北海道教育大学紀要（第1部C）第43巻　第2号
Journal of Hokkaido University of Education (Section I C) Vol. 43, No. 2
平成5年3月
March, 1993

2次方程式の探索的解法

坪　内　昭　夫

§1　はじめに

方程式や不等式の解を求めることができるようにすることが，代数教材の目標の一つである．そしてその解法には，近似解（実数解）を繰り返して求める探索的解法（数値的方法ともいう．フェイ［1]）と，数式変形や公式による数式処理的解法（記号的方法ともいう．同上）がある．

現行の中学校および高等学校の学習指導要領と教科書では，後者が全てであって探索的解法という観点はない．

しかし，探索的解法は

1）理解と記憶が容易であって，過程がダイナミックである

2）高次方程式などにも適用でき，普遍的である

3）関数概念の理解を助長する

という点で重視すべきであると思われる．

§2　学習指導要領と教科書での2次方程式と2次関数の取扱い

中学校第3学年で，実数解をもつ2次方程式を解くことができるようにしている．例えば教育出版の教科書では次のようになっている．（伊原［2]）

1）因数分解による解法

2）$ax^2+c=0$ の解法

3）$a(x+m)^2+c=0$ の解法

4）完全平方式による解法

5）解の公式による解法

ここでの2)～4)は5)にいたる助走であって，因数分解できないものは全て解の公式によるということである．

中学校では2次関数はない．2次方程式・2次不等式のあとに，2乗に比例する関数として $y=ax^2$ を取扱っているだけである．

改訂（改定の内容をもつ）高等学校学習指導要領では，「数学Ｉ」で実係数の2次方程式について複素数の範囲で解の公式や判別式を扱う．そして

「二次方程式の<u>解の意味を</u>グラフとの関連において理解させ，一次方程式と異なり，二次方程式では解をもたないものが存在することも理解させる．」（文部省［3]．下線は筆者，以下同じ）

また，2次関数については同じく「数学Ｉ」で，

「二次関数では，そのグラフを通して関数の増減，最大値，最小値を学習させる．さらに，ここでグラフとx軸との交点に関連して，二次方程式の解をグラフから考察することに触れ，また，グラフを通して二次不等式を解くことができるようにする．」(同上)

さらに，内容の取扱いでは，

「二次関数の値の変化という観点を踏まえながら，二次関数のグラフとx軸との交点の関係から，二次方程式の解の意味や二次不等式の解を求めることを扱う．」(同上)

「二次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフとx軸との交点を調べることを通して，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の意味を考察する．また，二次関数のグラフとx軸との位置関係から二次不等式の解を求めることを取扱う．なお，ここでの取扱いは，二次関数の値の変化との関連において，二次方程式や二次不等式の解法の原理についてその理解を図ることが主なねらいであるから，形式的な計算練習を主体とするような扱いにならないよう留意することが大切である．」(同上)

としている．

このように，「グラフとx軸との交点」とは言っても，2次方程式を2次関数の零点問題として位置づけているわけではないこと，また，「2次方程式の解法の原理」として探索的解法を据えているわけだはないことは明かである．

従って，新しい教科書でもおそらく，旧態依然として判別式―グラフ―方程式の解の三者関係があるだけであって，探索的解法が登場してくることはないであろう．

§3　2次方程式の探索的解法

$2x^2-4x-1=0$ を解く．

次の BASIC プログラムによる．

```
10 INPUT A, B, C
20 FOR X=A TO B STEP C
30 Y=2 * X * (X-2) -1
40 PRINT X, Y
50 NEXT X
```

このプログラムは，解を探索する区間の端点a，bと刻みcを入力することによって，$x=a$，$a+c$，$a+2c$，…，bに対するyの値を計算して，xとyを出力するものである．

$y=2x^2-4x-1=2x(x-2)-1$ と変形することによって，第1次の探索区間を$(-1,3)$，刻みを1と決める（これについては§4）．

プログラムを実行する．

```
RUN             …… RUN と入力してリターンする
? -1, 3, 1      …… -1,3,1 と入力してリターンする．-1,3 は探索区間，1 は刻み
-1     5        …… 以下は画面表示（出力）
 0    -1
 1    -3
 2    -1
 3     5
```

解が存在する区間が $(-1,0)$ と $(2,3)$ であることが判る．これが第2次探索区間である．

出力が上下対称になっていることに注目したい．

頂点が(1, −3)であること，従ってこの関数の最小値が x = 1 のとき y = −3 であることも判る．また，２次不等式の解についても示唆を与えている．

第２次探索を行なう．

RUN			RUN		
? −1, 0, .1		…… 刻みを 0.1 とする．	? 2, 3, .1		
⋮	⋮	これで解の小数	⋮	⋮	
−.3	.38	第１位が判る．	2.2	−.120001	
−.2	−.12		2.3	.379999	
⋮	⋮		⋮	⋮	

