



Analisa Kestabilan dan Solusi Pendekatan Pada Persamaan Van der Pol

¹Yuni Yulida, ²Muhammad Ahsar Karim

^{1,2}Matematika FMIPA, Universitas Lambung Mangkurat, Indonesia

¹y_yulida@ulm.ac.id, ²m_ahsar@ulm.ac.id

INFO ARTIKEL

Riwayat Artikel:

Diterima: 04-09-2019

Disetujui: 01-10-2019

Kata Kunci:

Persamaan Van der Pol;

Ekuilibrium;

Analisa Kestabilan;

Limit Cycle;

Solusi Periodik;

Multiple Scale.

Keywords:

Van der Pol Equation;

Equilibrium;

Stability Analysis;

Limit Cycle;

Periodic Solution;

Multiple Scale.

ABSTRAK

Abstrak: Di dalam tulisan ini disajikan analisa kestabilan, diselidiki eksistensi dan kestabilan *limit cycle*, dan ditentukan solusi pendekatan dengan menggunakan metode *multiple scale* dari persamaan Van der Pol. Penelitian ini dilakukan dalam tiga tahapan metode. Pertama, menganalisa perilaku dinamik persamaan Van der Pol di sekitar ekuilibrium, meliputi transformasi persamaan ke sistem persamaan, analisa kestabilan persamaan melalui linearisasi, dan analisa kemungkinan terjadinya bifurkasi pada persamaan. Kedua, membuktikan eksistensi dan kestabilan *limit cycle* dari persamaan Van der Pol dengan menggunakan teorema Lienard. Ketiga, menentukan solusi pendekatan dari persamaan Van der Pol dengan menggunakan metode *multiple scale*. Hasil penelitian adalah, berdasarkan variasi nilai parameter kekuatan redaman, daerah kestabilan dari persamaan Van der Pol terbagi menjadi tiga. Untuk parameter kekuatan redaman bernilai positif mengakibatkan ekuilibrium tidak stabil, dan sebaliknya, untuk parameter kekuatan redaman bernilai negatif mengakibatkan ekuilibrium stabil asimtotik, serta tanpa kekuatan redaman mengakibatkan ekuilibrium stabil. Pada kondisi tanpa kekuatan redaman, persamaan Van der Pol memiliki solusi periodik dan mengalami bifurkasi *hopf*. Selain itu, dengan menggunakan teorema Lienard dapat dibuktikan bahwa solusi periodik dari persamaan Van der Pol berupa *limit cycle* yang stabil. Pada akhirnya, dengan menggunakan metode *multiple scale* dan memberikan variasi nilai amplitudo awal dapat ditunjukkan bahwa solusi persamaan Van der Pol konvergen ke solusi periodik dengan periode dua.

Abstract: In this paper, the stability analysis is given, the existence and stability of the limit cycle are investigated, and the approach solution is determined using the multiple scale method of the Van der Pol equation. This research was conducted in three stages of method. First, analyzing the dynamic behavior of the equation around the equilibrium, including the transformation of equations into a system of equations, analysis of the stability of equations through linearization, and analysis of the possibility of bifurcation of the equations. Second, the existence and stability of the limit cycle of the equation are proved using the Lienard theorem. Third, the approach solution of the Van der Pol equation is determined using the multiple scale method. Our results, based on variations in the values of the damping strength parameters, the stability region of the Van der Pol equation is divided into three types. For the positive value, it is resulting in unstable equilibrium, and contrary, for the negative value, it is resulting in asymptotic stable equilibrium, and without the damping force, it is resulting in stable equilibrium. In conditions without damping force, the Van der Pol equation has a periodic solution and has hopf bifurcation. In addition, by using the Lienard theorem, it is proven that the periodic solution is a stable limit cycle. Finally, by using the multiple scale method with varying the initial amplitude values, it is shown that the solution of the Van der Pol equation is converge to a periodic solution with a period of two.



<https://doi.org/10.31764/jtam.v3i2.1084>



This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license

A. LATAR BELAKANG

Banyak permasalahan pada bidang ilmu fisika, biologi, kimia, elektronik, neurologi, sosiologi dan

ekonomi yang berhubungan dengan masalah osilator berbentuk persamaan diferensial nonlinear. Salah satu contoh yang berbentuk persamaan diferensial

biasa nonlinier adalah persamaan Van der Pol. Menurut Mazarei, Behroozpoor dan Kamyad (2014), linearisasi pada sistem persamaan nonlinier adalah cara efektif dalam menentukan solusi pendekatan dan analisa system (Mazarei, Behroozpoor, & Kamyad, 2014).

