PENERAPAN KONSEP LIMIT FUNGSI DALAM PENENTUAN KOEFISIEN FOURIER

[1]Abdillah, [2]Syaefudin suhaedi

[1] Dosen Program Studi Pendidikan Matematika Univ. Muhammadiyah Mataram
(email : ahmad_fawwaz18@yahoo.co.id)
[2]Dosen Program Studi Pendidikan Matematika Univ. Muhammadiyah Mataram

ABSTRAK

Pada umumnya, menentukan koefisien deret Fourier a_0, a_n dan b_n dengan n =1, 2, 3, …, untuk fungsi periodik $f(x)$ ditentukan melalui pengintegralan. Pengintegralan yang relatif rumit ternyata seringkali menghasilkan rumus yang relatif sederhana bagi koefisien Fourier a_n dan b_n. Jika integral dalam menentukan koefisien Fourier a_n dan b_n di selesaikan dengan menggunakan rumus integral parsial, maka setelah melalui beberapa tahap perhitungan, akan diperoleh rumus baru yang melibatkan limit kanan maupun limit kiri fungsi $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, dan seterusnya.Untuk fungsi polinom berderajat r, menentukan koefisien Fourier a_n dan b_n hanya melibatkan nilai limit $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, sampai $f^{(r)}(x)$. Sedangkan untuk fungsi trigonometri yang berbentuk $f(x) = A.\sin Bx$ atau $f(x) = A.\cos Bx$ dan fungsi eksponen berbentuk $f(x) = A.e^{Bx}$ hanya melibatkan nilai limit $f(x)$ dan $f'(x)$. Dengan konsep limit fungsi ini tidak memerlukan pengintegralan dalam menentukan nilai a_n dan b_n, karena didapatkan rumus lain yang lebih sederhana dalam menentukan nilai a_n dan b_n. Namun metode ini tidak dapat digunakan untuk menentukan nilai a_0, karena a_n tidak terdefinisi jika n = 0. Selain itu, untuk fungsi terigonometri, nilai a_n dan b_n tidak dapat ditentukan untuk suatu nilai n tertentu. Jika hal ini terjadi, maka nilai koefisien Fourier a_n dan b_n fungsi $f(x)$ pada nilai n yang dimaksud hanya dapat ditentukan melalui pengintegralan.

Kata kunci *:* Limit fungsi, Koefisien Fourier

PENDAHULUAN

Sebagai ilmu pengetahuan, matematika dalam perkembangannya merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah aktifitas manusia, karena dengan menggunakan bahasa matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisa dan dipecahkan. Sebagai salah satu cabang ilmu matematika, kalkulus memiliki banyak bidang ilmu pengetahuan yang sangat penting untuk kita pelajari dan salah satunya adalah limit. Konsep limit fungsi merupakan dasar untuk mempelajari kalkulus. Jika kita mempelajari lebih mendalam tentang limit suatu fungsi *f*, maka kita akan mengenal tentang limit kanan dan limit kiri fungsi *f* tersebut. Fungsi *f* di katakana memiliki limit jika nilai limit kiri dan limit kanan dari fungsi tersebut sama, tetapi jika fungsi *f* memiliki nilai limit kiri dan nilai limit kanan yang berbeda, maka fungsi *f* dikatakan tidak memiliki limit. Tetntu menjadi suatu hal yang menarik bagi kita jika mengkaji lebih mendalam tentang konsep limit ini terutama jika kita mengkaji masalah limit kanan dan limit kiri dari fungsi *f*. Nilai dari selisih limit kanan dengan limit kiri fungsi *f*dapat merupakan koefisien dari fungsi-fugsi periodik. Pada fungsi periodik juga banyak kita temukan koefisien dari fungsi periodik itu merupakan nilai selisih limit kanan dengan limit kiri fungsi periodik, karena banyak fungsi periodik tidak kontinu pada suatu titik tertentu. Secara umum, fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk deret, misalnya Deret Fourier.

