บทความวิจัย

สมบัติเชิงพีชคณิตของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกและตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อกสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่

สิรีธร วินทะไชย กศิธิภา กวนศิริ สหเทพ เตือนวีระเดช และ ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม*

บทคัดย่อ

เราขยายแนวคิดของผลคูณโครเนคเคอร์ไปสู่ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ เราได้ว่าผลคูณดังกล่าวเข้ากันได้กับการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การคูณเมทริกซ์แบบปรกติ การสลับเปลี่ยน และรอยเมทริกซ์ สมบัติเชิงพีชคณิตหลายอย่างของเมทริกซ์ เช่น ความสมมาตร การหาผกผันได้ ภาวะคล้าย สมภาค การทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ ถูกรักษาไว้ภายใต้ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก นอกจากนี้เราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณดังกล่าวกับตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก ความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถนำไปลดรูปสมการเมทริกซ์เชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเวกเตอร์-เมทริกซ์อย่างง่าย

คำสำคัญ: ผลคูณโครเนคเคอร์ ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก เมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ ตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก

*ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ผู้นิพนธ์ประสานงาน, email: pattrawut.ch@kmitl.ac.th

Algebraic Properties of the Block Kronecker Product and a Block Vector-Operator for Matrices over a Commutative Semiring

Sireeton Wintachai, Kasithipa Kuansiri, Sahathep Tuanweradech and Pattrawut Chansangiam*

ABSTRACT

We extend the notion of Kronecker product to the block Kronecker product for matrices over a commutative semiring. It turns out that this matrix product is compatible with the matrix addition, the scalar multiplication, the usual multiplication, the transposition, and the traces. Certain algebraic properties of matrices, such as symmetry, invertibility, similarity, congruence, diagonalizability, are preserved under the block Kronecker product. In addition, we investigate a relation between this matrix product and a block vector-operator. Such relation can be applied to reduce certain linear matrix equations to simple vector-matrix equations.

Keywords: Kronecker product, block Kronecker product, matrix over a commutative semiring, row-block vector-operator

*Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Corresponding author, email: pattrawut.ch@kmitl.ac.th

1. บทนำ

ในทฤษฎีเมทริกซ์ ผลคูณโครเนคเคอร์เป็นผลคูณเมทริกซ์ในรูปแบบหนึ่งซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\otimes$ ได้มาจากนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ Leopold Kronecker โดยสำหรับแต่ละเมทริกซ์จริง $A=\left[a_{ij}\right]$ และ B เรานิยาม

$$A\otimes B=\left[a_{ij}B\right]$$

นั่นคือ $A\otimes B$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีบล็อกที่ (i, j) เป็น $a_{ij}B$ สมบัติที่สำคัญของผลคูณดังกล่าวสามารถดูได้จาก [9, 15] ผลคูณโครเนคเคอร์มีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในคณิตศาสตร์ เช่น การวิเคราะห์เมทริกซ์ แคลคูลัสของเมทริกซ์ สมการเมทริกซ์เชิงเส้น สมการเชิงอนุพันธ์เมทริกซ์เชิงเส้น นอกจากนี้ยังมีการประยุกต์ใช้นอกสาขาคณิตศาสตร์ เช่น ทฤษฎีระบบ ฟิสิกส์ สถิติ วิทยาการคอมพิวเตอร์ แนวคิดของผลคูณดังกล่าวได้ถูกขยายไปสู่ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก (Block Kronecker product) ในงานวิจัย [11] สำหรับแต่ละเมทริกซ์จริง A และ B ซึ่ง B มีการแบ่งบล็อกโดยบล็อกย่อยที่ (k,l) เป็น $A\otimes B_{kl}$ เรานิยาม

$$A\boxtimes B=\left[A\otimes B_{kl}\right]_{kl}$$

นั่นคือ $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีบล็อกที่ (i, j) เป็น $A\otimes B_{kl}$ ในกรณีที่ B มีเพียงบล็อกย่อยเดียว จะได้ว่า $A\boxtimes B$ ลดรูปเป็น $A\otimes B$ งานวิจัย [18] ได้พิจารณาความสัมพันธ์ของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกกับผลคูณเมทริกซ์ในรูปแบบอื่นๆ

ในพีชคณิตเชิงเส้น เราได้ศึกษาเมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากฟีลด์ต่างๆ เช่น $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$ แนวคิดดังกล่าวได้มีการขยายไปสู่เมทริกซ์ที่มีสมาชิกมาจากโครงสร้างเชิงพีชคณิตอื่นๆ เช่น กึ่งริง (semiring) หรือกึ่งริงสลับที่ (commutative semiring) นักวิจัยหลายท่านได้ศึกษาเมทริกซ์เหนือโครงสร้างดังกล่าวในหลายประเด็น เช่น เมทริกซ์ผกผัน [13, 16] ความเป็นอิสระเชิงเส้น [4] ตัวกำหนด [12] และผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker product) [14] นอกจากนี้แนวคิดของปริภูมิเวกเตอร์หรือปริภูมิเชิงเส้นเหนือฟีลด์ได้ถูกขยายไปสู่ปริภูมิกึ่งเชิงเส้นเหนือกึ่งริงสลับที่ (semilinear spaces over a commutative semiring) [6, 17] แนวคิดของเมทริกซ์และปริภูมิกึ่งเชิงเส้นเหนือโครงสร้างดังกล่าวถูกนำมาใช้ในหลายสาขา เช่น ระบบวิภิชนัย (fuzzy systems) การหาค่าเหมาะที่สุด การวิจัยดำเนินงาน ทฤษฎีเครือข่าย และสารสนเทศ ดูตัวอย่างการประยุกต์ในงานวิจัย [2, 4, 7]

