

MODELADO Y ESTIMACIÓN DE LA SEÑAL AC PARA APLICACIÓN CON FILTRO DE KALMAN

NICOLÁS ARIAS BERMÚDEZ



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE TECNOLOGÍA ELÉCTRICA
PEREIRA
2019

MODELADO Y ESTIMACIÓN DE LA SEÑAL AC PARA APLICACIÓN CON FILTRO DE KALMAN

NICOLÁS ARIAS BERMÚDEZ

Proyecto de grado para optar al título de Tecnólogo en Electricidad.

Director: Luis Enrique Avendaño González, PhD

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE TECNOLOGÍA ELÉCTRICA
PEREIRA
2019

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Pereira/Risaralda 2019

Agradecimientos

Agradezco Dios Padre Celestial por guiarme y bríndame la fuerza de salir adelante en este trabajo de grado tan importante para mí.

Agradezco a mi madre Luz Enith Bermúdez que ha sido el primotor que le da energía a mi vida que gracias a su dedicación y esfuerzo ha hecho de mí una mejor persona.

Agradezco a mi abuela María Oclidia Sánchez y a mi abuelo. José Jesús Arias por ser las personas que le dan alegría a mi vida a mi director de trabajo de grado Luis Enrique Avendaño por su dedicación, guía y esfuerzo para llevar a cabo este trabajo de grado, Igualmente a mi compañero de estudio Manuel Vargas Salazar por ser una persona que me apoyo en momentos de tristeza a lo largo de mi carrera.

Es a ellos a quienes va dedicado este proyecto.

ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN	6
1.DINÁMICA DE LOS FILTROS DE KALMAN	7
2.RUDOLF E. KALMAN	8
3.ANÁLISIS DE SEÑALES Y DE RUIDO	10
3.1.Señales sinusoidales	10
3.2.Dominio del tiempo	11
3.3.Dominio de la frecuencia	11
3.4.Análisis de ruido.....	13
4.ESTIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS	16
4.1.Estimación de una constante	16
5.ESTIMACIÓN RECURSIVA POR MÍNIMOS CUADRADOS	19
6.FILTRO DE KALMAN DISCRETO	25
6.1.Sistemas discretos en el tiempo	25
7.DEDUCCIÓN Y APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN	29
7.1.Modelo de la señal	38
7.1.1.Modelo en el dominio del tiempo	38
7.1.2.Modelo en el espacio de estados.....	38
7.2.Reducción del número de parámetros de sintonización	41
7.3.Algoritmo aplicativo del modelo	43
8.CONCLUSIONES	51
9.BIBLIOGRAFIA	52

Resumen

Este trabajo de grado se realiza para obtener el título de Tecnólogo Electricista en la Universidad Tecnológica de Pereira; En el cual consiste en la teoría de estimación óptima de estados que depende fuertemente de la teoría de matrices, incluyendo cálculo matricial y teniendo en cuenta los conceptos de estabilidad, controlabilidad y observabilidad de los sistemas lineales. Para el diseño del filtro óptimo en el caso de este trabajo de grado (filtro óptimo de Kalman) es sumamente importante la estimación por mínimos cuadrados ya que es la base para el diseño de éstos. A mediados del siglo pasado, apareció el filtro de Wiener, el cual es un método de estimar señales variantes en el tiempo contaminadas por ruido, con base en las mediciones del ruido. Hasta 1959, el filtro de Wiener era el estado del arte en la estimación de señales, Este paradigma fue roto con la publicación del trabajo de R. Kalman en los comienzos de los años 60, a partir de los cual miles de proyectos se han elaborado con mucho éxito. Aplicando los conceptos anteriores se llegará al modelado y estimación de la señal AC para la aplicación con filtro de Kalman. Que simplemente expone el proceso mediante el cual se elimina un ruido blanco gaussiano que interfiere sobre la señal AC de la red de energía eléctrica validando los resultados simulando los algoritmos en Matlab.

Abstract

This work of degree is done to obtain the title of Technologist Electrician in the Technological University of Pereira; In which it consists of the theory of optimal estimation of states that depends strongly on the theory of matrices, including matrix calculation and taking into account the concepts of stability, controllability and observability of linear systems. For the design of the optimum filter in the case of this grade work (Kalman's optimum filter), the least squares estimation is extremely important since it is the basis for the design of these. In the middle of the last century, the Wiener filter appeared, which is a method of estimating time-varying signals contaminated by noise, based on noise measurements. Until 1959, the Wiener filter was the state of the art in the estimation of signals. This paradigm was broken with the publication of the work of R. Kalman in the early 60's, from which thousands of projects have been elaborated very successful Applying the above concepts will lead to the modeling and estimation of the AC signal for the Kalman filter application. That simply exposes the process by which a Gaussian white noise that interferes with the AC signal of the electric power network is eliminated by validating the results simulating the algorithms in Matlab.

Palabras clave: Estimación, Filtro de Kalman, Modelamiento, Algoritmos, Señal AC

Capítulo 1

Dinámica de los filtros de Kalman

La dinámica de los filtros Kalman resulta de los ciclos consecutivos de predicción y corrección. La dinámica de estos ciclos se deriva e interpreta en el marco de las funciones de densidad de probabilidad (fdp) gaussianas. Bajo condiciones adicionales en la dinámica del sistema, la dinámica del filtro de Kalman converge a un filtro de estado estacionario. Se introduce el proceso de innovación asociada con el filtro, que representa la nueva información transmitida a la estimación del estado por el último sistema de medición. La dinámica del filtro se interpreta en términos de los elipsoides de error asociada con la (fdp) gaussiana involucrada en la dinámica del filtro. Desde el punto de vista bayesiano, el filtro propaga la densidad de probabilidad condicional de las cantidades deseadas, condicionada al conocimiento de los datos reales procedentes de los aparatos de medición. ¿Por qué la base de la estimación de estado en la función de densidad de probabilidad condicional? El filtro de Kalman realiza la propagación de densidad de probabilidad condicional para los sistemas que pueden ser descritos a través de un modelo lineal en el que los ruidos del sistema y la medición son blancos gaussianos.

Capítulo 2

Rudolf E. Kalman

Para este trabajo de grado es sumamente importante presentar al ingeniero quien con sus análisis matemáticos desarrolló el filtro que lleva su nombre. Ya que se utilizó la herramienta mencionada para estimar la señal AC.

Rudolf Emil Kalman fue un ingeniero electricista y matemático estudió en el Instituto Tecnológico de Massachusetts o (MIT) donde recibió sus títulos de ingeniero y PhD. Su trabajo de tesis versaba sobre el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, que tiempo después tomaría esta herramienta para el desarrollo del filtro óptimo.

La influencia de Rudolf Kalman en la teoría del control es vasta, profunda y amplia y, de hecho, muchos de los conceptos más fundamentales en el campo se remontan a sus teorías, Su interés inicial en los sistemas de control fue evidente por su investigación en el MIT.

En 1958, Kalman se unió al Instituto de Investigación para Estudios Avanzados (RIAS, por sus siglas en ingles). Comenzó como investigador matemático y luego fue ascendido a Director Asociado de Investigación. Fue durante ese periodo de tiempo (1958-1964) que hizo algunas de sus contribuciones verdaderamente pioneras a la teoría del control moderno.

Su investigación en conceptos de sistemas fundamentales, como la controlabilidad y la observabilidad, ayudó a poner sobre una base teórica algunos de los aspectos estructurales de los sistemas de ingeniería más importantes. Unificó la teoría de tiempo continuo, la teoría y el diseño de sistemas lineales con respecto a criterios cuadráticos.

También fue durante su estancia en RIAS que Kalman desarrollo lo que quizá sea su contribución más conocida, el llamado filtro de Kalman. Obtuvo los resultados de la versión en tiempo discreto (datos muestreados) de este problema, a fines de 1958 y principios de 1959. Combinó el trabajo fundamental anterior en el filtrado de Wiener, Kolmogorov, Bode, Shannon, Pugachev y otros con el enfoque moderno de espacio de estado.

En 1958 cuando viajaba en el tren de Princeton a Baltimore el tren se detuvo durante una hora a las 11 pm en las afueras de Baltimore, entonces se le ocurrió aplicar el concepto de variables de estado al filtro de Wiener, ya que el filtro de Wiener que, si bien planteaba paradigmas difíciles de superar, hoy día no se aplican ampliamente debido a dificultades en el desarrollo de los procedimientos, debido a que para su aplicación se requieren señales estacionarias y eventualmente monovariantes. Para los casos donde hay señales estocásticas o de variables múltiples, el mejor estimador es el filtro de Kalman.

La solución de Kalman al problema del tiempo discreto lo llevó a abordar el problema del tiempo continuo. Luego, desarrolló completamente la versión de tiempo continuo del filtro de Kalman con Richard Bucy entre 1960 y 1961 y publicó

un importante documento sobre este tema. Esencialmente, el documento describe una manera de encontrar recursivamente soluciones al problema del filtrado lineal de datos continuos.