Deret Fourier muncul ketika kita mempresentasikan suatu fungsi periodik *f* tertentu dengan suatu deret trigonometrik. Selama ini rumus untuk menentukan koefisien Deret Fourier dari suatu fungsi *f* pada interval tertentu hanya ditentukan melalui pengintegralan. Pengintegralan yang relatif rumit dan panjang ternyata seringkali menghasilkan rumus yang relatif sederhana bagi koefisien Fourier a_n dan b_n. Ini menimbulkan pertanyaan apakah ada cara lain untuk mendapatkan koefisien Fourier. Dengan menggunakan konsep limit fungsi *f* pada suatu titik tertentu, akan ditentukan suatu koefisien khususnya dalam hal ini untuk menentukan koefisien Deret Fourier (Fourier series).

Berdasarkan uraian diatas, rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah "Bagaimana menerapkan konsep limit suatu fungsi dalam menentukan koefisien Deret Fourier", serta untuk memberikan penekanan dan agar tidak terjadi salah tafsir dalam pembahasan dan pokok permasalahan lebih terarah, maka batasan permasalah dalam pembahasan adalah fungsi yang akan ditentukan koefisien fouriernya adalah fungsi polinom, fungsi trigonometri yang berbentuk $f(x) = A.\sin Bx$ atau $f(x) = A.\cos Bx$ dan fungsi eksponen berbentuk $f(x) = A.e^{Bx}$.

Penelitian ini bertujuan untuk merumuskan bagaimana menentukan koefisien Fourier dengan menggunakan konsep limit fungsi untuk fungsi polinom, fungsi trigonometri yang berbentuk $f(x) = A.\sin Bx$ atau $f(x) = A.\cos Bx$ dan fungsi eksponen $f(x) = A.e^{Bx}$.

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini nantinya adalah menambah wawasan pengetahuan dan dapat memberikan gambaran yang jelas kepada pembaca khususnya penggemar matematika dan fisika bagaimana cara menentukan koefisien Fourier dengan menggunakan konsep limit.

LANDASAN TEORI

Limit

Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada setiap bilangan real dalam selang terbuka yang memuat a, kecuali mungkin di bilangan a sendiri. Limit $f(x)$ untuk x mendekati a adalah L, ditulis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga jika $0 < |x-a| < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. (Leithold, 1986 :89-90)

Limit Kanan dan Limit Kiri

Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada setiap bilangan real dalam selang terbuka (a, c). Limit $f(x)$ untuk x mendekati a dari kanan adalah L, ditulis $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga jika $0 < x - a < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. (Leithold, 1986 :109)

Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada setiap bilangan real dalam selang terbuka (a, c). Limit $f(x)$untuk x mendekati a dari kiri adalah L, ditulis $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga jika $0 < a - x < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. (Leithold, 1986 : 109)

Deret Trigonometri

Deret trigonometri adalah deret yang berbentuk:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

dengan a_0, a_n dan b_n adalah konstanta. (Kreyzig , 1993 : 663).

Secara umum, jika setiap suku pada deret trigonometri memiliki periode 2p, maka deret trigonometri berbentuk

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p}\right)$$

Deret Fourier (*Fourier Series*)

Deret Fourier bagi fungsi $f(x)$ adalah suatu deret trigonometrik yang koefisien-koefisiennya ditentukan dari fungsi $f(x)$ dengan rumus Euler. (Kreyzig , 1993 : 665)

Jika fungsi $f(x)$ adalah fungsi yang dapat dinyatakan kedalam deret Fourier, maka deret itu akan berbentuk

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p}\right)$$

a_0, a_n dan b_n disebut koefisiien Fourier fungsi $f(x)$ dan diberikan menurut rumus-rumus Euler

$$a_0 = \frac{1}{2p} \int_{-P}^{p} f(x)\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{p} \int_{-P}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-P}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

METODE PENELITIAN

Jenis Penelitian

Dalam penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan yaitu mempelajari buku-buku sebagai sumber informasi untuk kemudian digunakan dalam pembahasan masalah.