ในบทความนี้ เราพัฒนาองค์ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์โดยขยายแนวคิดของผลคูณโครเนคเคอร์ไปยังผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใดๆ เราแสดงให้เห็นว่าผลคูณดังกล่าวมีความเข้ากันได้กับการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การคูณเมทริกซ์แบบปรกติ การสลับเปลี่ยน และรอยเมทริกซ์ (ดูหัวข้อที่ 3) สมบัติหลายอย่างของเมทริกซ์ เช่น ความสมมาตร การหาผกผันได้ ภาวะคล้าย สมภาค การทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ ถูกรักษาไว้ภายใต้ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก (ดูหัวข้อที่ 4) เราพิจารณาความสัมพันธ์ของผลคูณดังกล่าวกับตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อกซึ่งเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่แปลงเมทริกซ์แบบบล็อกให้เป็นเวกเตอร์ รวมทั้งประยุกต์สมบัติข้างต้นเพื่อลดรูปสมการเมทริกซ์เชิงเส้นให้เป็นสมการเวกเตอร์-เมทริกซ์อย่างง่าย (ดูหัวข้อที่ 5)

ความรู้พื้นฐานที่ใช้ในงานวิจัยจะกล่าวถึงในหัวข้อที่สอง โดยเริ่มต้นจากบทนิยามและตัวอย่างที่สำคัญของกึ่งริงสลับที่ จากนั้นกล่าวถึงเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่และการดำเนินการเชิงพีชคณิต

2. ความรู้พื้นฐาน

งานวิจัย [19] และตำรา [8] ได้ให้บทนิยามของกึ่งริงสลับที่ไว้ดังนี้

บทนิยามที่ 2.1 กึ่งริงสลับที่เป็นระบบทางพีชคณิตที่ประกอบด้วยเซต L กับ

- การดำเนินการทวิภาคสองอย่างบน L ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ + และ $\cdot$ ตามลำดับ
- สมาชิกของ L อย่างน้อยสองสมาชิกที่ต่างกัน ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ 0 และ 1 ตามลำดับ

ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(L,+)$ เป็นโมนอยด์สลับที่ซึ่งมี 0 เป็นเอกลักษณ์
2. $(L,\cdot)$ เป็นโมนอยด์สลับที่ซึ่งมี 1 เป็นเอกลักษณ์
3. การดำเนินการ $\cdot$ สามารถกระจายเหนือการดำเนินการ + ทั้งทางซ้ายและทางขวา
4. $0\cdot r = 0 = r\cdot 0$ สำหรับทุก $r \in L$

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า $(L,+,\cdot,0,1)$ หรือ L เป็นกึ่งริงสลับที่

เห็นได้ชัดว่าทุกฟีลด์เป็นกึ่งริงสลับที่ ในกรณีเฉพาะ $\mathbb{R}$ และ $\mathbb{C}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการบวกและคูณแบบปรกติ ตัวอย่างของกึ่งริงสลับที่นอกเหนือจากฟีลด์มีดังนี้

ตัวอย่างที่ 2.2

1) ช่วงปิด $[0,1]$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ $a+b=\max\{a, b\}$ และ $a\bullet b=\min\{a, b\}$ สำหรับทุก $a, b\in[0, 1]$ โครงสร้างนี้เรียกว่าพีชคณิตวิภิชนัย (fuzzy algebra) ดูได้จากงานวิจัย [10]

ในกรณีทั่วไปสำหรับ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $\alpha<\beta$ จะได้ว่า $[\alpha,\beta]$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการข้างต้นซึ่งมี α เป็นเอกลักษณ์การบวก และมี β เป็นเอกลักษณ์การคูณ

2) $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ เป็นกึ่งริงสลับที่ภายใต้การดำเนินการ

$$a\oplus b=\begin{cases}\max\{a, b\} & ;\ a, b\in\mathbb{R}\\ -\infty & ;\ a=-\infty \text{ หรือ } b=-\infty\end{cases}$$

$$a\odot b=\begin{cases}a+b & ;\ a, b\in\mathbb{R}\\ -\infty & ;\ a=-\infty \text{ หรือ } b=-\infty\end{cases}$$

โครงสร้างนี้เรียกว่าพีชคณิตค่าสูงสุด-บวก (max-plus algebra) ดูได้จากงานวิจัย [1, 2, 3, 6]

3) พิจารณา $\mathbb{N}\cup\{0\}$ ภายใต้การดำเนินการ

$$a+b=\begin{cases}0 & ;\ a=b=0\\ \gcd(a, b) & ;\ \text{กรณีอื่น}\end{cases}$$

$$a\bullet b=\begin{cases}\mathrm{lcm}(a, b) & ;\ a, b\in\mathbb{N}\\ 0 & ;\ \text{กรณีอื่น}\end{cases}$$

จะได้ว่า $(\mathbb{N}\cup\{0\},+,\bullet)$ และ $(\mathbb{N}\cup\{0\},\bullet,+)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

4) ให้ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n > 1$ จะได้ว่า $(\mathbb{Z}_n, +, \bullet, \bar{0}, \bar{1})$ เป็นกึ่งริงสลับที่

5) ให้ $X \neq \varnothing$ และ $P(X)$ คือเพาเวอร์เซตของ X จะได้ว่า $(P(X), \cup, \cap, \varnothing, X)$ เป็นกึ่งริงสลับที่

ตัวอย่างที่ 2.3 พีชคณิต MV (MV-algebra) เป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซต L ที่มี

- สมาชิกอย่างน้อยสองสมาชิกที่ต่างกัน ซึ่งจะแทนด้วย 0 และ 1
- การดำเนินการทวิภาค $\oplus$ และ $\odot$ บน L
- การดำเนินการเอกภาค $\neg$ บน L (นั่นคือ $\neg$ เป็นฟังก์ชันจาก L ไปยัง L)

ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้สำหรับทุก $x, y, z \in L$

(1) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ (2) $x \oplus y = y \oplus x$

(3) $x \oplus 0 = x$ (4) $\neg(\neg x) = x$

(5) $x \oplus 1 = 1$ (6) $\neg 0 = 1$

(7) $x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$ (8) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$

สำหรับแต่ละ $x, y \in L$ นิยาม

$$x \vee y = (x \odot \neg y) \oplus y \quad \text{และ} \quad x \wedge y = (x \oplus \neg y) \odot y$$

จะได้ว่า $(L, \vee, \odot, 0, 1)$ และ $(L, \wedge, \oplus, 0, 1)$ เป็นกึ่งริงสลับที่ ศึกษาเพิ่มเติมได้จากงานวิจัย [5]

ในบทความนี้ กำหนดให้ L เป็นกึ่งริงสลับที่ และ $M_{m,n}(L)$ เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งสมาชิกแต่ละตำแหน่งมาจาก L ในกรณีที่ $m = n$ เราจะเขียนแทน $M_{n,n}(L)$ ด้วย $M_n(L)$ ถ้า $A \in M_{m,n}(L)$ เราจะเขียนแทนสมาชิกตำแหน่งที่ (i, j) ของเมทริกซ์ A ด้วย a_{ij} สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, ..., m$ และ $j = 1, 2, ..., n$ ในกรณีนี้เราเขียนแทนด้วย $A = \left[a_{ij}\right]_{m,n}$ หรือ $A = \left[a_{ij}\right]$

เรานิยามการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ที่มาจากกึ่งริงสลับที่ การคูณเมทริกซ์แบบปรกติ การยกกำลัง การสลับเปลี่ยน และรอยเมทริกซ์ ในทำนองเดียวกับการดำเนินการดังกล่าวสำหรับเมทริกซ์จริง เราได้ว่าการดำเนินการเชิงพีชคณิตข้างต้นมีสมบัติเช่นเดียวกับเมทริกซ์จริง ยกเว้นสมบัติที่เกี่ยวกับตัวผกผันและการตัดออก ดูได้จากงานวิจัย [14, 16]

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีการแบ่งบล็อกโดยมีแต่ละบล็อกที่ (i, j) เป็น A_{ij} เราเขียนแทนด้วย $A = [A_{ij}]_{ij}$ หรือ $A = [A_{ij}]$ สมบัติพื้นฐานของเมทริกซ์แบบบล็อกที่เกี่ยวกับการดำเนินเชิงพีชคณิตมีดังนี้ ถ้า $A = [A_{ij}]_{ij}$ และ $B = [B_{ij}]_{ij}$ เป็นเมทริกซ์เหนือ L ซึ่งมีขนาดและการแบ่งบล็อกที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมายและให้ $k \in L$ จะได้ว่า

$$A + B = [A_{ij} + B_{ij}]_{ij},\ kA = [kA_{ij}]_{ij},\ A^T = [A_{ji}{}^T]_{ij}$$

สังเกตว่าการดำเนินการข้างต้นไม่ขึ้นกับการแบ่งบล็อกของ A และ B (ขึ้นกับสมาชิกตำแหน่งต่าง ๆ ของเมทริกซ์ที่พิจารณา) เมทริกซ์ผลลัพธ์ $A + B$ เป็นเมทริกซ์ใหม่ซึ่งเราอาจแบ่งบล็อกอย่างไรก็ได้ อย่างไรก็ตามการแบ่งบล็อกที่เป็นธรรมชาติของ $A + B$ ได้จากการแบ่งบล็อกของ A และ B ที่กำหนดมาให้ก่อน ดังนั้นเราจะแบ่งบล็อกของ $A + B$ โดยมีแต่ละบล็อกที่ (i, j) เป็น $A_{ij} + B_{ij}$ เราใช้แนวคิดนี้กับการดำเนินการเชิงพีชคณิตอื่นๆ ด้วย สำหรับการคูณเมทริกซ์ แบบปรกตินั้น ถ้า $A = [A_{ik}]_{ik}$ และ $B = [B_{kj}]_{kj}$ เป็นเมทริกซ์เหนือ L ซึ่งมีขนาดและการแบ่งบล็อกที่ทำให้คูณแบบปรกติกันได้ จะได้ว่า

$$AB = [\sum_k A_{ik} B_{kj}]_{ij}$$

บทนิยามที่ 2.4 สำหรับแต่ละ $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{m,n}(L)$ และ $B \in M_{p,q}(L)$ ผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B นิยามโดย

$$A \otimes B = \left[a_{ij} B\right] = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in M_{mp,nq}(L)$$

นั่นคือแต่ละบล็อกที่ (i, j) ของ $A \otimes B$ คือ $a_{ij}B$

บทตั้งที่ 2.5 ([14]) ให้ A, B, C, D เป็นเมทริกซ์เหนือ L ที่มีขนาดและการแบ่งบล็อกที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย จะได้ว่า

1. $(kA) \otimes B = k(A \otimes B) = A \otimes (kB)$ สำหรับทุก $k \in L$
2. $(A+B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B+C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
5. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
6. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$
7. $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$

เมื่อ $\mathrm{tr}(\cdot)$ หมายถึง รอย (trace) ของเมทริกซ์

3. ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกกับการดำเนินการเชิงพีชคณิตของเมทริกซ์

ในหัวข้อนี้ เราขยายแนวคิดของผลคูณโครเนคเคอร์ไปสู่ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ และพิจารณาศึกษาสมบัติของผลคูณดังกล่าวที่เกี่ยวกับการดำเนินการเชิงพีชคณิต