Osilator Van der Pol pertama kali diusulkan pada tahun 1920 oleh Balthasar Van der Pol, seorang insinyur kelistrikan dan sekaligus fisikawan yang berasal dari Belanda. Van der Pol menemukan osilasi stabil, yang kemudian disebut sebagai relaksasi-osilasi dan sekarang dikenal sebagai suatu tipe *limit cycle* dalam rangkaian listrik yang menggunakan tabung vakum. Ketika sirkuit ini didekatkan ke *limit cycle*, maka akan terperangkap, yaitu sinyal penggerak akan menarik arus bersama dengannya (Hellevik & Gudmestad, 2017).

Persamaan Van der Pol memiliki sejarah yang panjang dalam perkembangan teori maupun aplikasinya. Dalam bidang biologi, persamaan Van der Pol diperluas dan diaplikasikan ke bidang planar sebagai model untuk potensial aksi dari neuron. Dalam bidang seismologi, persamaan ini digunakan untuk memodelkan interaksi dua lempeng dalam patahan geologis. Kemudian pada bidang neurologi, persamaan Van der Pol digunakan dalam mempelajari sistem kontrol penggerak jaringan saraf di sumsum tulang belakang. Sedangkan Van der Pol sendiri membangun sejumlah model sirkuit elektronik jantung manusia untuk mempelajari berbagai kestabilan dinamika jantung (Aybar, Kusbeyzi Aybar, & Hacinliyan, 2013), (Vaidyanathan, 2015).

Persamaan Van der Pol merupakan persamaan diferensial yang mengandung suku-suku gangguan (yang biasa disebut perturbasi) dan sulit diselesaikan secara analitik untuk memperoleh solusi eksak. Oleh karena itu, dibutuhkan metode khusus untuk memperoleh solusi pendekatan. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi pendekatan dan mengatasi masalah perturbasi adalah metode *multiple scale* (Jacobsen, 2013), (Kuehn, 2015). Metode ini digolongkan sebagai salah satu metode perturbasi yang digunakan untuk menentukan solusi aproksimasi (Low, Ramlan, Muhammad, & Ghani, 2016). Dalam metode *multiple scale* digunakan beberapa skala waktu yang dinyatakan dalam orde parameter (Bajaj & Prakash, 2013).

Penelitian terkait solusi pendekatan persamaan Van der Pol banyak dikembangkan diantaranya yang penulis lakukan adalah membandingkan solusi persamaan Van der Pol Menggunakan metode *multiple scale* dan metode Kryloff Dan Bogoliuboff. Peneliti lain seperti Cordshooli and Vahidi (2011) menyajikan cara menentukan solusi Van der Pol

menggunakan metode dekomposisi Adomian (Cordshooli & Vahidi, 2011). Sedangkan Hosseini, Babolian dan Abbasbandy (2016) mengembangkan solusi metode dekomposisi Adomian untuk Persamaan Van der Pol (Hosseini, Babolian, & Abbasbandy, 2016). Selanjutnya, Bajaj and Prakash (2013) menentukan solusi menggunakan perturbasi dan memberikan analisa dinamik dan Karim (2019) membahas solusi yang memuat ketidakpastian (Bajaj & Prakash, 2013), (Karim, 2019).

Berdasarkan uraian di atas, tujuan penelitian ini adalah mengkaji dan menganalisa perilaku dinamik dari persamaan Van der Pol, membuktikan eksistensi dan kestabilan *limit cycle* dari persamaan Van der Pol, dan menentukan solusi pendekatan menggunakan metode *multiple scale* yang akan mendukung penentuan *limit cycle*.

B. METODE PENELITIAN

Metode Penelitian yang digunakan dalam penelitian dilakukan dalam beberapa tahap yaitu melakukan pengkajian, tinjauan literatur dan menentukan solusi pendekatan. Langkah pertama, menganalisa perilaku dinamik di sekitar ekuilibrium persamaan Van der Pol meliputi: transformasi persamaan ke sistem persamaan diferensial biasa orde satu (Yulida & Karim, 2019), menganalisa kestabilan lokal melalui linearisasi (Brauer & Castillo-Chavez, 2010), (Cheng & et al, 2010), (Taylor & Bhathawala, 2012), (Rigatos, Siano, Wira, Abbaszadeh, & Zouari, 2018) menganalisa kemungkinan terjadinya bifurkasi. Langkah kedua membuktikan eksistensi dan kestabilan *limit cycle*. Terakhir, langkah ketiga, menentukan solusi pendekatan persamaan Van der Pol menggunakan metode *multiple scale*.

C. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Analisa Kestabilan

Persamaan Van der Pol merupakan persamaan diferensial orde dua yang berbentuk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

dengan x adalah koordinat posisi yang merupakan fungsi dari waktu t , dan μ adalah parameter skalar yang menunjukkan nonlinier dan kekuatan redaman.

Persamaan (1) ditransformasi menjadi Sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Sistem (2) memiliki titik ekuilibrium

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,0).$$

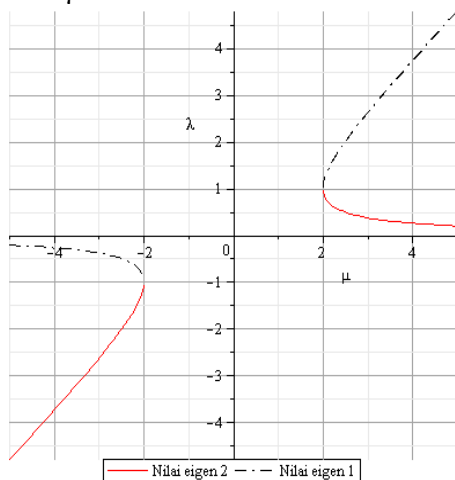
Selanjutnya, dilakukan linierisasi Persamaan (2) menggunakan deret Taylor di sekitar titik ekuilibrium, sehingga diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \quad (3)$$

Nilai eigen dari Persamaan (3) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \quad (4)$$

Dari Persamaan (4), jika $-2 \leq \mu \leq 2$ maka akar-akar karakteristik (4) bernilai imajiner. Selanjutnya, diberikan gambar 1 yaitu grafik persamaan (4), nilai eigen riil terhadap nilai parameter μ . berikut

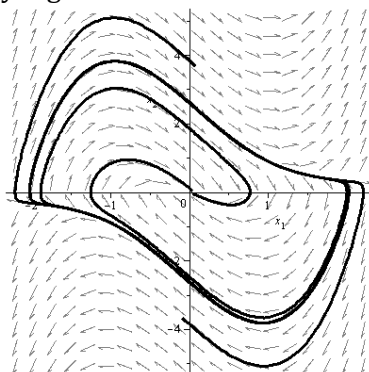


Gambar 1. Nilai eigen bernilai riil terhadap parameter μ

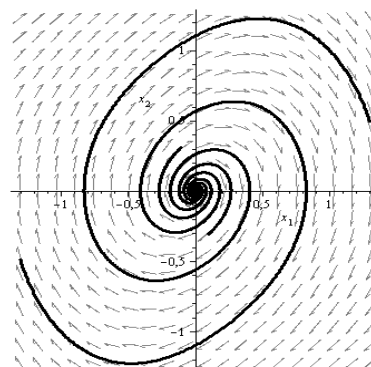
Berdasarkan Persamaan (4) dan Gambar 1, daerah kestabilan terbagi tiga yaitu

1. Selang $-\infty < \mu < 0$ adalah daerah yang stabil (contoh potret fase pada gambar 2)
2. Selang $0 < \mu < \infty$ adalah daerah yang tidak stabil. (contoh potret fase pada gambar 3)
3. Parameter $\mu = 0$ adalah parameter yang menyebabkan terjadi bifurkasi *hopf*, titik ekuilibriumnya bertipe *center* dan jenisnya stabil. (contoh potret fase pada gambar 4)

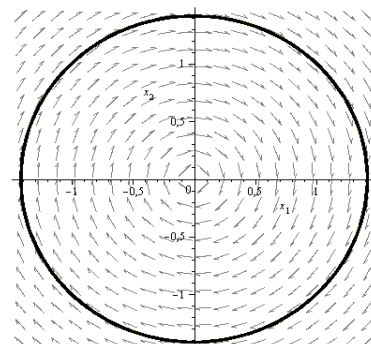
Berikut diberikan potret fase untuk ketiga selang yang diberikan sesuai Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Potret Fase dengan parameter $\mu = -2$ (stabil asimtotik)



Gambar 3. Potret Fase dengan parameter $\mu = 0,5$ (spiral, tidak stabil)



Gambar 4. Potret Fase dengan parameter $\mu = 0$ (*center*, stabil)

Berdasarkan pernyataan 3 dan Gambar 4, Sistem (2) memiliki solusi periodik pada saat $\mu = 0$. Berikut diberikan eksistensi dan kestabilan *limit cycle*.