Sistematika Pembahasan

Pembahasan dalam kajian ini adalah merumuskan nilai a_n dan b_n yang merupakan koefisien deret Fourier suatu fungsi dengan metode loncatan, yaitu suatu metode pengurangan limit kanan dengan limit kiri suatu fungsi pada titik tertentu, yang dalam hal ini fungsi periodik yang direpresentasikan oleh m buah fungsi , yaitu:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & , \quad x_0 \le x < x_1 \\ f_2(x) & , \quad x_1 \le x < x_2 \\ & \vdots \\ f_m(x) & , \quad x_{m-1} \le x < x_m \end{cases}$$

Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Kedua ruas Persamaan (*) masing-masing dikalikan dengan p dimana 2p adalah peride dari fungsi f.
2. Karena $f\,(x)$ direpresentasikan oleh m fungsi seperti yang tersebut diatas, maka kita tulis persamaan (*) dalam bentuk integral bagian demi bagian, dengan mengasumsikan x_0 = c dan x_m= c + 2p.
3. Notasikan bentuk integral bagian demi bagian tersebut diatas dalam bentuk sigma, kemudian dengan menggunakan rumus integral parsial, maka integral tersebut dapat ditentukan.
4. Tentukan selisih limit kanan dengan limit kiri fungsi $f\,(x)$ di titik $x = x_1, x = x_2$, sampai $x = x_m$, begitu pula selisih limit kanan dengan limit kiri $f\,'(x)$, $f\,''(x)$, dan seterusnya.
5. Setelah menerapkan langkah-langkah penting diatas, kita akan memperoleh rumus yang kita inginkan secara umum.
6. Dari rumus yang telah diperoleh, selanjutnya akan ditentukan rumus koefisien Fourier a_n dan b_n dengan konsep limit untuk fungsi polinom, trigonometri dan eksponen secara khusus.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Koefisien Fourier untuk Fungsi Secara Umum

Misalkan $f(x)$adalah fungsi periodik dengan periode $2p$, dan $f(x)$ direpresentasikan oleh m fungsi , yaitu:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & ; \; x_0 \le x < x_1 \\ f_2(x) & ; \; x_1 \le x < x_2 \\ & \vdots \\ f_m(x) & ; \; x_{m-1} \le x < x_m \end{cases}$$

Misalkan $f\,(x)$ dapat dinyatakan dalam deret Fourier, maka

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p}+b_n\sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

Dari persamaan diatas, hasil nilai a_n dan b_n adalah:

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\left(-\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}(x_s)\sin Kx_s-\frac{1}{K}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}'(x_s)\cos Kx_s+\frac{1}{K^2}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}''(x_s)\sin Kx_s+\frac{1}{K^3}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}'''(x_s)\cos Kx_s\;...\right)$$

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\left(\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}(x_s)\cos Kx_s-\frac{1}{K}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}'(x_s)\sin Kx_s-\frac{1}{K^2}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}''(x_s)\cos Kx_s+\frac{1}{K^3}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}'''(x_s)\sin Kx_s\;...\right)$$

dimana: $K=\dfrac{n\pi}{p}$,

$\mathrm{j}(x_s) = \lim\limits_{x\to x_s^+} f(x) - \lim\limits_{x\to x_s^-} f(x)$

$\mathrm{j}'(x_s) = \lim\limits_{x\to x_s^+} f'(x) - \lim\limits_{x\to x_s^-} f'(x)$

Koefisien Fourier Fungsi Polinom

Untuk fungsi polinom berderajat r kita ketahui bahwa nilai turunan ke – $(r+1)$ untuk fungsi polinom berderajat r adalah nol, sehingga tahap pengintegralan akan terhenti sampai langkah ke – r, sehingga diperoleh:

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\left(-\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}(x_s)\sin Kx_s-\frac{1}{K}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}'(x_s)\cos Kx_s+...\pm\frac{1}{K^r}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}^{(r)}(x_s)\alpha\right)$$

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\left(\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}(x_s)\cos Kx_s-\frac{1}{K}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}'(x_s)\sin Kx_s-...\pm\frac{1}{K^r}\sum_{s=1}^{m}\mathrm{j}^{(r)}(x_s)\beta\right)$$

