極限論の講義について 2 ： 連続性

著者名(日)	杉田 勝美, 齋藤 実
雑誌名	山梨学院大学経営情報学論集
巻	第20号
ページ	53-59
発行年	2014-02-26
URL	http://id.nii.ac.jp/1188/00003009/

極限論の講義についてⅡ
――連　続　性――

杉　田　勝　実・齊　藤　　実

１．はじめに

前論考において極限論を丁寧に解説した。今回は、その典型的な応用である連続性について説明したい。連続、連続と言っても、なかなかその意味するところは深く、含蓄があり、明快な解説をするのは、これまた一筋縄ではいかないところである。まず最も簡単なものに、関数の連続性というのがある。これは次のようなものである。

関数$y=f(x)$が、$x=a$を含む区間で定義されており、$\lim_{x \to a} f(x)$が存在して、そのとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{1}$$

が成立するならば、この関数は、$x=a$で連続であるという。これはたった一点aでの連続であるが、一般にはある区間での連続性を議論することの方が多い。それには、今の定義を拡張して以下のようにすればよい。関数$y=f(x)$が、ある区間Ｉで定義されており、このＩの各点で⑴式が成り立つとき、この関数はＩで連続であるという。⑴式の意味は、前回述べたように有界の定義から上極限、下極限を導き、それらが一致するときに限り、⑴式が成立すると解釈してもよいし、あるいは$\varepsilon-\delta$論法を用いて理解してもよい。いずれにせよ、これは非常に簡単な極限論の応用であり、理解するのは容易いと思われる。直感的には、関数のグラフを書いたときに、その曲線が必ず繋がっていければならないということに過ぎない。さらに、fが実数体$\mathbf{R}$から$\mathbf{R}$への単なる写像（関数）ではなく、より一般化して、距離空間Xから距離空間Yへの写像と考えることもできる。以後は、距離空間の写像について考えることにする。

さて、写像$f: X \to Y$が連続であるための必要十分条件は、「位相」の言葉を使うと、Yの任意の開集合Uについて、そのfによる逆像$f^{-1}(U)$がXの開集合となることである。実は、これも同じ連続性の定義であり、位相幾何学（Topology）を勉強し始めた学生が最初に出会う文言である。しかし、最初はなかなかピンとこなくて、理解に苦しむところであろう。トポロジーとは、連続性にのみ着目して、二つの図形がお互いに連続写像で結ばれていれば、それらは同じ図形であるとする立場を採る学問である。つまり、図形が何か柔らかいものでできていて、伸ばしたり、縮ましたりして変形出来るものは、すべて同じ（位相同型）であるとするのである。これにより、幾何学における図形に対して明確な分類ができることになるのである。いずれにせよ、この後者の記述は極めて汎用性があり、位相幾何学、微分幾何学のような数学で用いられるだけではなく、理論物理学のような分野でも多用されている。現代数学は、すべて集合論を土台として成り立っており、集合論に基づいて定式化できないものは、現代における数学ではないとまで言われる。例えば、確率論ですら、集合関数から確率測度を定義し、それを用いて様々な分布を考えていくのである。その際、土台には、部分集合の族が据えられている。それゆえに、今述べた連続性の定義は大変重要なのであるが、⑴式による極限の定

義の方がはるかに簡潔で理解しやすいのではないだろうか。

もし、大学の初年度の講義において、この間をうまく繋ぐような解説がなされていたならば、学生の数学に対する理解度は飛躍的に高まるのではと思う。ここでは、極限論で定義される連続性が、いかにしてトポロジーでの連続性と同等になるのかを、順を追って説明して行こうと思う。

２．閉集合

まずは、閉集合を定義するために、その舞台となる距離空間 X を定義しよう。

〈距離空間の定義〉

距離空間とは、ある集合 X と、以下の条件を満たす一つの実関数（距離関数という）

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

との組 (X, d) である。

ⅰ）任意の元 $x, y \in X$ に対して、$d(x, y) \geq 0$ であり、また $x=y$ のときに限り、$d(x, y) = 0$ である。

ⅱ）任意の元 $x, y \in X$ に対して、$d(x, y) = d(y, x)$ である。

ⅲ）任意の元 $x, y, z \in X$ に対して、$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ が成立する。

以後、簡単のために、組 (X, d) を単に距離空間 X と記すことにする。X の要素は点と呼ばれる。実は、距離空間はより一般的な位相空間の一例に過ぎないのであるが、かなり多くの位相空間が距離化定理により、距離空間にできることが分かっているので、ここでは距離空間に限定して議論を進めることにする。