บทนิยามที่ 3.1 ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ และ $B = \left[B_{kl}\right] \in M_{p,q}(L)$ ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของ A และ B นิยามโดย

$$A \boxtimes B = \left[A \otimes B_{kl}\right]_{kl} \in M_{mp,nq}(L)$$

นั่นคือ $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งแต่ละบล็อกที่ (k, l) เป็น $A \otimes B_{kl}$

จะเห็นว่าผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกของ A และ B ขึ้นกับการแบ่งบล็อกของ B ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกมีความเข้ากันได้กับการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ การสลับเปลี่ยน และรอยเมทริกซ์ ไม่ว่าเราจะแบ่งบล็อกของเมทริกซ์เป็นอย่างไรก็ตาม

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ให้ A,B,C เป็นเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ L ที่มีขนาดและการแบ่งบล็อกที่ทำให้การดำเนินการต่อไปนี้มีความหมาย จะได้ว่า

1. $(\mu A)\boxtimes B = A\boxtimes(\mu B) = \mu(A\boxtimes B)$ สำหรับทุก $\mu \in L$
2. $A\boxtimes(B+C) = A\boxtimes B + A\boxtimes C$
3. $(A+B)\boxtimes C = A\boxtimes C + B\boxtimes C$
4. $A\boxtimes(B\boxtimes C) = (A\otimes B)\boxtimes C$
5. $(A\boxtimes B)^T = A^T \boxtimes B^T$
6. $\operatorname{tr}(A\boxtimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$

บทพิสูจน์

1. ให้ $A \in M_{m,n}(L),\ B \in M_{p,q}(L)$ โดย $B = [B_{kl}]$ จากบทนิยามที่ 3.1 และบทตั้งที่ 2.5 จะได้ว่า

$$\mu(A\boxtimes B) = \mu[(A\otimes B_{kl})]_{kl} = [\mu(A\otimes B_{kl})]_{kl} = [(\mu A)\otimes B_{kl}]_{kl}$$
$$= (\mu A)\boxtimes B = [A\otimes(\mu B_{kl})]_{kl} = A\boxtimes(\mu B)$$

2. ให้ $A \in M_{m,n}(L),\ B,C \in M_{p,q}(L)$ โดย $B = [B_{kl}]$ และ $C = [C_{kl}]$ จะได้ $B+C = [B_{kl}+C_{kl}]$ดังนั้นจากบทนิยามที่ 3.1 และบทตั้งที่ 2.5 จะได้ว่า

$$A\boxtimes(B+C) = [A\otimes(B_{kl}+C_{kl})]_{kl} = [(A\otimes B_{kl})+(A\otimes C_{kl})]_{kl}$$
$$= [A\otimes B_{kl}]_{kl} + [A\otimes C_{kl}]_{kl} = A\boxtimes B + A\boxtimes C$$

3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับสมบัติข้อ 2 ในกรณีนี้เราแบ่งบล็อกของ C เพียงเมทริกซ์เดียว

4. เขียน $B = [B_{ij}],\ C = [C_{kl}]$โดยบทนิยามที่ 3.1 และบทตั้งที่ 2.5 จะได้ว่า

$$A\boxtimes(B\boxtimes C) = A\boxtimes[B\otimes C_{kl}]_{kl} = [A\otimes(B\otimes C_{kl})]_{kl} = [(A\otimes B)\otimes C_{kl}]_{kl} = (A\otimes B)\boxtimes C$$

5. เขียน $B = [B_{kl}]$โดยบทนิยามที่ 3.1 และบทตั้งที่ 2.5 จะได้ว่า

$$(A\boxtimes B)^T = \left([A\otimes B_{kl}]_{kl}\right)^T = [(A\otimes B_{lk})^T]_{kl} = [A^T\otimes B_{lk}{}^T]_{kl} = A^T\boxtimes[B_{lk}{}^T]_{kl} = A^T\boxtimes B^T$$

6. เขียน $B = [B_{kl}]$ เนื่องบล็อกในแนวทแยงมุมของ $A\boxtimes B$ คือ $A\otimes B_{kl}$ เมื่อ $k = l$ โดยบทนิยามที่ 3.1 และบทตั้งที่ 2.5 จะได้ว่า

$$\operatorname{tr}(A\boxtimes B) = \sum_i \operatorname{tr}(A\otimes B_{ii}) = \sum_i \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B_{ii}) = \operatorname{tr}(A)\sum_i \operatorname{tr}(B_{ii}) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

ทฤษฎีบทที่ 3.3 ให้ A, B เป็นเมทริกซ์ขนาดใดๆ ที่มีสมาชิกมาจาก L โดย $B=[B_{ij}]_{ij}$ เราแบ่งกลุ่มเมทริกซ์ย่อยของ B เป็นดังนี้

$$B=\left[\begin{array}{ccc:c:ccc} B_{11} & \cdots & B_{1l_1} & \cdots & B_{1,l-l_q+1} & \cdots & B_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k_1 1} & \cdots & B_{k_1 l_1} & \cdots & B_{k_1,l-l_q+1} & \cdots & B_{k_1 l} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline B_{k-k_p+1,1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l_1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l-l_q+1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kl_1} & \cdots & B_{k,l-l_q+1} & \cdots & B_{kl} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kl} \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $\sum_{i=1}^{p} k_i = k$ และ $\sum_{j=1}^{q} l_j = l$ จะได้ว่า $A \boxtimes B = \left[A \boxtimes \hat{B}_{ij}\right]_{ij}$

