi è certamente la possibilità di offrire un'analisi apparentemente esaustiva dell'istanza meccanicista grazie all'esistenza di un correlato matematicamente preciso della nozione di «procedura effettiva di computo». Un tale assunto può essere così ricondotto ad ammettere l'esistenza di un sistema formale d'assiomi (ovvero della macchina di Turing che ne enumera i teoremi) entro il quale siano dimostrabili tutti e soli gli enunciati riconoscibili come veri da un matematico (umano) idealizzato. Il caso escluso da Gödel e Turing, che sia cioè possibile confutare in modo rigoroso tale evenienza, è stato invece perseguito da taluni studiosi come il filosofo di Oxford J.R. Lucas[36] e, in tempi più recenti, dal fisico e matematico inglese Roger Penrose.[37]

Una prima osservazione riguarda gli argomenti prodotti per confutare l'istanza meccanicista. Non è difficile rendersi conto del fatto che, pur sotto diverse declinazioni, essi sembrano dipendere da una nozione di «verità matematica», epistemologicamente intesa come «ciò che viene ritenuto matematicamente certo in modo incontrovertibile», le cui tracce sono presenti già, si sarà notato, nell'assunto meccanicista che si intende in tal modo confutare. Un simile concetto, tuttavia, è tutt'altro che dotato di un significato chiaro e distinto, come invece nelle disamine in questione si presume: non è un caso che al problema di determinarne il

portamento intelligente in generale, l'inizativa, sulla natura della quale Turing evita di pronunciarsi.

[35] Dell'analisi da parte di Gödel di tale implicazioni dei teoremi di incompletezza si è già avuto modo di dire (si veda la nota 25). Turing, dal canto suo, dedicò più di un commento alla questione che egli riteneva essere all'origine di una «obiezione matematica» all'idea di un dispositivo meccanico con intelligenza a partire da una conferenza del 1947 alla London Mathematical Society (cfr. A.M. Turing, *Lecture at the London Mathematical Society on 20 February 1947* in *A M. Turing ACE report and other papers*, a cura di B.E. Carpenter, R.W. Doran, Cambridge Universiuty Press, Cambridge 1986, pp. 107-127).

[36] Cfr. J.R. Lucas, *Minds, machines and Gödel*, in «Philosophy», 36, 1961, pp. 112-127.

[37] Cfr. R. Penrose, *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, Oxford 1989, *Shadows of the Mind*, Oxford University Press, Oxford 1994, e R. Penrose et al., *Commentaries on "Shadows of the mind"*, in «Psyche», 2, 1995.

senso, ovvero di rispondere al quesito «Che cos'è la verità matematica?», si possono in ultima analisi ricondurre i contrasti tra le varie posizioni emerse nel corso del dibattito sui fondamenti della matematica tradizionalmente inteso.

Al fine di ovviare alle possibili critiche che possono così scaturire, non sembrano che rimanere due vie ai sostenitori di tale valenza filosofica dei risultati limitativi della logica.

La prima consiste in un ulteriore sforzo di analisi concettuale della nozione in gioco per eliminarne l'ambiguità residua. Se ciò viene fatto secondo le linee condivisibili indicate da Gödel[38] risulta che non c'è modo di rendere contenutisticamente precisa la nozione *e* confutare l'assunto meccanicista (si mostra cioè che la conclusione raggiunta da argomenti quali quelli di Lucas e Penrose sembra dipendere in modo essenziale dall'ambiguità indicata).[39]

Una seconda possibilità è invece quella di riformulare l'argomento in modo da rendere superfluo il riferimento a tale concetto. È questa l'operazione condotta da Per Lindström[40] rispetto alla più recente versione dell'argomento di Penrose. Si giunge in tal modo alla dimostrazione di un risultato secondo il quale l'inferenza così ottenuta non è generalmente valida (si dimostra quindi che è sempre possibile costruire un controesempio all'argomento di Penrose in versione «riveduta e corretta»).

Tale conclusione può essere persino ulteriormente raffinata.

Risulta infatti[41] che l'argomento offerto da Lucas e Penrose privato dell'ambiguità derivante dal ricorso ad un concetto di verità matematica incontrovertibile, dipende da un'assunzione la quale, informalmente parlando, si riduce all'idea che, di fronte ad un corpo di conoscenze acquisito nella forma di un sistema di principi assiomatici, sia sempre possibile offrirne un'estensione, che mantenga il grado di evidenza del sistema di partenza, mediante l'aggiunta di enunciati indipendenti da esso.[42]

[38] Nel luogo indicato alla nota 29.