次に閉集合を定義する。

〈閉集合の定義〉

X の部分集合 C に対して、C に含まれる点列 $\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が X の点列としての極限点 $p_0 \in X$ を持つとき、$p_0 \in C$ となるならば、この集合 C を X の閉集合という。

つまり、C に含まれる点列 $\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が X の中で収束して、$\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$ となるとき、p_0 も C の元であるならば、この C を X の閉集合というのである。この点列の極限は、前回述べた数列の極限と全く同じものであり、当然、有界の定義から上極限、下極限を導き、それらにより、この式を定義してもよいし、あるいは $\varepsilon-\delta$ 論法を用いて定義してもよい。その際には、距離関数 d を用いるのであることを注意しておく。つまり、前論考の⑴式において、絶対値の代わりに $d(p_n, p_0)$ とするのである。改めて記すと、任意の正の数 ε に対して適当な番号 M を選んで、

$$n \geq M \quad \Rightarrow \quad d(p_n, p_0) < \varepsilon$$

が成り立つ、ということである。

以上の準備の基に、写像の連続性を定義しよう。

３．写像の連続性

〈連続性の定義〉

距離空間 X から距離空間 Y への写像 f が、点 $p_0 \in X$ で連続であるとは、点 p_0 に収束する任意の点列 $\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p_0) \qquad (2)$$

が成立することである。また、X の任意の点で⑵式が成立するならば、写像 f は X で連続であるという。

ここで、前節で定義した閉集合と今定義した写像の連続性とを一緒にすると、次の結論が導けることに注意する。X, Y を距離空間とし、写

像$f: X \to Y$が連続であるならば、Yの閉集合Cの逆像$f^{-1}(C)$はまたXの閉集合となる。これは次のようにして証明ができる。$\forall n,\ p_n \in f^{-1}(C)$とし、この点列$\{p_n\}_{n \in \mathbf{N}}$が極限点$p_0$を持つとする、つまり$\lim_{n \to \infty} p_n = p_0$とするとき、$f$の連続性から$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = f(p_0)$が成立しているので、$C$が閉集合であることから、$\forall n,\ f(p_n) \in C$のとき、その極限点$f(p_0)$も$C$に属し、$f(p_0) \in C$となるのである。よって、$p_0 \in f^{-1}(C)$が結論される。繰り返すと、$\forall n,\ p_n \in f^{-1}(C)$で、$\lim_{n \to \infty} p_n = p_0$のとき、$p_0 \in f^{-1}(C)$が得られるのである。こうして閉集合の定義から、$f^{-1}(C)$は$X$の閉集合となることがわかる。

以上のことは、極限論を用いて写像の連続性と集合論とを結びつけた、とも言えるが、より正確に言えば、連続性の概念を、極限の概念と集合論とで表現し、それらの間の関係を述べたに過ぎないのである。だがしかし、ここに第1節で述べた疑問の本質が存在していたのである。

高校まで（あるいは大学の初年度まで）は、連続性の概念を極限論から理解していたのに、位相幾何学、トポロジー、あるいは微分幾何学などの現代的な講義を受けると、最初に集合論で定義された位相を用いて連続性の定義が行われるので、それまでにしっかり理解していたと思われた概念が、あっという間に崩れ去ってしまった、という経験を持っている学生はかなりの数に上るのではないだろうか。もちろん、数学科の学生はこの限りではないだろう。彼らには、じっくりと時間をかけてこれらの関係を熟慮することが可能であるし、恐らくは高校時代にすでに集合論に精通していただろうと想像されることから、このようなことは老婆心となってしまうであろう。しかし、物理系、工学系、情報系（理系、文系に限らない）の学生にとっては、ここのところのギャップは大変なものである。従って、このような事柄を講義することには大きな意義があると思われる。ここまでの議論（もちろん前論考も含む）を深く理解できれば、相当部分、悩みは解消され、更なる学業に邁進できるのではあるまいか。

さて、今証明したことは、写像$f: X \to Y$が連続であるならば、Yの閉集合Cの逆像$f^{-1}(C)$はまたXの閉集合となる、ということであるが、実は、この逆命題も成立するのである。いずれも合わせて、それを定理として次に示す。