บทพิสูจน์

$$A \boxtimes B = \left[A \otimes B_{ij}\right]_{ij}$$

$$=\begin{bmatrix} A\otimes B_{11} & \cdots & A\otimes B_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A\otimes B_{i1} & \cdots & A\otimes B_{ij} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A\boxtimes\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1l_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k_1 1} & \cdots & B_{k_1 l_1} \end{bmatrix} & \cdots & A\boxtimes\begin{bmatrix} B_{1,l-l_q+1} & \cdots & B_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k_1,l-l_q+1} & \cdots & B_{k_1 l} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A\boxtimes\begin{bmatrix} B_{k-k_p+1,1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kl_1} \end{bmatrix} & \cdots & A\boxtimes\begin{bmatrix} B_{k-k_p+1,l-l_q+1} & \cdots & B_{k-k_p+1,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k,l-l_q+1} & \cdots & B_{kl} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A\boxtimes \hat{B}_{11} & \cdots & A\boxtimes \hat{B}_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A\boxtimes \hat{B}_{i1} & \cdots & A\boxtimes \hat{B}_{ij} \end{bmatrix}$$

$$=\left[A\boxtimes \hat{B}_{ij}\right]_{ij}$$

ทฤษฎีบทที่ 3.4

1. $I_m \boxtimes I_n = I_{mn}$ เมื่อเราแบ่งบล็อกของ I_n ให้มีบล็อกย่อยในแนวทแยงมุมเป็นเมทริกซ์จัตุรัส
2. $A \boxtimes 0 = 0 \boxtimes A = 0$ สำหรับทุกเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ 0 ที่มีขนาดและการแบ่งบล็อกใด ๆ

บทพิสูจน์

1. ให้ $I_{n_{kl}}$ เป็นบล็อกย่อยที่ของ I_n สำหรับแต่ละ $k = 1,\ldots,p$ และ $l = 1,\ldots,p$ เนื่องจากบล็อกในแนวทแยงมุมของ I_n เป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า $I_{n_{kl}} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ I_{n_l}, & k = l \end{cases}$ โดย $\sum_{l=1}^{p} n_l = n$ ดังนั้น

$$I_m \boxtimes I_n = \begin{bmatrix} I_m \otimes I_{n_1} & I_m \otimes 0 & \cdots & I_m \otimes 0 \\ I_m \otimes 0 & I_m \otimes I_{n_2} & \cdots & I_m \otimes 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & I_m \otimes 0 \\ I_m \otimes 0 & I_m \otimes 0 & \cdots & I_m \otimes I_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{mn_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_{mn_2} & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{mn_p} \end{bmatrix} = I_{mn}$$

2. เห็นได้ชัด

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกมีความเข้ากันได้กับการคูณแบบปรกติ

ทฤษฎีบทที่ 3.5 ให้ $A \in M_{m,n}(L), C \in M_{n,p}(L), B = [B_{kl}] \in M_{q,r}(L), D = [D_{kl}] \in M_{r,s}(L)$ จะได้ว่า $(A \boxtimes B)(C \boxtimes D) = (AC) \boxtimes (BD)$

บทพิสูจน์ โดยบทตั้งที่ 2.5 และสมบัติของการคูณแบบบล็อก จะได้ว่า

$(A \boxtimes B)(C \boxtimes D)$

$$= \begin{bmatrix} A \otimes B_{11} & \cdots & A \otimes B_{1r_v} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A \otimes B_{q_u 1} & \cdots & A \otimes B_{q_u r_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \otimes D_{11} & \cdots & C \otimes D_{1s_y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes D_{r_x 1} & \cdots & C \otimes D_{r_x s_y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A \otimes B_{11})(C \otimes D_{11}) + \cdots + (A \otimes B_{1r_v})(C \otimes D_{r_x 1}) & \cdots & (A \otimes B_{11})(C \otimes D_{1s_y}) + \cdots + (A \otimes B_{1r_v})(C \otimes D_{r_x s_y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A \otimes B_{q_u 1})(C \otimes D_{11}) + \cdots + (A \otimes B_{1r_v})(C \otimes D_{11}) & \cdots & (A \otimes B_{q_u 1})(C \otimes D_{1s_y}) + \cdots + (A \otimes B_{q_u r_v})(C \otimes D_{r_x s_y}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (AC \otimes B_{11} D_{11}) + \ldots + (AC \otimes B_{1r_v} D_{r_x 1}) & \cdots & (AC \otimes B_{11} D_{1s_y}) + \ldots + (AC \otimes B_{1r_v} D_{r_x s_y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (AC \otimes B_{q_u 1} D_{11}) + \ldots + (AC \otimes B_{1r_v} D_{11}) & \cdots & (AC \otimes B_{q_u 1} D_{1s_y}) + \ldots + (AC \otimes B_{q_u r_v} D_{r_x s_y}) \end{bmatrix}$$

$$= (AC) \boxtimes \begin{bmatrix} B_{11} D_{11} + \ldots + B_{1r_v} D_{r_x 1} & \cdots & B_{11} D_{1s_y} + \ldots + B_{1r_v} D_{r_x s_y} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q_u 1} D_{11} + \ldots + B_{1r_v} D_{11} & \cdots & B_{q_u 1} D_{1s_y} + \ldots + B_{q_u r_v} D_{r_x s_y} \end{bmatrix}$$

$$= (AC) \boxtimes (BD)$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ผลที่ตามมาดังนี้

บทแทรกที่ 3.6 $\left(A_1 \boxtimes B_1\right)\left(A_2 \boxtimes B_2\right)\cdots\left(A_p \boxtimes B_p\right)=\left(A_1A_2\cdots A_p\right)\boxtimes\left(B_1B_2\cdots B_p\right)$ สำหรับทุกจำนวนนับ p

4. สมบัติเชิงโครงสร้างของผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก

ในหัวข้อนี้ เราพิจารณาว่าสมบัติใดบ้างของเมทริกซ์ที่ถูกรักษาไว้ภายใต้ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก นั่นคือ พิจารณาสมบัติ (P) ซึ่งถ้าเมทริกซ์ A และ B มีสมบัติ (P) แล้ว $A\boxtimes B$ มีสมบัติดังกล่าวด้วย