2. Eksistensi dan Kestabilan *Limit Cycle*

Pada Subbab C.1 telah diselidiki perilaku dinamik berupa kestabilan titik ekuilibrium berdasarkan nilai parameter, solusi periodik dan bifurkasi. Berdasarkan hal tersebut akan diselidiki apakah solusi periodik tersebut merupakan *limit cycle* atau bukan. Untuk menyelidiki eksistensi dan sekaligus kestabilan *limit cycle* pada Persamaan Van der Pol. Persamaan (1) dapat ditransformasi ke sistem Lienard, dengan $f(x) = -\mu(1 - x^2)$ dan $g(x) = x$ sehingga Persamaan (2) menjadi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} = -g(x) \quad (5)$$

Misalkan pada Persamaan (5), $\frac{dy}{dt} = -g(x)$, maka diperoleh

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - f(x) \frac{dx}{dt}$$

Jika kedua ruas diintegrasikan satu kali terhadap t maka diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = y - \int f(x) dx. \quad (6)$$

Selanjutnya dimisalkan $F(x) = \int f(x) dx$, maka Persamaan (6) menjadi $\frac{dx}{dt} = y - F(x)$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa berdasarkan Persamaan (5), maka Persamaan (2) ekuivalen dengan sistem Lienard berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - \mu \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned} \tag{7}$$

dengan $F(x) = \mu \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right)$ dan $g(x) = x$.

Eksistensi dan kestabilan *limit cycle* Persamaan Van der Pol (1) dapat diselidiki melalui Persamaan (7). Berikut diberikan pembuktian tersebut.

1. Akan dibuktikan bahwa fungsi $F, g \in C^1(\mathbb{R})$. Fungsi $F(x) = \mu \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right)$ dan $\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = -\mu(1 - x^2)$ jelas kontinu pada \mathbb{R} . Fungsi $g(x) = x$ dan $\frac{dg(x)}{dx} = 1$ jelas kontinu pada \mathbb{R} .

2. Akan dibuktikan bahwa $F(x) = \mu \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right)$ dan $g(x) = x$ masing-masing merupakan fungsi ganjil. Fungsi ini berlaku bahwa

$$F(-x) = -\mu \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) = -F(x)$$

dan

$$g(-x) = -x = -g(x)$$

adalah fungsi ganjil.

3. Akan dibuktikan bahwa $xg(x) > 0$ untuk $x \neq 0$, $F(0) = 0$, $F'(0) < 0$. $xg(x) = x^2 > 0$ untuk $x \neq 0$, $F(0) = \mu \left(\frac{1}{3}0^3 - 0 \right) = 0$, $F'(0) = -\mu(1 - 0^2) = -\mu < 0$ dengan $\mu > 0$.

4. Akan dibuktikan bahwa F mempunyai pembuat nol positif. Pembuat nol dari F adalah $F(x) = 0$, yaitu

$$\mu x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0,$$

sehingga diperoleh pembuat nol $x = 0$ atau $x = \sqrt{3}$ atau $x = -\sqrt{3}$. Jadi, F mempunyai pembuat nol positif yaitu $x = \sqrt{3}$.

5. Akan dibuktikan bahwa F monoton naik menuju tak hingga untuk $x \geq \sqrt{3}$, $x \rightarrow \infty$. Turunan fungsi F adalah $F'(x) = f(x) = -\mu(1 - x^2)$. Berdasarkan 4 di atas ada empat selang yang dapat dibentuk yaitu $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[-\sqrt{3}, 0]$, $[0, \sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}, \infty)$. Jika dilakukan pengujian pada selang tersebut (dengan asumsi $\mu > 0$) maka diperoleh

- $F'(x) > 0$ pada $x \in [\sqrt{3}, \infty)$, fungsi F monoton naik.
- $F'(x) < 0$ pada $x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [-\sqrt{3}, 0] \cup [0, \sqrt{3}]$, fungsi F monoton turun.

Jadi terbukti bahwa F monoton naik menuju tak hingga untuk $x \geq \sqrt{3}$, $x \rightarrow \infty$.