Una de las fuerzas impulsoras detrás del desarrollo del filtro de Kalman fueron las necesidades de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, que ayudó a financiar el trabajo de Kalman. A fines de la década de 1950 y principios de la década de 1960, las aeronaves habían avanzado hasta el punto en que requerían mecanismos avanzados de control de vuelo, y la Oficina de Investigación Científica de la Fuerza Aérea (Air Force office of scientific Research) o (AFOSR) financió la investigación sobre la teoría de control relacionada con estas aeronaves avanzadas, así como a los vehículos espaciales. La AFOSR patrocinó varios esfuerzos en esta área, incluida la investigación realizada en RIAS por Kalman y Bucy, que la Fuerza Aérea creía que tenía el potencial de alterar las aplicaciones de control. Tal como esperaba la AFOSR, el trabajo de Kalman y Bucy revolucionó el campo de la estimación y tuvo un enorme impacto en el diseño y desarrollo de sistemas de navegación precisos.

El algoritmo de Kalman también encontró una aplicación práctica en el programa espacial de la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (NASA). La NASA utilizó por primera vez el filtro de Kalman para resolver los problemas asociados con la determinación de las órbitas de los satélites. En la década de 1960, se usó el filtro de Kalman para las misiones Ranger, Mariner y Apollo, y cuando el módulo lunar del Apolo 11 aterrizó en la Luna en julio de 1969, fue guiado por el filtro de Kalman. El filtro también se usaría en los transbordadores espaciales de la NASA.

El logro de Kalman fue un hito, y la importancia de sus hallazgos se captó de inmediato. Su reputación se extendió a una escala internacional, lo llevó a muchos honores. En 1962, Kalman recibió el premio al Joven Científico Destacado del Año de la Academia de Ciencias de Maryland. En 1964 se convirtió en miembro del Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (IEEE).

En 1974, Kalman recibió la Medalla de Honor IEEE, el premio más alto de esa asociación. El IEEE lo reconoció "por ser pionero en los métodos modernos en la teoría de sistemas, incluidos los conceptos de controlabilidad, observabilidad, filtrado y estructuras algebraicas". Otros honores que ha recibido incluyen la Medalla Rufus Oldenburger de 1976 de la Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos. En 1984 recibió la Medalla del Centenario IEEE.

En 1985, Kalman fue uno de los primeros cuatro beneficiarios en recibir el Premio Kyoto, establecido ese año para reconocer "actividades intelectuales o creativas destacadas que han enriquecido significativamente la experiencia humana". Creado para honrar la investigación pionera en los campos de la ciencia básica, la ciencia de la frontera y la filosofía, el premio se administra a través de la Fundación Inamori, establecida como la contraparte japonesa de la Fundación Nobel. Kalman fue honrado por su desarrollo de una teoría de control para explicar el funcionamiento de un sistema dinámico. [9]

Capítulo 3

Análisis de señales y de ruido

Cuando se diseñan los circuitos eléctricos o electrónicos de comunicaciones, con frecuencia se tiene que analizar y pronosticar el funcionamiento del circuito con base en la distribución de potencia y la composición de frecuencias de la señal de información. Esto se hace con el método matemático llamado análisis de señales. Aunque todas las señales en las comunicaciones electrónicas no son ondas sinusoidales o cosenoidales de una sola frecuencia, muchas de ellas sí lo son, y las que no lo son se pueden representar con una combinación de funciones de seno o de coseno.

3.1 Señales sinusoidales

En esencia, el análisis de señales implica la realización del análisis matemático de frecuencia, longitud de onda y valor de tensión de una señal. Las señales eléctricas son variaciones de voltaje, o de corriente, respecto al tiempo, que se pueden representar por una serie de ondas seno o coseno. La descripción matemática de una onda de voltaje o de corriente con frecuencia única es

$$\begin{cases} v(t) = V\text{sen}(2\pi ft + \theta) & \text{o} & v(t) = V\text{cos}(2\pi ft + \theta) \\ i(t) = I\text{sen}(2\pi ft + \theta) & \text{o} & i(t) = I\text{cos}(2\pi ft + \theta) \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde:

$v(t)$ =voltaje de la onda sinusoidal, variable respecto al tiempo t .

$i(t)$ = corriente de la onda sinoidal, variable respecto al tiempo t .

V = voltaje máximo (volts).

f = frecuencia (hertz).

θ = desplazamiento de fase (radianes).

I = corriente máxima (amperes).

$2\pi f = \omega$ velocidad angular (radianes por segundo).

El uso de una función seno o coseno para representar una señal es completamente arbitrario y depende de cuál se escoge como referencia.

3.2 Dominio del tiempo

Un osciloscopio normal es un instrumento de dominio del tiempo. La pantalla del tubo de rayos catódicos es una representación de la amplitud de la señal de entrada en función del tiempo, y se le suele llamar *forma de onda de la señal*. En esencia, una forma de onda de la señal muestra la forma y la magnitud instantánea de la señal con respecto al tiempo, pero no necesariamente indica el valor de la frecuencia. Con un osciloscopio, la desviación vertical es proporcional a la amplitud de la señal total de entrada, y la deflexión horizontal es una función del tiempo (frecuencia de barrido). La Figura 1 muestra la forma de onda de una señal sinusoidal de frecuencia única de f [hertz] con amplitud máxima de V [voltios].

3.3 Dominio de la frecuencia

El analizador de espectro es un instrumento en el dominio de la frecuencia. En esencia no se despliega ninguna forma de onda en la pantalla. En vez de lo anterior se muestra una gráfica de amplitud contra frecuencia (la cual se conoce como espectro de frecuencia). En un analizador de espectro, el eje horizontal representa la frecuencia y el eje vertical representa la amplitud. En consecuencia, existirá una deflexión vertical para cada frecuencia que está presente en la entrada. De hecho, la forma de onda de entrada se “barre” a una frecuencia variable, con la ayuda de un filtro de paso de banda con Q elevado (cuya frecuencia central está sincronizada con la velocidad de barrido horizontal. Cada frecuencia que está presente en la forma de onda entrada produce una línea vertical en la pantalla (éstas son las componentes espectrales). La deflexión vertical (altura) de cada línea es proporcional a la amplitud de la frecuencia que representa. Una representación en el dominio de la frecuencia de la onda muestra el contenido de la frecuencia, pero no indica necesariamente la forma de la onda o la amplitud combinada de todas las componentes de entrada en un instante específico de tiempo. La Figura 2 muestra el espectro de frecuencia de una señal sinusoidal de frecuencia única cuya amplitud pico es V [voltios] y la frecuencia es f [hertz].

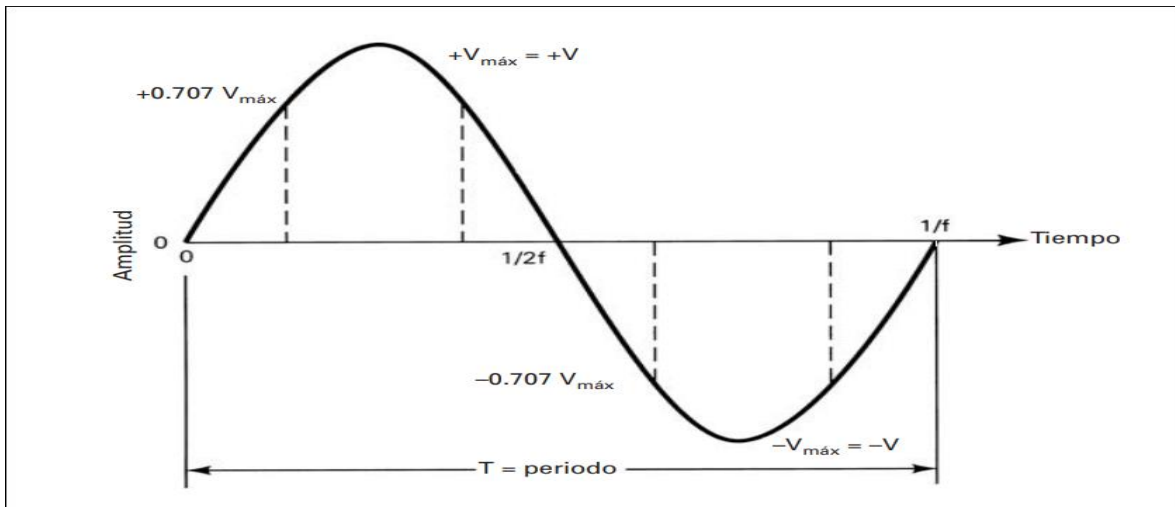


Figura 1. Representación en el dominio del tiempo (forma de onda de la señal) de una onda sinusoidal de frecuencia única.