第３次探索を行なう．

RUN		RUN	
? −.3, −.2, .01		? 2.2, 2.3, .01	
⋮	⋮	⋮	⋮
−.23	.0258002	2.22	−.0231999
−.22	−.0231998	2.23	.0258001
⋮	⋮	⋮	⋮

Ans. $x = -0.22$, $x = 2.22$

§4　第１次探索での区間の決め方

$y = ax(x-h)+k$, $a>0$ と変形する．

$x = 0$, h で $y = k$ となるから，

$k > 0$ のときは，$0 < h$, $h < 0$ に応じて区間$(0, h)$, $(h, 0)$を刻み 0.5, または0.25 で探索する．

$k < 0$ のときは，$0 < h$, $h < 0$ に応じて区間$(-1, h+1)$, $(h-1, 1)$を刻み１，または 0.5 で探索する．

ただし，h が分数（小数）のときは，より大きい（より小さい）整数に丸める．また，刻みの大きさについても吟味する必要がある（§5 (1)）．

このとき，$a > 0$ としてよいから，y の値の系列には３つの場合がある．

① 全て負である．このときは探索区間を広げなければならない．

② 正から負，または，負から正へ変わる所がある．ここに２実数解があるので，刻みを小さくしてさらに探索をすすめる．

③ 全て正である．このときは虚数解である．

①の探索区間の拡大には，試行的に徐々に，また，定数項を勘案していっぺんに広げる．

出力の系列は，$x = h/2$（軸）を中点にして構成されるので上下対称になる．従って解の存在区間が判ると共に，頂点や正領域・負領域についても示唆を与えるものとなる．

BASIC プログラムのの実行に際して，初期値・終値・刻みの入力値に分数は使えないことに注意する．

§5 いろいろな例

(1) 刻みを吟味する例

$y=8x^2-6x-3=8x(x-3/4)-3$

x=0, 0.75 で y=−3 だから，区間（−1, 1.75）を刻み 0.5 と 0.25 で探索する．

```
RUN
? -1,1.75,.5
-1      11
-.5      2
 0      -3
 .5     -4
 1      -1
 1.5     6
```

```
RUN
? -1,1.75,.25
-1      11
-.75     6
-.5      2
-.25    -1
 0      -3
 .25    -4
 .5     -4
 .75    -3
 1      -1
 1.25    2
 1.5     6
 1.75   11
```

(註) 第2次探索区間を探すだけなら吟味を要しない．

(2) 拡大を要する例

$y=2x^2-x-15=2x(x-1/2)-15$

x=0, 0.5 で y=−15 だから，区間（−1, 1.5）を刻み 0.5 で探索する．

さらに，定数項の−15 を勘案して，区間（−3, 3.5）を刻み 0.5 で探索する．

```
RUN
? -1,1.5,.5
-1     -12
-.5    -14
 0     -15
 .5    -15
 1     -14
 1.5   -12
```

```
RUN
? -3,3.5,.5
-3       6
-2.5     0   ← 解
-2      -5
-1.5    -9
-1     -12
-.5    -14
 0     -15
 .5    -15
 1     -14
 1.5   -12
 2      -9
 2.5    -5
 3       0   ← 解
 3.5     6
```

(3) 虚数解の例

$x^2-8x+28=x(x-8)+28=0$

区間(−1, 9)	⋮	⋮	
刻み 1	3	13	
	4	12	← 最小値
	5	13	
	⋮	⋮	

(4) 重解を示唆する例

$4x^2+4\sqrt{3}x+3=4x(x+\sqrt{3})+3=0$

区間(−3, 1)	−3	18.2154	
刻み 0.5	−2.5	10.6795	
	−2	5.14359	
	−1.5	1.6077	
	−1	.0717969	← 注意
	−.5	.535898	
	0	3	
	.5	7.4641	
	1	13.9282	

一見虚数解に見えるが，

区間(−1.1,1.1)	⋮	⋮	区間(−0.9, −0.8)	⋮	⋮
刻み 0.1	−.9	4.61721 E−03	刻み 0.01	−.87	6.31809 E−05
	−.8	0.0174375		−.86	1.45435 E−04
	⋮	⋮			
	⋮	⋮			

従って，x＝−0.87 (重解) 筆算では $x=-\sqrt{3}/2=-0.866$

§6 手計算のアルゴリズム

手計算で第2次探索区間を求めるには，次のアルゴリズムによるとよい．

$2x^2-6x-9=2x(x-3)-9=0$

						対応する式変形
−10				−2	11	…… (x+2)(x−5)+11
(×2)＝−20		③ −4		①−1	−1	…… (x+1)(x−4)−1
−9		④(×2)＝−8		0	−9	…… x(x−3)−9
	11	⑤ −9		3	−9	
		⑥	−1	② 4	−1	
				5	11	

(説明) ③＝①×②

④＝③×(x^2 の係数)

⑤＝定数項

⑥=⑤−④

これで探索区間は（−2, −1）と（4, 5）であることが判る．

§7 むすび

2次方程式の探索的解法は，コンピュータの利用によって可能になる．その意味でコンピュータによる数学教育の一つの典型と考えられる．

初等・中等教育における方程式を，関数の零点問題と位置づけるならば，方程式の指導の前に関数の指導がなければならない．

探索的解法は，教材観・教科の内容・その取扱いの変革が必要なことをも示唆している．

参考文献

[1] J. T. フェイ編・成嶋弘監訳，数学教育とコンピュータ，1987，東海大学出版会
[2] 伊原康隆・宇喜多義昌監修，改訂　中学数学　3，1989，教育出版
[3] 文部省，高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編，1989
[4] 小松勇作編，高等学校　数学　I，旺文社

（本学教授　旭川分校）