[39] Se espressioni come 'incontrovertibilmente vero' o 'vero con certezza matematica', vengono assunte significare semplicemente 'essere dimostrabile' (nel senso informale di quest'ultimo termine), si può mostrare esclusivamente, a partire da certe plausibili assunzioni ulteriori, che *se* la mente umana fosse equivalente ad una macchina di Turing che produce solo risultati corretti, *allora* questo stesso fatto non potrebbe essere accertabile con certezza matematica.

[40] Cfr. P. Lindström, *Penrose's new argument*, in «Journal of Philosophical Logic», 30, 2001, pp. 241-250.

[41] Da questo punto di vista l'analisi di Lindström, si completa con quella offerta da Pavel Pudlák in *A note on the applicability of the incompleteness theorems to human mind*, in «Annals of Pure and Applied Logic», 96, 1999, pp. 335-342.

[42] Su un piano formale, l'assunzione in questione corrisponde alla validità generale di un'inferenza che permetta di concludere, sotto una certa definizione di correttezza di

Con ciò, si finisce dunque per rivelare la compresenza di e l'interazione tra, ambiti diversi: all'intento filosofico anti-meccanicista, si somma l'assunzione un po' dogmatica di carattere teoretico che, in ultima analisi, la conoscenza matematica progredisca invariabilmente lungo la direzione tracciata dal rigore assoluto.

La confutazione dell'argomento di Penrose, dunque, può essere non solo utilizzata per rivelarne i limiti in termini di cogenza filosofica, ma anche per ridimensionare l'incontrovertibilità dei suoi presupposti teoretici: per concludere cioè, finendo per esaltare in questo modo anche una valenza metodologica della scoperta gödeliana, che il momento dell'estensione di un corpo di conoscenze per aggiunta di nuovi assiomi in particolare, si presta ad una realizzazione che non è affatto unidirezionale. Per concludere in sostanza, con Pudlák, che «la vaghezza è presente nel pensiero matematico, sebbene non nel processo deduttivo ma nella decisione riguardo a quali assiomi si dovrebbe accettare».[43]

Si apre così la possibilità per un livello ulteriore dell'analisi.

Se infatti l'immagine più corente con i risultati dell'indagine metamatematica finisce per essere quella secondo la quale l'aggiunta di nuove assunzioni ad un corpo di conoscenze acquisito costituisce un momento nel quale si esercita una scelta tra le alternative possibili, assumendo magari come guida, da un punto di vista euristico, una 'confidenza' o 'fiducia' in una di esse dettata dalla plausibilità delle conseguenze che discenderebbero dalla sua assunzione, si potrebbe anche chiedersi se sia possibile o meno offrire un'analisi in termini logici del quadro in tal modo risultate. In sostanza, acquisita l'insoddisfazione per il modello dei sistemi formali d'assiomi, ovvero delle procedure effettive di computo, pur sottolineando tutti i limiti dei tentativi di costruire a partire da ciò degli argomenti rigorosi al riguardo, resta in piedi l'ipotesi che sia possibile offrirne un appropriato adeguamento.

La plausibilità di un simile intento può essere avvalorata, come d'altra parte è stato fatto, alla luce dei risultati derivanti da una serie di indagini logiche compiute a partire dagli anni '60 del '900 intorno all'idea delle procedure per tentativi ed errori.[44] Si tratta di immaginare la si-

un sistema formale d'assiomi e sotto l'ipotesi che essa valga di un certo F, la consistenza del sistema ottenuto da F per aggiunta dell'enunciato che ne esprime la correttezza.

[43] P. Pudlák, *A note on the applicability of the incompleteness theorems to human mind*, cit., p. 342.

[44] L'intuizione alla base di simili procedimenti consiste nell'ammettere la possibilità che una procedura di decisione, ossia una macchina di Turing, produca, per ogni dato *input*, una successione di *output*, solo l'ultimo dei quali deve essere considerato come la risposta definitiva della macchina. Essa, detto in altri termini, può 'cambiare idea' un numero finito ma arbitrario di volte, senza che sia possibile determinare, ad ogni istante, se la macchina sia sul punto di farlo ancora, oppure no. I contributi di riferimento, sono

tuazione seguente: data una collezione di enunciati di partenza (il corpo di conoscenze acquisito sunnominato), se ne considerano tutte le possibili estensioni, sulla base delle indicazioni di una «funzione proponente» che enumera le altre formule chiuse del linguaggio, e se ne calcolano progressivamente le conseguenze logiche assumendo, come criterio guida, quello di escludere, di volta in volta, tutti e soli gli enunciati rivelatisi contraddittori.[45]

Si giunge infatti in tal modo a sottolineare l'importanza della collezione dei cosiddetti *limiti inferiori*, alla quale appartiene l'insieme delle tesi definitive, o dei teoremi, di un sistema dialettico, e che coincide con la classe degli insiemi di numeri Δ_2^0 della gerarchia aritmetica. Oltre che palesare il tipo di 'salto concettuale' insito nel passaggio dai sistemi formali ai sistemi dialettici,[46] ciò consente una valutazione complessiva dell'impatto dei risultati limitativi della logica nel loro complesso, ed un giudizio conseguente sull'effettiva portata per tale valutazione delle considerazioni euristiche alle quali si è fatto cenno.