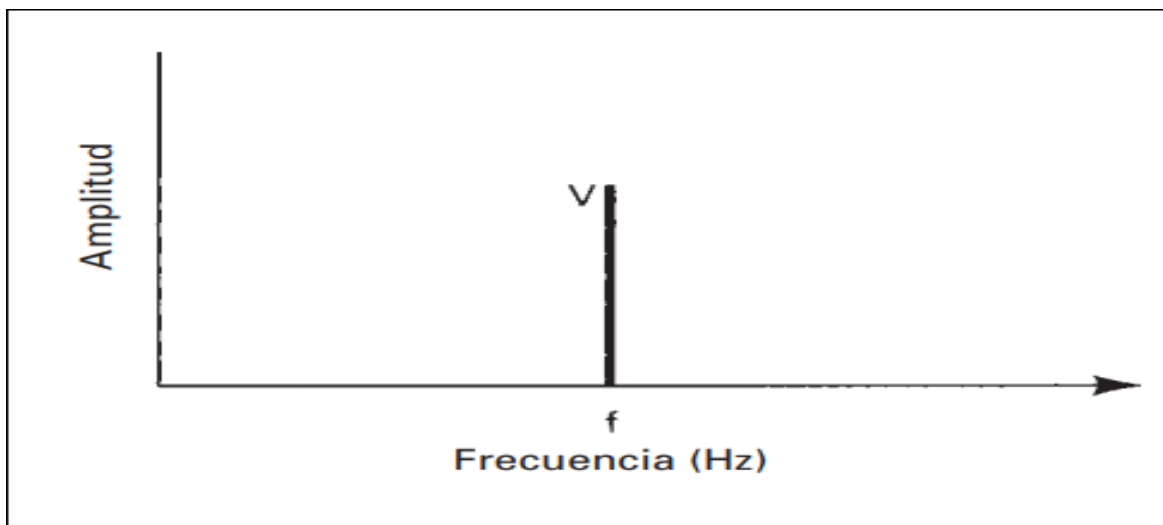


Figura 2. Representación en el dominio de la frecuencia (espectro) de una onda sinusoidal de frecuencia única.

Nótese que en la Figura 1 se observa una señal de naturaleza sinusoidal pura que tiene en el dominio un primer armónico que referencia la frecuencia fundamental del sistema donde aprovecha toda la energía en ese punto, cuando la señal sinusoidal no es pura aparecen más armónicos que son múltiplos de esta fundamental no aprovechando la energía en un solo punto en el caso de la corriente eléctrica tener armónicos es perjudicial ya que habría una corriente actuando en varias frecuencias y esto produciría calor algo indeseable en cualquier sistema ya que significan **pérdidas**.

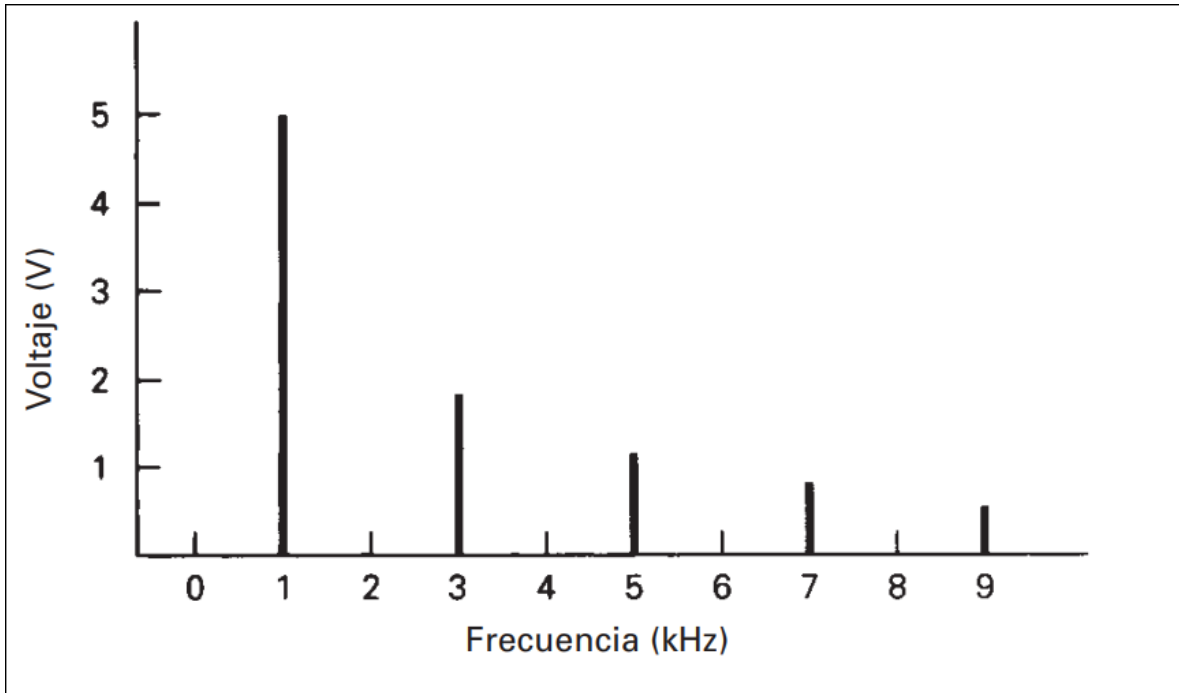


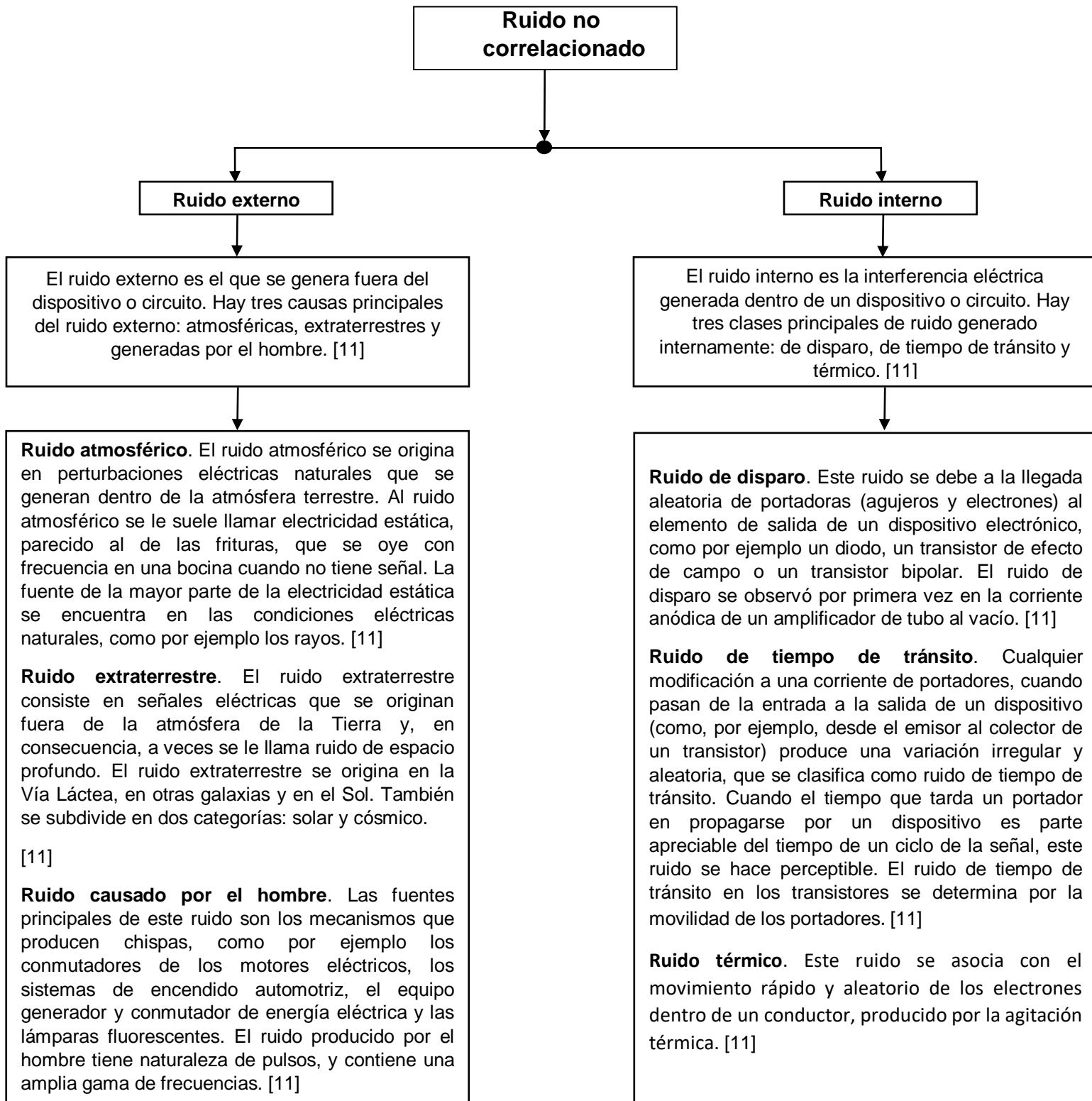
Figura 3 Representación en el dominio de la frecuencia (espectro) de una onda sinusoidal ruidosa con múltiplos de la frecuencia fundamental.