บทนิยามที่ 4.1 ให้ $A \in M_n(L)$

1. A เป็นเมทริกซ์สมมาตร ก็ต่อเมื่อ $A^T = A$
2. A เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก ก็ต่อเมื่อ $A^T A = I$
3. A เป็นเมทริกซ์นิจพล ก็ต่อเมื่อ $A^2 = A$
4. A เป็นเมทริกซ์นิรพล ก็ต่อเมื่อมี $k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $A^k = 0$
5. A เป็นเมทริกซ์อาวัฒนาการ ก็ต่อเมื่อ $A^2 = I$
6. A เป็นเมทริกซ์การฉาย ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์นิจพล
7. A เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ มีเมทริกซ์ $B \in M_n(L)$ ซึ่ง $AB = I = BA$

เมทริกซ์ B ดังกล่าวถ้ามีแล้วจะมีเพียงเมทริกซ์เดียว เขียนแทนด้วย A^{-1}

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ให้ $A \in M_n(L)$ และ $B \in M_m(L)$

1. ถ้า A และ B เป็นเป็นเมทริกซ์สมมาตร แล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร
2. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก แล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก
3. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์นิจพล แล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์นิจพล
4. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์นิรพล แล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์นิรพล
5. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์อาวัตนาการแล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์อาวัฒนาการ
6. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์การฉาย แล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์การฉาย
7. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ แล้ว $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้โดย $(A\boxtimes B)^{-1} = A^{-1}\boxtimes B^{-1}$

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์สมบัติข้อ 1, 5, 7 ส่วนสมบัติข้ออื่นสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

1. สมมติ A, B เป็นเมทริกซ์สมมาตร นั่นคือ $A^T = A, B^T = B$ โดยทฤษฎีบทที่ 3.2 จะได้ว่า

$$\left(A\boxtimes B\right)^T = A^T \boxtimes B^T = A\boxtimes B$$

ดังนั้น $A\boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

5. สมมติ A, B เป็นเมทริกซ์อาวัตนาการ นั่นคือ $A^2 = I, B^2 = I$ โดยทฤษฎีบทที่ 3.2 จะได้ว่า

$$\left(A\boxtimes B\right)^2 = \left(A\boxtimes B\right)\left(A\boxtimes B\right) = \left(AA\right)\boxtimes\left(BB\right) = I\boxtimes I = I$$

ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์อาวัฒนาการ

7. สมมติ A, B เป็นเมทริกซ์หาผกผันได้ นั่นคือ $A^{-1}A = I_n$, $B^{-1}B = I_m$ โดยทฤษฎีบทที่ 3.2 จะได้ว่า

$$\left(A \boxtimes B\right)\left(A^{-1} \boxtimes B^{-1}\right) = (AA^{-1}) \boxtimes (BB^{-1}) = I_n \boxtimes I_m = I_{nm}$$

$$(A^{-1} \boxtimes B^{-1})(A \boxtimes B) = (A^{-1}A) \boxtimes (B^{-1}B) = I_n \boxtimes I_m = I_{nm}$$

ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้โดย $(A \boxtimes B)^{-1} = A^{-1} \boxtimes B^{-1}$

บทตั้งที่ 4.3 ให้ $A \in M_m(L)$, $B \in M_n(L)$

1. ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนแล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน
2. ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างแล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง
3. ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมแล้ว $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

บทพิสูจน์

โดยการใช้บทนิยามของผลคูณโครเนคเคอร์ จะได้ว่าสมบัติข้อ 1 เป็นจริง ในการพิสูจน์สมบัติข้อ 2 ใช้การสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนร่วมกับทฤษฎีบทที่ 3.2 ส่วนสมบัติข้อ 3 ได้มาโดยตรงจากข้อ 1 และข้อ 2

ทฤษฎีบทที่ 4.4 ให้ $A \in M_n(L), B \in M_n(L)$ และเมื่อเราแบ่งบล็อกของ B ให้มีบล็อกย่อยในแนวทแยงมุมเป็น เมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า

1. ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน แล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน
2. ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง แล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง
3. ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม แล้ว $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

บทพิสูจน์

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ซึ่ง B มีการแบ่งบล็อกที่มีแนวทแยงมุมเป็นเมทริกซ์จัตุรัส จะได้ว่า $B_{kl} = 0$ สำหรับ $k > l$ และ B_{kl} เป็นเป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนสำหรับ $k = l$ จะได้ว่า $A \otimes B_{kl} = 0$ สำหรับ $k > l$ และโดยบทตั้งที่ 4.3 จะได้ $A \otimes B_{kl}$ เป็นเป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนสำหรับ $k = l$ ดังนั้น $A \boxtimes B$ เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน สมบัติข้อ 2 และข้อ 3 สามารถพิสูจน์ในทำนองเดียวกับสมบัติข้อ 1

บทนิยามที่ 4.5 ให้ $A \in M_n(L), B \in M_n(L)$ เรากล่าวว่า

1. A **สมภาค** (congruent) กับ B ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ $S \in M_n(L)$ ซึ่งหาผกผันได้ที่ทำให้ $B = S^T AS$

2. A **คล้าย** (similar) กับ B ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ $S \in M_n(L)$ ซึ่งหาผกผันได้ที่ทำให้ $B = S^{-1}AS$

3. A **ทำเป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมได้** (triangularizable) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยม $T \in M_n(L)$ ที่ทำให้ A คล้ายกับ T

4. A **ทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้** (diagonalizable) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ทแยงมุม $D \in M_n(L)$ ที่ทำให้ A คล้ายกับ D