La rilevanza dei risultati di indecidibilità ai fini del tipo di discussione della quale ci siamo occupati, consiste essenzialmente, infatti, nell'evidenziare una differenza fondamentale tra l'insieme di ciò che è formalmente dimostrabile in un sistema F d'assiomi e la classe degli enunciati veri, nel senso tarskiano del termine, del linguaggio sul quale esso è basato: indicate rispettivamente le due collezioni con $\mathbf{T}_F$ e $\mathbf{V}$ ed assunta la correttezza del sistema, essi consentono cioè di dimostrare che $\mathbf{V}-\mathbf{T}_F$ (ossia la collezione differenza tra i due) non è vuoto. La finalità degli argomenti come quelli di Lucas e Penrose consiste nel rendere evidente come appartenga alle potenzialità teoriche di un matematico umano, la capacità di «fare sempre meglio» di un qualsiasi sistema formale (e quindi come la

H. Putnam, *Trial and error predicates*, in «The Journal of Symbolic Logic», 18, 1965, pp. 49-57, e E.M. Gold, *Limiting recursion*, in «The Journal of Symbolic Logic», 18, 1965, pp. 28-48.

[45] Cfr. R. Magari, *Su certe teorie non enumerabili*, in «Annali di Matematica Pura ed Applicata», 48, 1974, pp. 119-152, e, dello stesso autore, *Significato e verità nell'aritmetica peaniana*, in «Annali di Matematica Pura ed Applicata», 103, 1975, pp. 343-368. Formalmente parlando si considera una terna $<f, h, c>$ costituente ciò che Magari chiama un «sistema dialettico», dove, assunta l'esistenza di una corrispondenza biunivoca ricorsiva tra l'insieme delle proposizioni e $\mathbf{N}$: (i) f è la *funzione proponente* ricorsiva totale e biettiva da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, (ii) h è la *funzione di deduzione* ricorsiva totale che permette di associare ad ogni sottoinsieme finito X di $\mathbf{N}$ il sottoinsieme ricorsivamente enumerabile delle conseguenze logiche di elementi di X, (iii) c rappresenta una contraddizione ovvero un elemento di $\mathbf{N}$ l'insieme delle conseguenze logiche del singoletto del quale coincide con l'intero $\mathbf{N}$ (ossia tale che $h(\{c\})=\mathbf{N}$).

[46] La collezione dei teoremi di un sistema formale d'assiomi nel senso usuale del termine è Σ_1^0. Dunque, con i sistemi dialettici non si è fatto altro che salire un gradino, in un senso preciso dell'espressione, nella cosiddetta 'gerarchia del salto insiemistico'.

collezione degli enunciati matematici da esso riconosciuti come veri contenga propriamente $\mathbf{T}_F$, per ogni F, oltre ad essere a sua volta contenuta, per un'assunzione di correttezza, nella collezione **V** delle verità).

Passando ai sistemi dialettici, i quali possiedono una maggiore plausibilità euristica per ragioni già sottolineate e garantiscono, a determinate condizioni,[47] il superamento del genere di limitazione dei sistemi usuali offrendo una decisione, ad esempio, dell'enunciato di Gödel, non si risolve, per ovvie ragioni dipendenti da certi risultati legati agli sviluppi della teoria della ricorsività,[48] il problema fondamentale: come nel caso dei sistemi usuali, si può dimostrare che è possibile generare, in modo effettivo ed uniforme, enunciati che sono veri se e solo se non appartengono alla collezione delle tesi definitive di un certo sistema dialettico.

Tuttavia, e ciò costituisce una prima indicazione della rilevanza per il tema generale delle considerazioni di ispirazione euristica dalle quali si è preso le mosse, la possibilità di riformulare su questa base argomenti analoghi a quelli di Lucas e Penrose, si scontra con il venir meno di un presupposto fondamentale, ossia l'esistenza, nel caso di un sistema dialettico, di un metodo generale che permetta di determinare se un enunciato sia o meno una tesi definitiva del sistema.

Ma l'indagine sui limiti inferiori offre anche uno spunto ulteriore, connesso, oltre ché con le limitazioni deduttive del tipo individuato da Gödel, anche con quelle espressive legate al celebre teorema di Tarski relative all'indefinibilità aritmetica del predicato di verità.