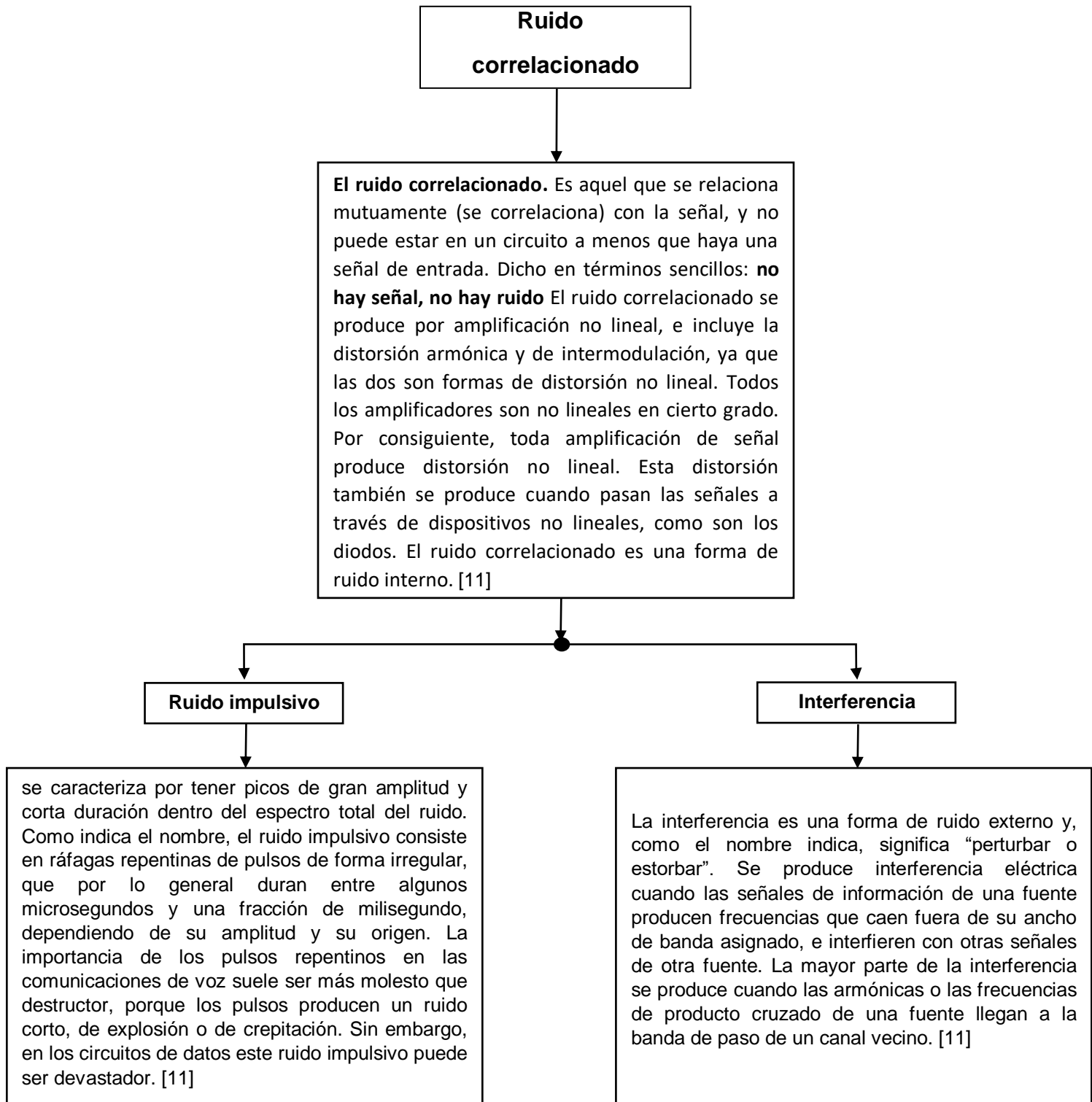
Se puede deducir entonces que la Figura 3.

3.4 Análisis de ruido

Se define al ruido eléctrico como cualquier energía eléctrica indeseable que queda entre la banda de paso de la señal. Por ejemplo, en la grabación de audio se consideran como ruido todas las señales eléctricas no deseadas que están dentro de la banda de frecuencias de audio, de 0 a 15 kHz, que interfieren con la música. La Figura 4 muestra el efecto que tiene el ruido sobre una señal eléctrica.

Se puede clasificar al ruido en dos categorías: *correlacionado* y *no correlacionado*. La correlación implica una relación entre la señal y el ruido. Por consiguiente, el ruido correlacionado solo existe cuando hay una señal. Por otra parte, el ruido no correlacionado está presente siempre, haya o no una señal.





Capítulo 4

Estimación por mínimos cuadrados

La estimación por mínimos cuadrados es la base fundamental para los métodos de diseño óptimo de filtros. Para el propósito de este trabajo de grado es la base fundamental del filtro de Kalman.

4.1 Estimación de una constante

Se basa en estudiar como estimar una constante sobre la base de varias medidas ruidosas de dicha constante. Por ejemplo, supóngase que se tiene un resistor, pero no se conoce su resistencia. Se toman varias medidas de su resistencia usando un multímetro de baja calidad, por lo tanto las medidas son ruidosas. Se desea estimar la resistencia sobre la base de las medidas ruidosas. Para tomar el problema en términos matemáticos, supóngase que \mathbf{x} es un vector constante desconocido de n elementos y \mathbf{y} es un vector de k elementos de medidas ruidosas. Entonces surge la pregunta ¿Cómo se puede encontrar el mejor estimado $\hat{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} ? Para tratar de resolver este problema se procede como se describe a continuación. [7]

Asúmase que cada elemento del vector \mathbf{y} de medidas es una combinación lineal de los elementos de \mathbf{x} , con la suma de algunas medidas ruidosas \mathbf{w} :

$$\begin{aligned} y_1 &= h_{11}x_1 + \cdots + h_{1n}x_n + w_1 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ y_k &= h_{k1}x_1 + \cdots + h_{kn}x_n + w_k \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones se puede colocar en forma matricial como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \tag{4.2}$$

Se define ϵ_y como la diferencia entre las medidas ruidosas y el vector $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$:

$$\epsilon_y = \mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}. \quad (4.3)$$

El vector ϵ_y es llamado la medida residual. El valor más probable o el valor esperado del vector \mathbf{x} es el vector $\hat{\mathbf{x}}$ que hace mínima la suma de los cuadrados entre los valores observados \mathbf{y} y el vector $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}$. De esta manera se tratará de calcular el vector $\hat{\mathbf{x}}$ que minimice la función de costo J , donde J está dada como:

$$J = \epsilon_{y1}^2 + \dots + \epsilon_{yk}^2 \quad (4.4)$$

$$J = \epsilon_y^T \epsilon_y \quad (4.5)$$

La variable J se refiere en la literatura como función de costo o función objetivo. Es una función escalar. Se puede sustituir ϵ_y en la anterior ecuación para reescribir J como:

$$J = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y} + \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} \quad (4.6)$$

Con el fin de minimizar J con respecto a $\hat{\mathbf{x}}$, se calcula la derivada parcial y el resultado se iguala a cero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= -\mathbf{y}^T \mathbf{H} - \mathbf{y}^T \mathbf{H} + 2\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \\ \frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= -2\mathbf{y}^T \mathbf{H} + 2\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Resolviendo esta ecuación para $\hat{\mathbf{x}}$ resulta en:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{H} = \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{y} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} \quad (4.9)$$

Es decir:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (4.10)$$

Donde $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$, es la pseudoinversa de \mathbf{H} , la cual ocurre si $k \geq n$ y \mathbf{H} es de rango completo. Esto significa que el número de medidas k es mayor que el número de variables n que se trata de estimar y las medidas son linealmente independientes.

Para demostrar que se trata de un mínimo de J , se debe probar que la segunda derivada de J es semidefinida positiva. Es decir:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{2H}^T \mathbf{H} \quad (4.11)$$

Si \mathbf{H} es una matriz de orden $k \times n$ entonces se verifica que tanto \mathbf{HH}^T como $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ son matrices semidefinidas positivas.