α = sin Kx_s, jika r genap dan α = cos Kx_s, jika r ganjil

β = cos Kx_s, jika r genap dan β = sin Kx_s, jika r ganjil

Koefisien Fourier Fungsi Trigonometri

Untuk fungsi trigonometri berbentuk $f\,(x) = A.\sin Bx$ dan $f\,(x) = A.\cos Bx$, dengan A, B adalah konstanta, akan mengalami bentuk yang sejenis ketika mengalami penurunan sampai turunan kedua, maka dapat digunakan metode integral pengulangan ketika sampai tahap integral parsial tahap kedua, sehingga diperoleh :

$$a_n = \frac{n\pi}{p^2\left(K^2 - B^2\right)}\left(-\sum_{s=1}^{m} j(x_s)\sin Kx_s - \frac{1}{K}\sum_{s=1}^{m} j'(x_s)\cos Kx_s\right)$$

$$b_n = \frac{n\pi}{p^2\left(K^2 - B^2\right)}\left(\sum_{s=1}^{m} j(x_s)\cos Kx_s - \frac{1}{K}\sum_{s=1}^{m} j'(x_s)\sin Kx_s\right)$$

Koefisien Fourier Fungsi Eksponen

Untuk fungsi eksponen berbentuk $f(x) = Ae^{Bx}$, dengan *A, B* adalah konstanta, mengalami bentuk yang sejenis ketika mengalami penurunan sampai turunan kedua, sehingga diperoleh:

$$a_n = \frac{n\pi}{p^2\left(K^2 + B^2\right)}\left(-\sum_{s=1}^{m} j(x_s)\sin Kx_s - \frac{1}{K}\sum_{s=1}^{m} j'(x_s)\cos Kx_s\right)$$

$$b_n = \frac{n\pi}{p^2\left(K^2 + B^2\right)}\left(\sum_{s=1}^{m} j(x_s)\cos Kx_s - \frac{1}{K}\sum_{s=1}^{m} j'(x_s)\sin Kx_s\right)$$

PENUTUP

Untuk menentukan nilai a_0 hanya dapat ditentukan melalui pengintegralan, yaitu

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{c}^{c+2p} f(x)\,dx$$

Adapun saran yang dapat disampaikan sehubungan dengan hasil penelitian ini adalah dalam menentukan koefisien Fourier tidak hanya terpaku pada pengintegralan. Selain itu dalam mengembangkan penelitian ini hendaklah dapat mengkaji lebih jauh tentang pemanfaatan konsep limit fungsi dalam menentukan koefisien Fourier a_n dan b_n pada berbagai fungsi lainnya , karena pada kajian ini menentukan koefisien Fourier a_n dan b_n hanya terbatas pada fungsi polinom, fungsi trigonometri yang berbentuk $f(x) = A.\sin Bx$ atau $f(x) = A.\cos Bx$ dan fungsi eksponen yang berbentuk $f(x) = Ae^{Bx}$, dimana *A, B* adalah konstanta.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G. and D. R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis,* Third Edition, JohnWiley & Sons, New York, 2000.

Hawkins, T. *Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Developments,* Dniv. Of Wisconsin Press, Madison, WI, 1970. Reprint, Amer. Math. Soc, Chelsea Series, 1998.

Kreyszig. E. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan*, Jilid 1 edisi keenam. Alih ahasa: Bambang Sumantri. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Leithold. L. 1986. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*, Jilid 1 edisi kelima. Alih bahasa: Drs. E. Hutahaean. Erlangga. Jakarta.

Martono. T. dan Hasibuan. M.T. 1993. *Matematika 1 Untuk Ilmu-Ilmu Pertanian, Kehidupan dan Prilaku.*PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Purcell. V. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jilid 1 edisi keempat. Alih bahasa: Drs. I Nyoman Susila, M.Sc, dkk. Erlangga. Jakarta.

Soemartojo. N. 1987. *Kalkulus Lanjutan.* Universitas Indonesia Press, Jakarta.

Spiegel. R. M. 1992. *Matematika Lanjutan Untuk Para Insinyur dan Ilmuan.* Alih bahasa: Drs. Koko Martono. Erlangga. Jakarta.

Stoll, M. *Introduction to Real Analysis,* Second Edition, Addison Wesley, 2002.