４．連続性と閉集合

まず、核心となる定理を述べる。

〈定理Ⅰ〉

X, Yを距離空間としたとき、写像$f: X \to Y$が連続であるための必要十分条件は、Yの任意の閉集合Cの逆像$f^{-1}(C)$がまたXの閉集合となることである。

証明))

①必要条件

第３節において、点列の極限を用いてすでに述べた。

②十分条件

まず、X上の距離関数d_Xから導かれる関数$h: X \to \mathbf{R},\ h(p) = d_X(p, p_0)$を定義すると、これが$X$上の連続関数となっていることを示しておく。ここで、p_0はXの定点である。(1)式を今の場合に適用し、$\varepsilon - \delta$論法で表記すると、Xの任意の点qにおけるhの連続性は次のようになる。任意の$\varepsilon > 0$に対して、適当な$\delta > 0$が存在して、

$$d_X(p, q) < \delta \ \Rightarrow |h(p) - h(q)| < \varepsilon$$

が成り立つ。これを示せばよい。さて、d_Xの性質から、

$$d_X(p,\ p_0) \leq d_X(p,\ q) + d_X(q,\ p_0)$$

であるので、これより

$$d_X(p,\,p_0)-d_X(q,\,p_0)\le d_X(p,\,q)$$

が成立する。同様にして、

$$d_X(q,\,p_0)\le d_X(q,\,p)+d_X(p,\,p_0)$$

より

$$d_X(q,\,p_0)-d_X(p,\,p_0)\le d_X(q,\,p)$$

すなわち、

$$-(d_X(p,\,p_0)-d_X(q,\,p_0))\le d_X(p,\,q)$$

が成立する。以上をまとめて、

$$|h(p)-h(q)|<d_X(p,\,q)$$

が成り立つことがわかる。従って、任意の$\varepsilon>0$に対して、δを$\delta=\varepsilon$と採れば、結局、

$$d_X(p,q)<\delta\ \Rightarrow |h(p)-h(q)|<d_X(p,\,q)<\varepsilon$$

が成り立つことが言え、hの連続性が示せたことになる。

ここからが十分条件の証明である。Yの任意の閉集合Cの逆像$f^{-1}(C)$がまたXの閉集合となるならば、fが連続、すなわち、点p_0に収束する任意の点列$\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$に対して、$\lim_{n\to\infty}f(p_n)=f(p_0)$が成立することを示す。そのために背理法を用いて、このことが成立していないと仮定して矛盾を導くことにする。つまり、ある正の数εに対して、

$$d_Y(f(p_n),\,f(p_0))\ \ge\ \varepsilon \qquad (*)$$

となるような点$f(p_n)$が無数に存在すると仮定するのである。そこで、(*) 式を満たしているYの点列の中から部分点列$\{f(p_{k(i)})\}_{i\in\mathbf{N}}$を取り出し、これについて考えていくことにする。ここで、自然数iを置き換えた（自然数の中から抽出した）$\{k(i)\}_{i\in\mathbf{N}}$という集合についてもやはり、小さい方から順に並べるとする。すなわち、$i<j\ \Rightarrow\ k(i)<k(j)$である。このとき、$k(I)=M$となるような$I$を採ると、$i>I$に対して$k(i)>M$となるので、$d_X(p_{k(i)},\,p_0)<\varepsilon$が成立し、$\lim_{i\to\infty}p_{k(i)}=p_0$が言える。つまり、$X$の部分点列$\{p_{k(i)}\}_{i\in\mathbf{N}}$と元の点列$\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$は同一点$p_0$に収束するのである。