Ejemplo: La idea es tratar de estimar la resistencia \mathbf{x} de un resistor no marcado con base a k medidas ruidosas de un multímetro. En este caso \mathbf{x} es un escalar de modo que las k medidas ruidosas estarán dadas como:

$$\begin{aligned} y_1 &= x + w_1 \\ &\vdots \\ y_k &= x + w_k \end{aligned}$$

Estas k ecuaciones se pueden combinar en una simple expresión vectorial como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{w}$$

La Ecuación (3.9) muestra que el estimado óptimo de la resistencia \mathbf{x} este dado como:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left([1 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} [1 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = k^{-1} = [y_1 \quad \dots \quad y_k]$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i$$

En este ejemplo simple, se puede observar que la estimación por mínimos cuadrados concuerda con nuestra intuición de calcular simplemente el promedio de las medidas.

Capítulo 5

Estimación recursiva por mínimos cuadrados

Se mostrará cómo calcular recursivamente el valor estimado de un vector constante por mínimos cuadrados ponderados. Supóngase que se tiene $\hat{\mathbf{x}}$ después de $k-1$ medidas y luego se obtiene una nueva medida \mathbf{y}_k .

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x} + \mathbf{w}_k$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (5.1)$$

Para esto, se calcula $\hat{\mathbf{x}}$ sobre la base del valor estimado anterior $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ y la nueva medida \mathbf{y}_k . \mathbf{K}_k es una matriz a ser determinada, llamada la matriz de ganancia del estimador. La cantidad $\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$, se denomina término corrector.

Antes de calcular el valor óptimo de la matriz de ganancia \mathbf{K}_k , se debe analizar el promedio del error de estimación del estimador recursivo lineal. El promedio del error estimado se puede calcular como:

$$\begin{aligned} E\{\epsilon_{x,k}\} &= E\{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_k\} \\ E\{\epsilon_{x,k}\} &= E\{\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})\} \\ E\{\epsilon_{x,k}\} &= E\{\epsilon_{x,k-1} - \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{x} + \mathbf{w}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})\} \\ E\{\epsilon_{x,k}\} &= E\{\epsilon_{x,k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{K}_k \mathbf{w}_k\} \\ E\{\epsilon_{x,k}\} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) E\{\epsilon_{x,k-1}\} - \mathbf{K}_k E\{\mathbf{w}_k\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Así, si $E\{\mathbf{w}_k\} = 0$ y $E\{\epsilon_{x,k-1}\} = 0$, entonces $E\{\epsilon_{x,k}\} = 0$. En otras palabras, si la medida ruidosa \mathbf{w}_k tiene promedio cero para todo k y el estimado inicial de \mathbf{x} se escoge igual al valor esperado de \mathbf{x} , es decir, $\hat{\mathbf{x}}_0 = E\{\mathbf{x}\}$, entonces el valor esperado de $\hat{\mathbf{x}}_k$ será igual a \mathbf{x} para todo k . Debido a esto, el estimador de la ecuación (5.1) se denomina estimador imparcial. Nótese que esta propiedad se mantiene independientemente del valor de la matriz de ganancia \mathbf{K}_k . Esta es una propiedad

deseable de un estimador porque dice que, en promedio, el estimado \mathbf{x} será igual al verdadero valor \mathbf{x} . Nótese además que, en concordancia con la Ecuación (5.2), el error del estimador está dado por:

$$\epsilon_{x,k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \epsilon_{x,k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{w}_k \quad (5.3)$$

Nótese que a partir del valor esperado de x en el instante k (5.3) aparece la covarianza del error de estimación.

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^\top \quad (5.4)$$

Donde \mathbf{R}_k es la covarianza de \mathbf{w}_k . Esta es la fórmula recursiva para la covarianza del error de estimación por mínimos cuadrados. Esto es consistente con la intuición en el sentido de que cuando el ruido de la medida aumenta (es decir, \mathbf{R}_k aumenta), la incertidumbre del valor estimado también aumenta (es decir, \mathbf{P}_k aumenta). Nótese que la matriz \mathbf{P}_k debe ser definida positiva puesto que es una matriz de covarianza y la forma de la ecuación (5.4) garantiza que \mathbf{P}_k sea definida positiva, asumiendo que \mathbf{P}_{k-1} y \mathbf{R}_k son definidas positivas.

Se define la función de costo J_k como:

$$J_k = \text{Tr}(\mathbf{P}_k) \quad (5.5)$$

Ahora se necesita encontrar el valor de \mathbf{K}_k que haga la función de costo en la ecuación (5.5) tan pequeña como sea posible. El promedio del error estimado es cero para cualquier valor de \mathbf{K}_k . Por lo tanto, si se escoge \mathbf{K}_k de modo que la función de costo (es decir, la traza de \mathbf{P}_k) sea pequeña, entonces el error de la estimación no solo tendrá promedio cero, también será consistentemente tan cerca a cero como sea posible.

Obteniendo así la ecuación de ganancia del estimador que más adelante se le llamará la ecuación que define la ganancia del filtro de Kalman:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (5.6)$$

Las ecuaciones (5.1), (5.4), y (5.6) forman la estimación recursiva por mínimos cuadrados, la cual se resumen en los algoritmos (1) y (2) el Algoritmo (1) toma de las ecuaciones (5.1), (5.4), y (5.6) para realizar la estimación, mientras que el algoritmo (2), utiliza otras formas alternativas matemáticamente idénticas que pueden ser beneficiosas desde el punto de vista computacional y que también pueden conducir a nuevos resultados:

Algoritmo (1)

Inicialización:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E\{\mathbf{x}\}$$

$$\mathbf{P}_0 = E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)^T\}$$

Si no hay conocimiento disponible de \mathbf{x} antes de que las medidas sean tomadas, entonces $\mathbf{P}_0 = \infty \mathbf{I}$.

Si hay conocimiento absoluto de \mathbf{x} antes de que las medidas sean tomadas, entonces $\mathbf{P}_0 = 0$.

Cómputo:

1. Obtención del vector de medición \mathbf{y}_k

For $k=1$ to N do

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad \triangleright \mathbf{w}_k \sim NID(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$$

End

2. Actualización del valor estimado de \mathbf{x} y la covarianza del error de estimación \mathbf{P} .

For $k=1$ to N do

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T$$

End for

Algoritmo (2)

Ecuación de medida.

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \text{constante}$$

$$E\{\mathbf{w}_k\} = 0$$

$$E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T\} = \mathbf{R}_k \delta_{k-i}$$

Estimada inicial del vector constante \mathbf{x} , junto con su incertidumbre.

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E\{\mathbf{x}\}$$

$$\mathbf{P}_0 = E\{(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_0)^T\}$$

Para $k \in \{1, 2, \dots, \infty\}$, las ecuaciones de estimación por mínimos cuadrados son:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$$

$$= \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1})$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T$$

$$= (\mathbf{P}_{k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1}$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1}$$

Para la aplicación de los algoritmos se plantea el siguiente problema:

Supóngase que un tanque contiene una concentración x_1 del químico 1 y una concentración x_2 del químico 2. Se tiene una instrumentación que puede detectar la concentración combinada (x_1+x_2) de los dos químicos, pero la instrumentación no puede distinguir ninguno de los químicos por separado. Se elimina del tanque el químico 2 a través de un proceso de lixiviación de modo que su concentración decrece en un 1 por ciento por cada medida. La ecuación de medición está dada por:

$$y_k = x_1 + 0,99^{k-1}x_2 + w_k$$

$$y_k = [1 \quad 0,99^{k-1}]x + w_k$$

Donde w_k es el ruido de la medida, el cual es una variable aleatoria de media cero y varianza $R = 0.01$. Supóngase que $x_1 = 10$ y $x_2 = 5$. Además, supóngase que los estimados iniciales son $\hat{x}_1 = 8$ y $\hat{x}_2 = 7$, con una varianza del error de estimación $P_0 = I$.