La ragione sulla base della quale, per opportune scelte della funzione proponente, l'enunciato indecidibile di Gödel entra a far parte delle tesi definitive di un sistema dialettico, si presta ad essere generalizzata e a divenire il criterio guida per la definizione di una collezione di enunciati veri alternativa a quella usualmente definita sulla base delle condizioni tarskiane.[49] Si finisce così per individuare la più piccola collezione che estende l'insieme dei teoremi dell'usuale teoria peaniana dei numeri naturali, che è chiusa sotto l'inferenza cosiddetta di *modus ponens* e che

[47] La dipendenza di un simile risultato dalle condizioni che, nella terna <*f*, *h*, *c*> che costituisce un sistema dialettico, si impongono sulla 'funzione proponente' *f*, viene discussa da Magari nel primo dei due lavori citati nella nota 49, alle pp. 146-149.

[48] Intendiamo riferirci in particolare al teorema, cfr., ad esempio, H. Rogers, *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw Hill Series, New York 1967, p. 314, dal quale discende che l'insieme **V** è un insieme iperaritmetico che si situa, più specificamente, al primo livello transfinito della 'gerarchia del salto'.

[49] L'enunciato gödeliano φ_F per un certo sistema formale F, infatti, risulta essere tale che valgono (i) *non* $\vdash_F \varphi_F$, (ii) *non* $\vdash_F \neg\varphi_F$ e (iii) $\vdash_F \neg\varphi_F \rightarrow Teor_F(\ulcorner \neg\varphi_F \urcorner)$. Pur non essendo a causa di (ii) *refutabile* in F, esso è però, per (iii), *falsificabile* in F: esiste un metodo sulla base del quale, assunta la correttezza di F, è possibile refutare φ_F in caso esso sia falso (cioè, in caso sia vera la sua negazione).

contiene, inoltre, le negazioni di enunciati i quali, seppur indecidibili nel sistema dell'aritmetica di Peano, risultino, assunta la correttezza di tale teoria, in essa dimostrabilmente 'falsificabili' (ovvero, refutabili nel caso della loro falsità).

I risultati della teoria non tarskiana della verità di Magari, di sapore popperiano,[50] sono di un certo interesse. Si dimostra innanzi tutto che la collezione di enunciati risultante[51] è un limite inferiore, e coincide dunque con l'insieme delle risposte di una procedura per tentativi ed errori. Inoltre, definito l'insieme delle proposizioni *sensate* come la riunione degli enunciati veri nel senso di Magari e delle loro negazioni, si prova che gli enunciati indecidibili nell'aritmetica di Peano ottenuti sulla falsariga della costruzione gödeliana, sono insensati.

Ciò suggerisce, come dicevamo, un esito più radicale rispetto alle conclusioni che è possibile ricavare dall'introduzione dei soli sistemi dialettici, in quanto si avanza in tal senso, sulla base del concetto delle procedure per tentativi ed errori, non solo una proposta di revisione del modello usuale dei sistemi assiomatici formali, ma anche della collezione 'di riferimento' per essi (quella che si intenderebbe cioè caratterizzare mediante gli strumenti dimostrativi dei primi) ossia la classe delle verità. Il fatto che questo duplice livello di critica finisca per convergere sul medesimo concetto, quello di limite inferiore, potrebbe essere colto, allora, per proporre una ridefinizione dei paradigmi dell'indagine metamatematica tradizionalmente intesa, la quale consenta di vedere nei concetti alla base di tali costruzioni logiche, e nelle motivazioni che ne sono all'origine, i margini per la praticabilità dell'ideale fondazionale di hilbertiana memoria relativo ad una trattazione della verità a livello assiomatico-formale (più opportunamente indicato, seguendo il suggerimento di Magari, come livello 'semi-formale').

[50] In effetti, si tratta di una concezione che si basa, in generale, sull'idea che l'indagine metamatematica stia ai sistemi formali come le scienze naturali stanno al mondo, e che sia dunque legittimo adottare nel caso della prima criteri di valutazione che risultano plausibile nel caso della seconda.

[51] Si tratta della collezione V^S degli enunciati 'sensatamente veri', definita induttivamente sulla base delle clausole: (i) se $PA \vdash \varphi$, allora $\varphi \in V^S$, (ii) se $\varphi \in V^S$ e $\varphi \rightarrow \psi \in V^S$, allora $\psi \in V^S$, (iii) se $\neg\varphi \rightarrow Teor_{PA}(\ulcorner \neg \varphi \urcorner) \in V^S$ e *non* $PA \vdash \neg\varphi$, allora $\varphi \in V^S$.