さて、Yの中の部分集合

$$C_\varepsilon\ =\{\,s\in Y\mid d_Y(s,\,f(p_0))\ge\varepsilon\,\}$$

を定義する。ここで、$d_Y(s,\,f(p_0))=h(s)$という関数を考えてみると、明らかに、$C_\varepsilon=h^{-1}([\varepsilon,\,\infty))$がが成立しており、$[\varepsilon,\,\infty)$は$\mathbf{R}$の閉集合であることから、$C_\varepsilon$も$Y$の閉集合であることがわかる。このことは、$h$の連続性から言える。今証明しようとしていることの条件は、Yの任意の閉集合の逆像はXの閉集合である、ということであったから、以上のことから、$f^{-1}(C_\varepsilon)$はXの閉集合であることが導かれる。上で採り出した部分点列$\{f(p_{k(i)})\}_{i\in\mathbf{N}}$に戻ろう。これらは (*) 式を満たしているから、$d_Y(f(p_{k(i)}),\,f(p_0))\ \ge\ \varepsilon$を満足し、当然$C_\varepsilon$の定義により、$f(p_{k(i)})\in C_\varepsilon$であり、よって$p_{k(i)}\in f^{-1}(C_\varepsilon)$が得られる。このとき、$f^{-1}(C_\varepsilon)$は$X$の閉集合であったことから、$p_{k(i)}$の極限点$p_0$も$f^{-1}(C_\varepsilon)$に属さなければならないので、結局$p_0\in f^{-1}(C_\varepsilon)$、すなわち、$f(p_0)\in C_\varepsilon$となってしまう。これは大変奇妙な結果である。なぜならば、C_εの定義により、ある正の数εに対して、

$$d_Y(f(p_0),\,f(p_0))\ \ge\ \varepsilon$$

であることになってしまうからである。Yにおける同一点の距離が0でないはずはないので、明らかに矛盾である。従って、出発点とした (*) 式が間違っていたことになる。ゆえに、あるMに対して、

$$n\ge M\ \Rightarrow\ d_Y(f(p_n),\ f(p_0))<\varepsilon$$

が成立し、$\lim_{n\to\infty}f(p_n)=f(p_0)$、つまり写像$f$の連続性が導かれたことになる。

こうして、定理Ⅰが点列の極限を用いて証明されたわけであるが、そこに出現している部分集合は閉集合であった。この論説の目標は、写像fの連続性と開集合との関係であったので、次の節において、閉集合を開集合に置き換えることを試みる。

5．連続性と開集合

開集合の定義の前に、ε−近傍を定義しておく。距離空間Xの点p_0と正の数εに対して、Xの部分集合である

$$N_\varepsilon(p_0, X) = \{\ p \in X \mid d_X(p, p_0) < \varepsilon\ \}$$

を、点p_0のε−近傍という。これを用いて開集合は次のように定義される。

〈開集合の定義〉

Xの部分集合Uに対して、Uの任意の点pに対応する適当な正の数εが存在して、

$$N_\varepsilon(p, X) \subset U$$

とできるとき、UをXの開集合という。また、この式を満足するような点pをUの内点という。つまり、考えている部分集合が内点のみから成り立っているとき、その集合を開集合というのである。

さて、以上の事柄に注意して、開集合と閉集合の間の重要な関係を示す定理を述べる。それにより、前節で述べた閉集合による連続性の定理が開集合で表現できるのである。

〈定理Ⅱ〉

Xの部分集合UがXの開集合となるための必要十分条件は、その補集合$X-U$がXの閉集合となることである。

証明））

①必要条件

$\forall n,\ p_n \in X-U,\ \lim_{n\to\infty} p_n = p_0$に対して、$p_0 \notin X-U$すなわち、$p_0 \in U$であると仮定してみる。すると$U$は開集合であるから、定義より、適当な正の数$\varepsilon$が存在して$N_\varepsilon(p_0, X) \subset U$となる。ところが、$p_n \in X-U$であるから$p_n \notin U$、特に$p_n \notin N_\varepsilon(p_0, X)$である。従って、$N_\varepsilon$の定義から明らかなように、$\forall n, d_X(p_n, p_0) \geq \varepsilon$となってしまい、これでは$\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$が成立しない。つまり矛盾。よって、$p_0 \notin U$、すなわち$p_0 \in X-U$となるので、補集合$X-U$は$X$の閉集合となることがわかる。

②十分条件

$X-U$がXの閉集合であると仮定して、UがXの開集合となることを示す。つまり、$\forall q_0 \in U$に対して、適当なεが存在して、$N_\varepsilon(q_0, X) \subset U$となることを示す。そのためにこれを否定してみる。どのようなεに対しても、$N_\varepsilon(q_0, X) \subset U$が成立しないような$q_0 \in U$が存在するとしてみるのである。不正確な表現ではあるが、q_0のε−近傍$N_\varepsilon(q_0, X)$は、Uから$X-U$にはみ出しているとするのである。厳密に言うと、どのようなεに対しても$N_\varepsilon(q_0, X) \cap (X-U) \neq \phi$が成立するということである。さて、$q_0$に収束する点列を構成するために、$\varepsilon = \frac{1}{m}$と置いてみると、今の式から

$$N_{\frac{1}{m}}(q_0, X) \cap (X-U) \neq \phi$$

となるので、この共通部分からq_mを選択することができる。こうして選択したq_mから点列$\{q_m\}_{m\in\mathbf{N}}$を構成してみると、任意のmに対して、

$$q_m \in N_{\frac{1}{m}}(q_0, X) = \left\{ q_m \in X \,\middle|\, d_X(q_m, q_0) < \frac{1}{m} \right\},\quad q_m \in X-U$$