El algoritmo se muestra a continuación:

```
function Chemical
clc
clear all
N= 60;
x = [10; 5];
xest = [8; 7];
P = eye (2); %matriz diagonal
R = 0.01;
xestArray = xest;
Pt(:, :, 1) = P;
for i = 1: N-1
H= [1 0.99(i - 1)];
y = H * x + sqrt(R) *randn;
K = P * H0 * 1/ (H * P * H' + R);
xest = xest + K * (y - H *xest);
P = P - K * H * P;
%Almacenar los datos en un arreglo (array).
xestArray = [xestArrayxest];
Pt(:, :, i + 1) = P;
end
%Graficar los resultados.
closeall; %borrar (cerrar) todas las figuras.
figure; %Abrir una nueva figura.
gridon; %Colocar la rejilla.
set (gcf,'Color', 'white'); %Establecer el color del fondo.
i = 0: N - 1; %Define el dominio de la gráfica.
```

```

subplot (2, 1, 1);
hold on;
grid on
plot (i, xestArray (1, :), 'r', 'Linewidth', 2);
plot (i, xestArray (2, :), 'b', 'Linewidth', 2);
set (gca,'FontSize', 14);
ylabel ('Estimados');
legend ('x '1,'x'2);
subplot (2, 1, 2);
hold on;
grid on
plot (i, squeeze (Pt (1, 1, :)), 'r-', 'Linewidth', 2);
plot (i, squeeze (Pt (2, 2, :)), 'b-', 'Linewidth', 2);
set (gca,'FontSize', 14);
ylabel ('Varianza');
legend ('P (1, 1)', 'P (2, 2)');
xlabel( 'Paso de tiempo' )
    
```

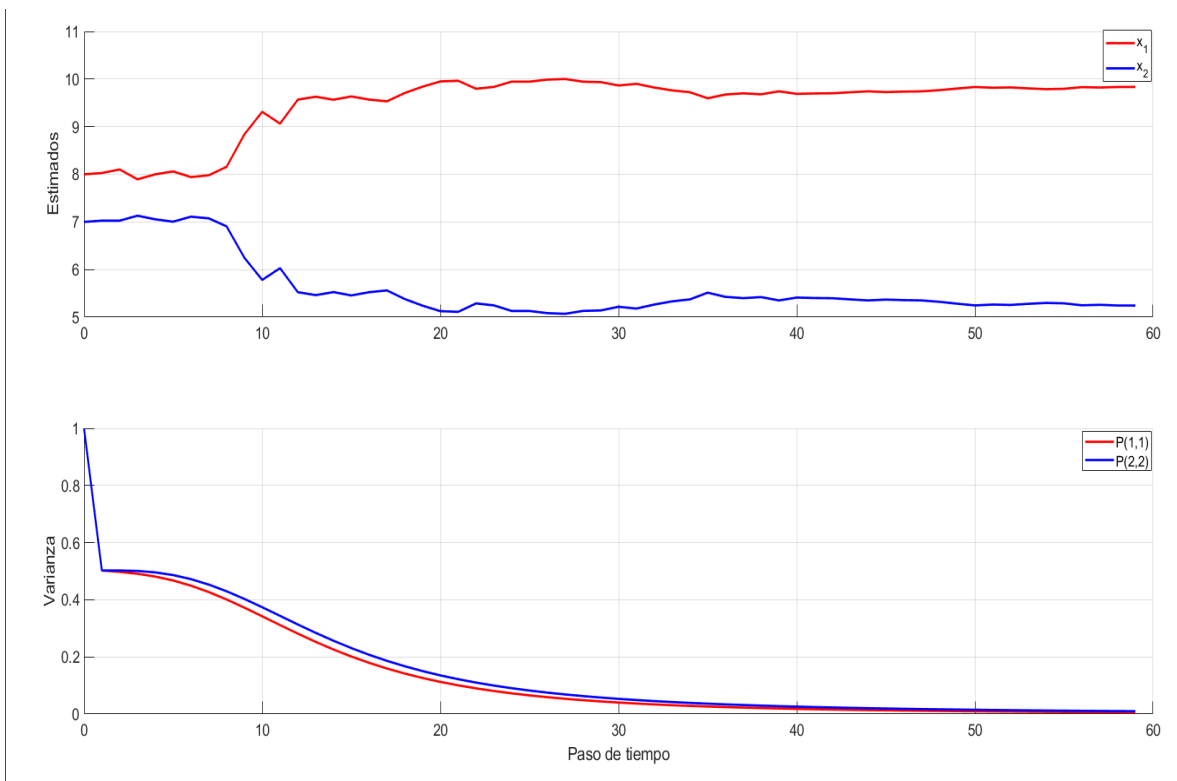


Figura 4. Problema del tanque.

Se puede observar que luego de un conjunto de medidas los estimados se van acercando a los valores 10 y 5. Las varianzas de los errores de estimación tienden asintóticamente a cero, lo cual significa que se ha incrementado el nivel de confianza de los estimados cuando se incrementa el número de medidas.

Capítulo 6

Filtro de Kalman discreto

Se comienza con la descripción matemática de un sistema dinámico cuyos estados evolucionan con el tiempo y luego se derivan las ecuaciones que rigen la propagación de la media y la covarianza de estado, esto es fundamental para el algoritmo que se desarrollará de estimación de estado (el filtro de Kalman).

6.1 Sistema discreto en el tiempo

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} \quad (6.1)$$

Donde \mathbf{u}_k es una entrada conocida y \mathbf{v}_k es ruido blanco gaussiano con promedio cero y covarianza \mathbf{Q}_k .

¿Cómo cambia con el tiempo la media del estado \mathbf{x}_k ?

Si se toma el valor medio en ambos lados de la Ecuación (6.1) se obtiene:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \mathbf{E}\{\mathbf{x}_k\} = \mathbf{F}_{k-1}\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} \quad (6.2)$$

¿Cómo cambia con el tiempo la covarianza de \mathbf{x}_k ? se pueden usar las ecuaciones (6.1) y (6.2) para obtener:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^\top = \\ & = (\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_k)^\top \\ & = (\mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1})(\mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1})^\top \end{aligned}$$

Modelado y estimación de la señal AC para aplicación con filtro de Kalman

$$= \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})\mathbf{F}_{k-1}^\top + \mathbf{v}_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}^\top + \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}^\top + (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}^\top \mathbf{F}_{k-1}^\top \quad (6.3)$$

Por lo tanto, se obtiene la covarianza de \mathbf{x}_k como el valor esperado de la anterior expresión. Ya que $(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})$ no está correlacionada con \mathbf{v}_{k-1} , se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E\{(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^\top\} \\ &= \mathbf{F}_{k-1}E\{(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^\top\}\mathbf{F}_{k-1}^\top + E\{\mathbf{v}_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}^\top\} \\ &= \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^\top + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Esta es llamada la ecuación de Lyapunov de tiempo discreto o ecuación de Stein. Se verá más adelante que la Ecuación (6.4) es fundamental en la deducción del filtro de Kalman.

Para seguir entendiendo los sistemas lineales discretos en el tiempo, se propone un ejemplo en el cual se aplica las ecuaciones anteriores y describe cómo cambia con el tiempo la media y la covarianza de una población por medio de un programa desarrollado en Matlab.

Sistema predador-presa, un sistema lineal describe la población de un predador x_1 y la de su presa x_2 los cuales pueden ser expresados como:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} - 0,8x_{1,k} + 0,4x_{2,k} + v_{1,k} \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} - 0,4x_{1,k} + u_k + v_{2,k} \end{aligned} \quad (6.5)$$

En la primera ecuación, se puede ver que la población del predador se reduce a causa de su superpoblación, pero la población de la presa hace que la población del predador se incremente. En la segunda ecuación, se ve que la población de la presa decrece debido a la población del predador y se incrementa debido a un suministro externo de alimento u_k . Las poblaciones también están sujetas a perturbaciones aleatorias (con sus respectivas varianzas 2 y 1) debido a factores ambientales. Este sistema se puede escribir en forma de variables de estado como:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 \\ -0,4 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + v_k$$

$$v_k \sim (0, Q)$$

$$Q = \text{diag}(1, 2)$$

Sistema presa-predador

```

Q= [1 0;0 2]; %Q=diag. (1,2) matriz real.
u=1; %u es la entrada conocida del sistema.
F= [0.2 0.4; -0.4 1]; %Matriz real que describe la población de un predador x1 y
su presa x2.
P= [10 0;0 10]; %condición inicial.
xmedia= [5 20]'; %condición inicial.
xmedA=xmedia;
G= [0;1]; %dada por el sistema.
N=25; %pasos de tiempo.
Pt(:,:,1) = P
for i=1: N-1
w=F*xmedia+G*u;%describe cómo cambia con el tiempo la media de la
población.
P = F*P*F'+Q; %describe cómo cambia con el tiempo la covarianza de la
población. xmedia=F*xmedia+G*u; %muestra el valor medio.
xmedA= [xmedAxmedia];
Pt(:,:,i+1) = P;
disp(P)
disp(xmedia)
end
title ('ejemplo presa predador')
grid on
set(gcf,'Color','white'); %Establecer el color del fondo.
i=0: N-1; %Define el dominio de la gráfica.
subplot (2,1,1);
hold on;
grid on
subplot (2,1,1);
hold on;
plot (i, xmedA (1, :),'r', 'LineWidth',2);
plot (i, xmedA (2, :),'b', 'LineWidth',2);
set(gca,'FontSize',10);
ylabel ('población media');
xlabel ('pasos de tiempo');
legend ('x '1','x'2);
subplot (2,1,2);
hold on;
grid on
plot (i, squeeze (PA (1,1, :)), 'r-', 'Linewidth', 2);
plot (i, squeeze (PA (1,2, :)), 'g-', 'Linewidth', 2);
plot (i, squeeze (PA (2,2, :)), 'b-', 'Linewidth', 2);
set(gca,'FontSize',10); ylabel('Varianza');
legend ('P (1,1)', 'P (1,2)', 'P (2,2)');
xlabel('Pasos de tiempo');