Dari pembuktian 1-5, berdasarkan Teorema Lienard dapat disimpulkan bahwa Persamaan Van der Pol (1) mempunyai tepat satu *limit cycle*. Selanjutnya, jenis kestabilan dari *limit cycle* tersebut adalah stabil.

3. Solusi Pendekatan Persamaan Van Der Pol Menggunakan Metode *Multiple Scale*

Pada metode *multiple scale* ini diasumsikan bahwa solusi Persamaan (1) berbentuk deret:

$$x = x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots \tag{8}$$

untuk t_1, t_2 didefinisikan dengan $t_1 = t$, $t_2 = \mu t$, sehingga operator diferensial yang digunakan adalah

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \mu \frac{\partial}{\partial t_2} \tag{9}$$

Berdasarkan Persamaan (8) dan (9) dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu \frac{\partial}{\partial t_2} \right) x \text{ dan} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) x \end{aligned} \tag{10}$$

Selanjutnya Persamaan (8) dan (10) disubstitusi ke Persamaan (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + x &= \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} \\ \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) + 1 \right) & \\ (x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots) & \\ = \mu(1 - (x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + & \\ \dots)^2) \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu \frac{\partial}{\partial t_2} \right) & \\ (x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots) & \end{aligned} \tag{11}$$

Persamaan (11), diuraikan menjadi

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) & \\ (x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots) & \\ -\mu(1 - (x_0(t_1, t_2) + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots)(x_0(t_1, t_2) & \\ + \mu x_1(t_1, t_2) + \dots)) & \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu \frac{\partial}{\partial t_2} \right) x_0(t_1, t_2) + \mu \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu \frac{\partial}{\partial t_2} \right) x_1(t_1, t_2) & \right. \\ \left. + \dots \right] = 0 & \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_0 + x_0 + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_1 + x_1 + \right. & \\ \left. 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0 - \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 + x_0^2 \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 \right) = 0 & \end{aligned} \tag{12}$$

Dari Persamaan (12), dikumpulkan suku-suku yang sejenis dalam pangkat μ , diperoleh: Order $O(\mu^0)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_0 + x_0 = 0 \tag{13}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) x$$

Order $O(\mu^1)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_1 + x_1 = (1 - x_0^2) \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 - 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0 \quad (14)$$

Persamaan (14) adalah persamaan diferensial order dua homogen, dengan solusi umum persamaan adalah

$$x_0(t_1) = a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1) \quad (15)$$

dengan $a_0(t_2)$ dan $b_0(t_2)$ adalah fungsi-fungsi sebarang dalam t_2 . Persamaan (15) dapat ditulis menjadi

$$x_0(t_1) = a(t_2) \cos(t_1 + \theta(t_2)) \quad (16)$$

Dengan menggunakan sifat Euler, Persamaan (16) dapat dinyatakan

$$x_0(t_1) = \frac{1}{2} a e^{i\theta} e^{it_1} + \frac{1}{2} a e^{-i\theta} e^{-it_1} \quad (17)$$

Misalkan pada Persamaan (17)

$$R(t_2) = \frac{1}{2} a e^{i\theta}, \bar{R}(t_2) = \frac{1}{2} a e^{-i\theta} \quad (18)$$

Berdasarkan Persamaan (18) maka Persamaan (17) menjadi

$$x_0(t_1) = R(t_2) e^{it_1} + \bar{R}(t_2) e^{-it_1} \quad (19)$$

Dari Persamaan (19) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 &= R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1} \\ \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0 &= R' i e^{it_1} - \bar{R}' i e^{-it_1} \end{aligned} \quad (20)$$

Pers (20) disubstitusi ke Persamaan (14), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_1 + x_1 &= (1 - x_0^2) \frac{\partial}{\partial t_1} x_0 - 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} x_0 \\ &= [R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1}] + R^2 e^{i2t_1} [R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1}] \\ &\quad + 2RR [R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1}] \\ &\quad + \bar{R}^2 e^{-i2t_1} [R i e^{it_1} - \bar{R} i e^{-it_1}] \\ &\quad - 2R' i e^{it_1} - 2\bar{R}' i e^{-it_1} \\ &= (R i + R^2 \bar{R} i - 2R' i) e^{it_1} \\ &\quad + (R^3 i) e^{i3t_1} \\ &\quad - (\bar{R} i + R \bar{R}^2 i + 2\bar{R}' i) e^{-it_1} \\ &\quad - (\bar{R}^3 i) e^{-i3t_1} \end{aligned}$$

dengan mengganti kompleks konjugat dengan cc , maka diperoleh

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} x_1 + x_1 = (R i + R^2 \bar{R} i - 2R' i) e^{it_1} + (R^3 i) e^{i3t_1} + cc$$