บทแทรกที่ 4.6 ให้ $A \in M_n(L), B \in M_n(L), C \in M_m(L), D \in M_m(L)$

1. ถ้า A สมภาคกับ B และ C สมภาคกับ D แล้ว $A \boxtimes C$ สมภาคกับ $B \boxtimes D$
2. ถ้า A คล้ายกับ B และ C คล้ายกับ D แล้ว $A \boxtimes C$ คล้ายกับ $B \boxtimes D$
3. ถ้า A และ C ทำเป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมได้และเราแบ่งบล็อกของ C ให้มีบล็อกย่อยในแนวทแยงมุมเป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว $A \boxtimes C$ ทำเป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมได้
4. ถ้า A และ C ทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้และเราแบ่งบล็อกของ C ให้มีบล็อกย่อยในแนวทแยงมุมเป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว $A \boxtimes C$ ทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

บทพิสูจน์ ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทที่ 3.2, 3.5, 4.2, 4.4

5. ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อก ตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อก และสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อกเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นแบบหนึ่งที่แปลงเมทริกซ์ให้อยู่ในรูปเวกเตอร์ ตัวดำเนินการดังกล่าวสำหรับเมทริกซ์จริงถูกนำเสนอในงานวิจัย [13] ในหัวข้อนี้เราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกกับตัวดำเนินการดังกล่าวสำหรับเมทริกซ์เหนือกึ่งริงสลับที่ใด ๆ รวมทั้งนำไปประยุกต์กับสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

บทนิยามที่ 5.1 ให้ $A \in M_{m,n}(L)$ โดย A_i แทนคอลัมน์ที่ i ของ A เรานิยาม

$$\operatorname{vec}(A) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \in L^{mn}$$

บทตั้งที่ 5.2 ([14]) ให้ $A, X, Y \in M_{m,n}(L)$, $B \in M_{n,p}(L)$, $C \in M_{p,q}(L)$ และ $k \in L$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \operatorname{vec}(X+Y) &= \operatorname{vec}(X) + \operatorname{vec}(Y) \\ \operatorname{vec}(kX) &= k \operatorname{vec}(X) \\ \operatorname{vec}(ABC) &= (C^T \otimes A)\operatorname{vec}(B) \end{aligned}$$

บทนิยามที่ 5.3 ให้ $A=\left[A_{ij}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}\in M_{m,n}\left(L\right)$ ซึ่งแต่ละ A_{ij} มีขนาด $m_i \times n_j$ โดยที่ $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$ และ $\sum_{j=1}^{s} n_j = m$ เรานิยาม**ตัวดำเนินการเวกเตอร์แบบบล็อกแถว** (the block-row vector operator) ของ A เป็น

$$\mathrm{vecb_r}(A)=\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(A_{11}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(A_{r1}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(A_{1s}) \\ \vdots \\ \mathrm{vec}(A_{rs}) \end{bmatrix}$$

เราสามารถพิสูจน์ได้โดยตรงว่า

1. $\mathrm{vecb_r}: M_{m,n}(L) \to L^{mn}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง
2. สำหรับทุก $A, B \in M_{m,n}(L)$ และ $k \in L$ จะได้ว่า

$\mathrm{vecb_r}(A+B) = \mathrm{vecb_r}(A) + \mathrm{vecb_r}(B)$ และ $\mathrm{vecb_r}(kA) = k\,\mathrm{vecb_r}(A)$

ทฤษฎีบทที่ 5.1 สำหรับแต่ละ $A\in M_{m,n}\left(L\right), B\in M_{n,p}\left(L\right)$ และ $C\in M_{p,n}\left(L\right)$ จะได้ว่า

$$\mathrm{vecb_r}\left(ABC\right) = (C^T \boxtimes A)\mathrm{vecb_r}\left(B\right)$$

บทพิสูจน์ ในการพิสูจน์นี้ สำหรับเมทริกซ์ X ใด ๆ กำหนดให้ X_j แทนแถวที่ j ของ X เขียน $A=[A_{kl}]_{k,l=1}^{s,q}$ พิจารณาบล็อกแถวที่ k ของ A ซึ่งคือ $\left[\begin{matrix} A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kq} \end{matrix}\right]$ โดยการคูณแบบบล็อกจะได้ว่าแถวที่ k ของ ABC คือ

$$\begin{aligned} \left(ABC\right)_k &= A_k BC \\ &= \left(\begin{bmatrix} A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_q \end{bmatrix} \right) C \\ &= \sum_{l=1}^{q} A_{kl} B_l C \end{aligned}$$

โดยบทตั้งที่ 5.2 จะได้

$$\begin{aligned}\operatorname{vec}(ABC)_k &= \sum_l \operatorname{vec}\left(A_{kl}B_lC^T\right)\\ &= \sum_l \left(C^T \otimes A_{kl}\right)\operatorname{vec}(B_l)\\ &= \begin{bmatrix} C^T \otimes A_{k1} & C^T \otimes A_{k2} & \cdots & C^T \otimes A_{kq}\end{bmatrix}\operatorname{vecb}_{\mathrm{r}}(B)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\operatorname{vecb}_{\mathrm{r}}(ABC) &= \begin{bmatrix}\operatorname{vec}(ABC)_1\\ \operatorname{vec}(ABC)_2\\ \vdots\\ \operatorname{vec}(ABC)_s\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} C^T \otimes A_{11} & C^T \otimes A_{12} & \cdots & C^T \otimes A_{1q}\end{bmatrix}\operatorname{vecb}_{\mathrm{r}}(B)\\ \begin{bmatrix} C^T \otimes A_{21} & C^T \otimes A_{22} & \cdots & C^T \otimes A_{2q}\end{bmatrix}\operatorname{vecb}_{\mathrm{r}}(B)\\ \vdots\\ \begin{bmatrix} C^T \otimes A_{s1} & C^T \otimes A_{s2} & \cdots & C^T \otimes A_{sq}\end{bmatrix}\operatorname{vecb}_{\mathrm{r}}(B)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} C^T \otimes A_{11} & C^T \otimes A_{12} & \cdots & C^T \otimes A_{1q}\\ C^T \otimes A_{21} & C^T \otimes A_{22} & \cdots & C^T \otimes A_{2q}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C^T \otimes A_{s1} & C^T \otimes A_{s2} & \cdots & C^T \otimes A_{sq}\end{bmatrix}\operatorname{vecb}_{\mathrm{r}}(B)\\ &= (C^T \boxtimes A)\operatorname{vecb}_{\mathrm{r}}(B)\end{aligned}$$