が成り立つことがわかる。そこで、$\forall\varepsilon$に対して、適当な番号$M = \frac{1}{\varepsilon}$を選ぶと（自然数とならない

ときには切り上げる)、

$$m \geq M \left(d.h. \frac{1}{m} \leq \varepsilon \right) \Rightarrow d_X(q_m, q_0) < \frac{1}{m} \leq \varepsilon$$

とできることがわかるので、結局、$\lim_{m\to\infty} q_m = q_0$が言える。$X-U$は$X$の閉集合であったから、$q_0 \in X-U$、すなわち$q_0 \notin U$となってしまい、矛盾。こうして、$U$は$X$の開集合ではないとして矛盾が導かれたので、$U$は$X$の開集合であるという結論になる。

以上で、閉集合と開集合との関係がわかったので、最後に本論説の主題であった開集合による連続性の表現に移る。もはや一瀉千里である。

〈定理Ⅲ〉

X, Yを距離空間としたとき、写像$f: X \to Y$が連続であるための必要十分条件は、Yの任意の開集合Uの逆像$f^{-1}(U)$がまたXの開集合となることである。

証明))

①必要条件

Yの任意の開集合Uをとすると、定理Ⅱより$Y-U$はYの閉集合となる。ここで定理Ⅰを用いると、fの連続性から、$f^{-1}(Y-U)$はXの閉集合となる。このとき、

$$\begin{aligned} p \in f^{-1}(Y-U) \Leftrightarrow f(p) \in Y-U \Leftrightarrow f(p) \notin U \\ \Leftrightarrow p \notin f^{-1}(U) \Leftrightarrow p \in X - f^{-1}(U) \end{aligned}$$

が、最初と最後の項において、それぞれ任意の点pについて成り立つので、結局

$$f^{-1}(Y-U) = X - f^{-1}(U)$$

が言える。従って、$X - f^{-1}(U)$もXの閉集合となることがわかる。よって、定理Ⅱより$f^{-1}(U)$はXの開集合となる。

②十分条件

Yの任意の閉集合をCとすると、定理Ⅱより$Y-C$はYの開集合。仮定より、$f^{-1}(Y-C) = X - f^{-1}(C)$は$X$の開集合。よって、$f^{-1}(C)$は$X$の閉集合となり、定理Ⅰから、$f$の連続性が導かれる。

こうして、第一節で述べた、「位相」の言葉によるfの連続性に到達したのである。前論考の極限論からここまで、一つずつ石段を上って来たわけであるが、一つの石段は低くても、到達した高さは実はかなりのものであることがわかる。なぜならば、すでにトポロジーの第一歩を踏み出しているからである。

6．おわりに

大学初学年時の講義を想定して、数学のもっとも取っつき難いが、しかし非常に大切な集合の概念による連続性の表現に如何にして到達するかを説明してきた。実は、定理Ⅲにおいて、距離空間の制限を取り払い、かつ定理を定義に変えたものが、トポロジーの出発点となるのである。直感的に連続という概念を理解するのは容易いのであるが、ここで述べたように、開集合を用いて表現し、それを論証のみによって理解することは容易くない。このような高等学校と大学初年次の講義を繋ぐ解説が非常に不足しているのが、今の日本の高等教育の実態である。学ぶ者の立場に立って、そこのところのギャップが少しでも埋められることを念じて、筆をおく。

[参考文献]

1．杉田勝実、齊藤実：「極限論の講義について」、経営情報学論集 山梨学院大学（2012）。

2．高木貞治：解析概論、改訂第三版、岩波書店（1961）。

3．能代清：極限論と集合論、岩波書店（1970）。

4．杉田勝実：「解析学基礎Ⅰ、Ⅱ」講義ノート

(2008)。
5．松本幸夫：トポロジー入門、岩波書店（1985)。
6．内田伏一：集合と位相、裳華房（1986)。
7．杉田勝実、岡本良夫、関根松夫：理論物理のための微分幾何学（可換幾何学から非可換幾何学へ)、森北出版（2007)。