Dengan memilih suku yang memuat e^{it_1} dan membuatnya bernilai nol, maka diperoleh:

$$(R i + R^2 \bar{R} i - 2R' i) e^{it_1} = 0.$$

Karena $e^{it_1} \neq 0$ maka

$$(R i + R^2 \bar{R} i - 2R' i) = 0 \quad (21)$$

Dengan menggunakan Persamaan (18) dan mengingat $t_2 = \epsilon t_1$, maka Persamaan (21) menjadi

$$\left(\frac{1}{2} a i - a' i + a \theta' + \frac{1}{8} a^3 i \right) e^{i\theta} = 0 \quad (22)$$

Karena $e^{i\theta} \neq 0$, maka diperoleh

$$\left(\frac{1}{2} a - a' \frac{1}{8} a^3 \right) i + a \theta' = 0 \quad (23)$$

Persamaan (23) akan bernilai nol, jika memenuhi sistem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a - a' \frac{1}{8} a^3 \\ a \theta' = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Dari persamaan (24) yang bagian kedua, diperoleh solusi $\theta = \theta_0$ maka solusi (16) menjadi

$$x_0(t_1) = a(t_2) \cos(t_1 + \theta_0) + O(\mu) \quad (25)$$

Dari persamaan (24) bagian pertama merupakan persamaan Bernoulli, dengan nilai awal $a(0) = a_0 > 0$ diperoleh solusi pendekatan (25) menjadi

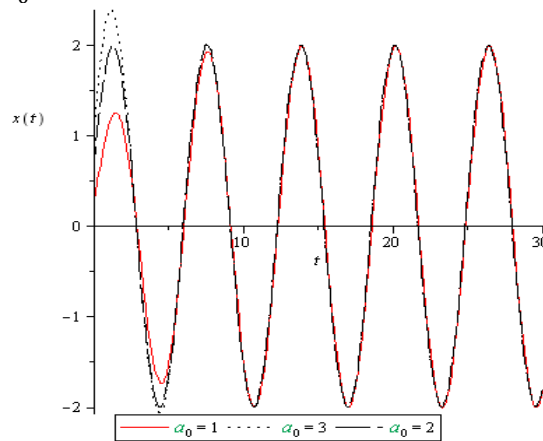
$$x_0(t_1) = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + (4 - a_0^2)e^{-t_2}}} \cos(t_1 + \theta_0) + O(\mu) \quad (26)$$

Jadi, solusi perturbasi Persamaan Van der Pol (1) didekati menggunakan suku pertama diperoleh

$$x_0(t_1) = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + (4 - a_0^2)e^{-\mu t}}} \cos(t_1 + \theta_0) \quad (27)$$

dengan $a(t) = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + (4 - a_0^2)e^{-\mu t}}}$.

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (27) dapat dianalisa bahwa Jika $a_0 = 2$ maka $a(t) = 2$ sehingga menghasilkan solusi periodik yaitu $x(t) = 2$. Jika $0 < a_0 < 2$ atau $a_0 > 2$ untuk $t \rightarrow \infty$ maka diperoleh $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 2$. Berikut diberikan grafik solusi $x(t)$ menggunakan metode *multiple scale* dengan variasi nilai amplitudo awal a_0 .



Gambar 5. Solusi Persamaan Van der Pol menggunakan metode *multiple scale* dengan variasi nilai a_0

Berdasarkan analisa solusi pendekatan menggunakan metode *multiple scale* dan grafik (Gambar 5) dapat disimpulkan bahwa dengan memberikan nilai amplitudo awal yang berbeda diperoleh solusi persamaan Van der Pol yang konvergen ke solusi periodik dengan periode 2.

D. SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil analisa kestabilan melalui linearisasi di sekitar titik ekuilibrium pada persamaan Van der Pol (yang telah ditransformasi menjadi sistem persamaan), diperoleh tiga daerah ketabilan berdasarkan nilai parameter kekuatan redaman yaitu $-\infty < \mu < 0$ adalah daerah yang menyebabkan titik ekuilibrium stabil asimtotik, $0 < \mu < \infty$ adalah daerah menyebabkan titik ekuilibrium tidak stabil. Selanjutnya, untuk $\mu = 0$ menyebabkan terjadi bifurkasi *hopf* dan titik ekuilibrium bertipe center dan stabil. Akibatnya persamaan memiliki solusi periodik. Selanjutnya, solusi periodik dibuktikan merupakan *limit cycle* yang stabil dengan cara metransformasi persamaan Van der Pol menjadi sistem Lienard dan menggunakan Teorema Lienard. Terakhir, berdasarkan solusi yang diperoleh melalui metode *multiple scale* diperoleh kesimpulan bahwa dengan memberikan nilai amplitudo awal yang berbeda maka solusi persamaan Van der Pol konvergen ke solusi periodik dengan periode dua. Penelitian selanjutnya dapat mengkaji model Van der Pol dengan *external forced oscillation* dan dapat menggunakan metode perturbasi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Tim Penulis mengucapkan terima kasih Kepada DIPA-PNBP FMIPA ULM Tahun 2019 yang telah mendanai penelitian ini.

REFERENSI

- Aybar, O. O., Kusbeyzi Aybar, I., & Hacinliyan, A. S. (2013). Bifurcations in Van der Pol-like systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013. <https://doi.org/10.1155/2013/138430>
- Bajaj, V., & Prakash, N. (2013). Non Linear Oscillator Systems and Solving Techniques. *Int. Journal of Scientific and Research Publications*, 3(5), 1–9.
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2010). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. New York: Springer.
- Cheng, D., & et al. (2010). *Linearization of Nonlinear Systems*. Berlin Heidelberg: Science Press Beijing and Springer-Verlag.
- Cordshooli, G. A., & Vahidi, A. R. (2011). Solutions of Duffing - van der Pol equation using decomposition method. *Advanced Studies in Theoretical Physics*, 5(1-4), 121–129.

- Hellevik, K., & Gudmestad, O. T. (2017). Limit cycle oscillations at resonances. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 276(1). <https://doi.org/10.1088/1757-899X/276/1/012020>
- Hosseini, S., Babolian, E., & Abbasbandy, S. (2016). A New Algorithm for Solving Van der Pol Equation Based on Piecewise Spectral Adomian Decomposition Method. *Int. Journal Industrial Mathematics*, 8(3), 177–184.
- Jacobsen, P. K. (2013). Introduction to the Method of Multiple Scales. *UiT The Arctic University of Norway*.
- Karim, M. . (2019). *Estimasi Parameter Pada Persamaan Diferensial Biasa Fuzzy*. Institut Teknologi Bandung.
- Kuehn, C. (2015). Multiple Time Scale Dynamics. *Applied Mathematical Sciences (Switzerland)*, 191, 1–814. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12316-5>
- Low, P. S., Ramlan, R., Muhammad, N. S., & Ghani, H. A. (2016). Comparison of harmonic balance and multiple scale method on degree of nonlinearity for duffing oscillator. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, 11(8), 5314–5319.
- Mazarei, M. M., Behroozpoor, A. A., & Kamyad, A. V. (2014). The Best Piecewise Linearization of Nonlinear Functions. *Applied Mathematics*, 05(20), 3270–3276. <https://doi.org/10.4236/am.2014.520305>
- Rigatos, G., Siano, P., Wira, P., Abbaszadeh, M., & Zouari, F. (2018). Nonlinear H-infinity control for optimization of the functioning of mining products mills. *Proceedings: IECON 2018 - 44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2367–2372. <https://doi.org/10.1109/IECON.2018.8592736>
- Taylor, M. R., & Bhathawala, P. H. (2012). Linearization of Nonlinear Differential Equation by Taylor's Series Expansion and Use of Jacobian Linearization Process. *International Journal of Theoretical and Applied Science*, 4(1), 36–38.
- Vaidyanathan, S. (2015). Output regulation of the forced Van der Pol chaotic oscillator via adaptive control method. *International Journal of PharmTech Research*, 8(6), 106–116.
- Yulida, Y., & Karim, M. A. (2019). Perbandingan Solusi Persamaan Van der Pol Menggunakan Metode Multiple Scale dan Metode Kryloff dan Bogoliuboff. *Seminar Dan Rapat Tahunan BKS PTN Wilayah Barat Bidang MIPA (SEMIRATA)*. Universitas Bengkulu, Bengkulu.