```

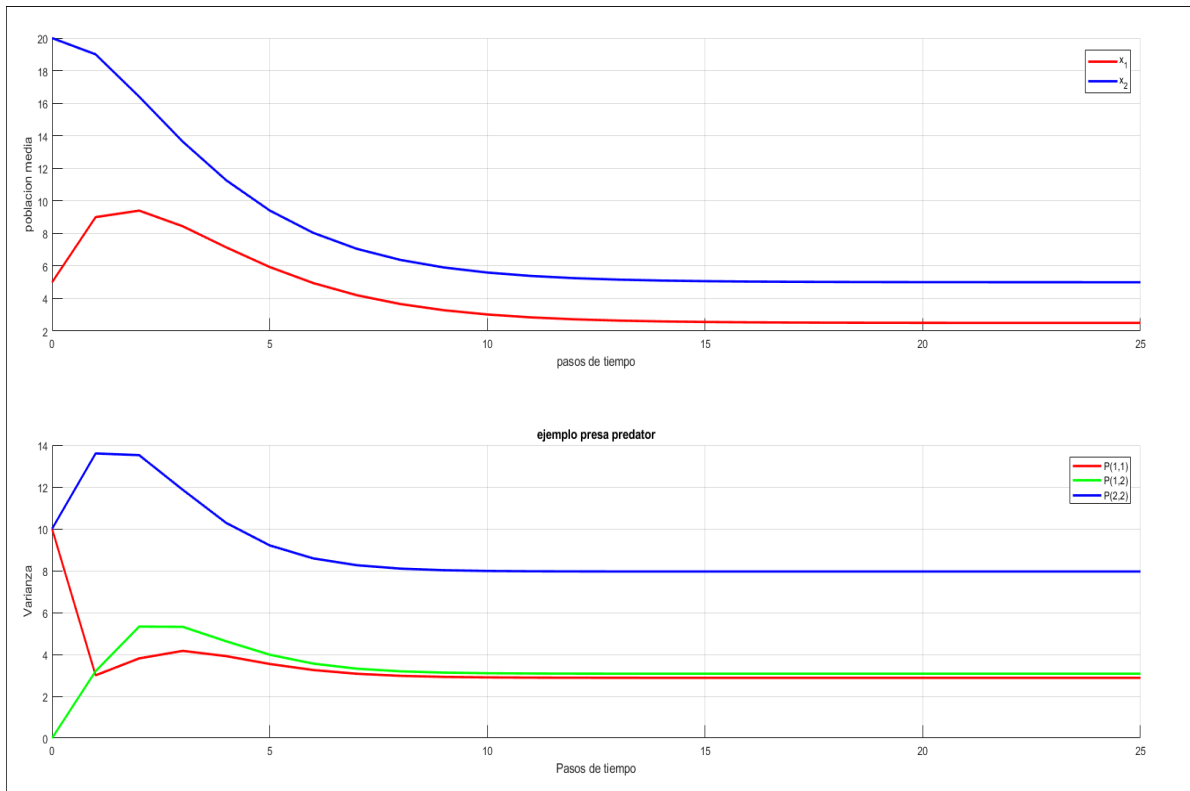


Figura 5. Problema sistema predador-presa.

El programa nos muestra que la media y la covarianza finalmente alcanzan valores de estado estacionario dados por:

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2,88 & 3,08 \\ 3,08 & 7,96 \end{bmatrix}$$

Capítulo 7

Deducción y aplicación del filtro de Kalman

Como se verá más adelante el filtro de Kalman funciona mediante la propagación en el tiempo de la media y la covarianza de los estados. El enfoque para derivar el filtro de Kalman incluirá los siguientes pasos:

- Se inicia con una descripción matemática de un sistema dinámico cuyos estados se quieren estimar.
- Se implementan las ecuaciones que describen la forma como se propagan en el tiempo la media y la covarianza de los estados.
- Se toma el sistema dinámico que describe la propagación en el tiempo de la media y la covarianza y se implementan estas ecuaciones en un computador.
- Cada vez que se tiene una medida, se actualiza la media y la covarianza de los estados.

Supóngase que se tiene un sistema lineal discreto en el tiempo dado:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (7.1)$$

El proceso y la medida tienen ruidos $\{\mathbf{v}_k\}$ y $\{\mathbf{w}_k\}$ los cuales son blancos, con media cero, no correlacionados y además, tienen matrices de covarianza conocidas \mathbf{Q}_k y \mathbf{R}_k , respectivamente:

$$v_k \sim (0, \mathbf{Q}_k)$$

$$w_k \sim (0, \mathbf{R}_k)$$

$$E\{\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^T\} = \mathbf{Q}_k\delta_{k-j}$$

$$E\{\mathbf{w}_k\mathbf{w}_j^T\} = \mathbf{R}_k\delta_{k-j}$$

$$E\{\mathbf{v}_k\mathbf{w}_j^T\} = E\{\mathbf{w}_k\mathbf{v}_j^T\} = 0 \quad (7.2)$$

Donde δ_{k-j} es la función delta de Kronecker. La meta es estimar el estado \mathbf{x}_k con base al conocimiento de la dinámica del sistema y la disponibilidad de las mediciones ruidosas $\{\mathbf{y}_k\}$. La cantidad de información disponible para estimar el estado varía de acuerdo al problema particular que se trate de resolver. Si se tienen todas las medidas disponibles incluyendo el instante k , para uso en el estimado de \mathbf{x}_k , entonces se puede formar un estimado a posteriori, el cual se denota como $\hat{\mathbf{x}}_k^+$. El superíndice (+) significa que el estimado es a posteriori. Un modo de formar el estimado del estado a posteriori es calcular el valor esperado de \mathbf{x}_k condicionado a todas las medidas tomadas incluyendo la del instante k , es decir:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = E\{\mathbf{x}_k | y_1, y_2, y_3, \dots, y_k\} \quad (7.3)$$

La ecuación (7.3) hace referencia al estimado a posteriori.

Si se tienen todas las medidas anteriores pero sin incluir el instante k disponible, para uso en la obtención del estimado de \mathbf{x}_k , entonces se puede conformar un estimado a priori, el cual se denota como $\hat{\mathbf{x}}_k^-$. El superíndice (-) significa que el estimado es a priori. Un modo de formar el estimado del estado a priori es calcular el valor esperado de \mathbf{x}_k condicionado a todas las medidas tomadas antes pero no incluyendo la del instante k , es decir,

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = E\{\mathbf{x}_k | y_1, y_2, y_3, \dots, y_{k-1}\} \quad (7.4)$$

La ecuación (7.4) hace referencia al estimado a priori.

Es importante notar que $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ y $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ son ambos estimados de la misma cantidad, son estimados de \mathbf{x}_k . Sin embargo, $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ es el estimado de \mathbf{x}_k antes que la medida \mathbf{y}_k sea tenida en cuenta y $\hat{\mathbf{x}}_k^+$, es el estimado de \mathbf{x}_k después que la medida \mathbf{y}_k se ha tenido en cuenta.

Naturalmente, se espera que $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ sea un mejor estimado que $\hat{\mathbf{x}}_k^-$, debido a que se utiliza mayor información para calcular \mathbf{x}_k :

- $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ = estimado de \mathbf{x}_k antes que se procese la medida en el instante k .
- $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ = estimado de \mathbf{x}_k después que se procese la medida en el instante k .

Si se tienen medidas disponibles después del instante k para usar en el estimado de \mathbf{x}_k , entonces se puede formar un estimado suavizado. Una manera de formar el estimado de estado suavizado, es calcular el valor esperado de \mathbf{x}_k condicionando a que todas las medidas estén disponibles:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k+n} = E\{\mathbf{x}_k | y_1, y_2, y_3, \dots, y_{k+n}\} \quad (7.5)$$

La ecuación (7.5) hace referencia al estimado suavizado.

Donde n es algún entero positivo cuyo valor depende del problema específico que se desea resolver. Si se quiere encontrar la mejor predicción de \mathbf{x}_k con más de un paso de tiempo por delante de las medidas disponibles, entonces se puede formar una estimación predictiva. Una manera de formar el estado estimado predictivo es calcular el valor esperado de \mathbf{x}_k , condicionado a todas las mediciones que esten disponibles, es decir.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-m} = E\{\mathbf{x}_k | y_1, y_2, y_3, \dots, y_{k-m}\} \quad (7.6)$$

La ecuación (7.6) hace referencia al estimado predictivo.

Donde m es algún entero positivo cuyo valor depende del problema específico que se desea resolver. La relación entre los estimados de los estados suavizado, a posteriori, a priori y predictivo se muestra en la Figura (7.1).