ต่อไปเราจะประยุกต์ผลคูณโครเนคเคอร์แบบบล็อกเพื่อลดรูปสมการเมทริกซ์เชิงเส้นให้เป็นสมการเวกเตอร์-เมทริกซ์ในรูปแบบที่ง่ายขึ้น

บทแทรกที่ 5.2 ให้ $A \in M_{m,n}(L), B \in M_{p,q}(L), C \in M_{m,q}(L)$ และ $X \in M_{n,p}(L)$ จะได้ว่าสมการต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $AXB = C$

(2) $(B^T \boxtimes A)\operatorname{vecb}_{\mathrm{r}}(X) = \operatorname{vecb}_{\mathrm{r}}(C)$

บทพิสูจน์ ใช้ทฤษฎีบทที่ 5.1 ร่วมกับการที่ $\mathrm{vecb}_{\mathrm{r}}$ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

ในบทแทรกที่ 5.2 ถ้าเราหาผลเฉลย $\mathrm{vecb}_{\mathrm{r}}(X)$ จากสมการ (2) ได้ แล้วเราจะหา X ได้ เนื่องจาก $\mathrm{vecb}_{\mathrm{r}}$ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

บทแทรกที่ 5.3 ให้ $A \in M_n(L), B \in M_p(L), C \in M_{n,p}(L)$ และ $X \in M_{n,p}(L)$ จะได้ว่าสมการต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $AX + XB = C$

(2) $[(I_p{}^T \boxtimes A) + (B^T \boxtimes I_n)]\,\mathrm{vecb}_{\mathrm{r}}(X) = \mathrm{vecb}_{\mathrm{r}}(C)$

บทพิสูจน์ ใช้ทฤษฎีบทที่ 5.1 ร่วมกับการที่ $\mathrm{vecb}_{\mathrm{r}}$ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและมีความเป็นเชิงเส้น

เอกสารอ้างอิง

1. Baccelli, F., Cohan, G., Olsder, G. J., and Quadrat, J. P. 1992. Synchronization and Linearity. New York: John Wiley and Sons. pp. 101-104.
2. Brouwer, R. K. 2009. A Method of Relational Fuzzy Clustering Based on Producing Feature Vectors using FastMap. *Information Sciences*. 179: 3561-3582.
3. Butkovič, P. 2003. Max-Algebra: the Linear Algebra of Combinatorics. *Linear Algebra and its Applications*. 367: 313-335.
4. Cechlárova, K., and Plávka, J. 1996. Linear Independence in Bottleneck Algebras. *Fuzzy Sets and Systems*. 77: 337-348.
5. Chang, C. C. 1958. Algebraic Analysis of Many Valued Logics. *Transactions of the American Mathematical Society.* 88: 467-490.
6. Cuninghame-Green, R. A., and Butkovič, P. 2004. Bases in Max-Algebra. *Linear Algebra and its Applications*. 389: 107-120.
7. Di Nola, A., Lettieri, A., Perfilieva, I., and Novak, V. 2007. Algebraic Analysis of Fuzzy Systems. *Fuzzy Sets and Systems*. 158: 1-22.
8. Golan, J. S. 1999. Semirings and Their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. pp. 1-2.
9. Horn, R. A., and Johnson, C. R. 1991. Topics in Matrix Analysis. Cambridge. The Press Syndicate of the University of Cambridge.
10. Kim, K. H., and Roush, F. W. 1980. Generalized Fuzzy Matrices. *Fuzzy Sets and Systems* 4: 293-315.
11. Koning, R. H., Neudecker, H., and Wansbeek, T. 1991. Block Kronecker Products and Vecb Operator. *Linear Algebra and its Applications.* 191(149): 165-184.

12. Poplin, P. L., and Hartwig, R. E. 2004. Determinantal Identities over Commutative Semirings. *Linear Algebra and its Applications.* 387: 99-132.
13. Reutenauer, C., and Straubing, H. 1984. Inversion of Matrices over a Commutative Semiring. *Journal of Algebra.* 1988: 350-360.
14. Stangam, R., and Chansangiam, P. 2016. Kronecker Product of Matrices over a Commutative Semiring. *Thai Journal of Mathematics*. Special Issue on ICMSA. 2015: 21-38.
15. Zhang, H., and Ding, F. 2013. On the Kronecker Products and Their Applications. *Journal of Applied Mathematics*. vol. 2013. Article ID 296185. 8 pages.
16. Zhao, S., and Wang, X.P. 2010. Invertible Matrices and Semilinear Spaces over Commutative Semirings. *Information Sciences*. 48(24): 5115-5124.
17. Zhao, S., and Wang, X. 2011. Bases in Semilinear Spaces over Join-Semirings. *Fuzzy Sets and Systems*. 182: 93-100.
18. Zhour, Z. A., and Kilicman, A. 2007. Some New Connections between Matrix Products for Partitioned and Non-Partitioned Matrices. *Computer & Mathematics with Applications*. 41(6) : 763-784
19. Zimmermann, U. 1981. Linear and Combinatorial Optimization in Orders Algebraic Structures. *Annals of Discrete Mathematics*. 10: 30-40.

ได้รับบทความวันที่ 22 ธันวาคม 2560
ยอมรับตีพิมพ์วันที่ 26 กุมภาพันธ์ 2561