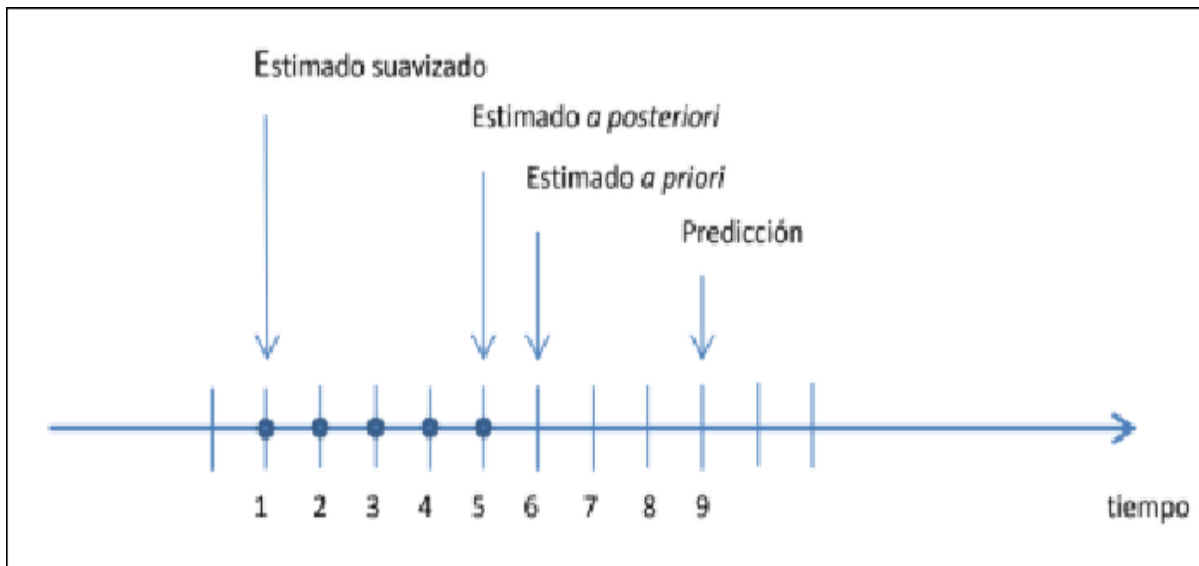


Figura 6. Línea temporal estimada.

Línea temporal que muestra la relación entre los estimados de estado suavizado, a posteriori, a priori y predictivo. En esta figura, se supone que se han recibido las medidas, en pasos de tiempo hasta $k=5$, inclusive. Una estimación del estado en $k < 5$ se denomina una estimación suavizada. Una estimación del estado en $k=5$ se denomina una estimación a posteriori. Una estimación del estado en $k=6$ se llama la estimación a priori. Una estimación del estado en $k > 6$ se llama predicción.

En la notación que sigue, se utiliza $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ para denotar el estimado inicial de \mathbf{x}_0 antes de que sea disponible cualquier medida. La primera medida se toma en el instante $k=1$. Puesto que no se tiene ninguna medida disponible para estimar \mathbf{x}_0 , es razonable tomar $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ como el valor esperado del estado inicial \mathbf{x}_0 :

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E\{\mathbf{x}_0\} \quad (7.7)$$

Se utiliza el término \mathbf{P}_k para denotar la covarianza del error de estimación. \mathbf{P}_k^- denota la covarianza del error de estimación de $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ y \mathbf{P}_k^+ la covarianza del error de estimación de $\hat{\mathbf{x}}_k^+$:

$$\mathbf{P}_k^- = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^\top\}$$

$$\mathbf{P}_k^+ = E\{(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+)^\top\} \quad (7.8)$$

Estas relaciones se explican en la Figura (7.2):

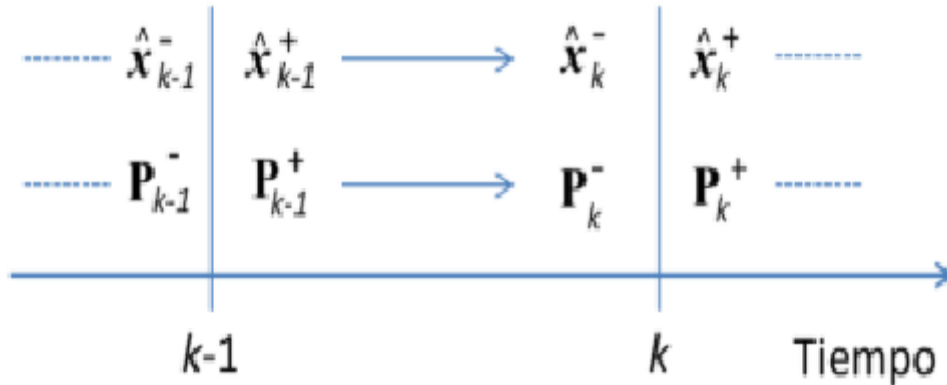


Figura 7. Línea de tiempo.

En la figura (7.2): Línea de tiempo que muestra los valores estimados de los estados y la covarianza del error de estimación a priori y a posteriori, respectivamente.

La figura muestra que una vez hecha la medida en el instante $(k-1)$ se obtiene un estimado de \mathbf{x}_{k-1} (definido como $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$) y la covarianza del error de estimación (definida como \mathbf{P}_{k-1}^+). Cuando llega el instante k , antes de que se procesen las medidas en ese instante, se calcula un estimado de \mathbf{x}_k (denotado como $\hat{\mathbf{x}}_k^-$) y la covarianza del error de estimación (denotada como \mathbf{P}_k^-). Entonces se procesa

la medida en el instante k para refinar el estimado de \mathbf{x}_k . El valor estimado resultante de \mathbf{x}_k se denota como $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ y su covarianza como \mathbf{P}_k^+ . Se comienza el proceso de estimación $\hat{\mathbf{x}}_0^+$, el mejor estimado del estado inicial \mathbf{x}_0 . Dado por $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ ¿cómo se podrá calcular $\hat{\mathbf{x}}_1^-$? Para ello se establece $\hat{\mathbf{x}}_1^- = E\{\mathbf{x}_1\}$. Pero nótese que $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E\{\mathbf{x}_0\}$.

El razonamiento puede extenderse para obtener la siguiente ecuación más general:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} \quad (7.9)$$

Esta es llamada ecuación de actualización temporal para $\hat{\mathbf{x}}$. Desde el instante $(k-1)^+$ hasta el instante k , la estimación de estado se propaga de la misma manera que se propaga la media del estado. Esto tiene sentido intuitivamente. No se tiene ninguna medida adicional disponible para ayudar a actualizar la estimación de estado entre el instante $(k-1)^+$ y el instante k^- , así que se debe actualizar la estimación de estado con base al conocimiento de la dinámica del sistema.

Lo siguiente que se necesita es calcular la ecuación de actualización temporal de \mathbf{P} , la covarianza del error de estimación de estado. Se comienza con \mathbf{P}_0^+ la cual es la covarianza del error de estimación inicial de \mathbf{x}_0 . Si se conoce perfectamente el estado inicial, entonces $\mathbf{P}_0^+ = 0$. Si no se tiene idea en absoluto del valor de \mathbf{x}_0 , entonces $\mathbf{P}_0^+ \rightarrow \infty\mathbf{I}$. En general, \mathbf{P}_0^+ representa la incertidumbre en el estimado inicial de \mathbf{x}_0 :

$$\mathbf{P}_0^+ = E\{(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0)^T\}$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E\{(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T\} \quad (7.10)$$

Dado el valor inicial de la covarianza, \mathbf{P}_0^+ ¿cómo calcular el siguiente valor, \mathbf{P}_1^- ? de la ecuación (6.4) se puede recordar la forma como se propaga la covarianza del estado de un sistema lineal discreto en el tiempo: $\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$ de aquí, se obtiene:

$$\mathbf{P}_1^- = \mathbf{F}_0\mathbf{P}_0\mathbf{F}_0^T + \mathbf{Q}_0 \quad (7.11)$$

Esta es una ecuación específica, que muestra cómo obtener \mathbf{P}_1^- desde \mathbf{P}_0^+ . Este razonamiento se puede extender para obtener una ecuación más general, es decir:

Modelado y estimación de la señal AC para aplicación con filtro de Kalman

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}^\top + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (7.12)$$

Esta es llamada la ecuación de actualización temporal para \mathbf{P} .

Partiendo de la anterior gráfica, se obtienen las ecuaciones de actualización de la

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k)^{-1} = \mathbf{P}_k^+ \mathbf{H}_k^\top \mathbf{R}_k^{-1} \quad (7.13)$$

medida para \mathbf{x}_k , V y se escribe la ecuación de la ganancia del filtro de Kalman \mathbf{K}_k

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (7.14)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^\top$$

$$\mathbf{P}_k^+ = [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k^\top \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k]^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (7.15)$$

Estas son las ecuaciones de actualización de la medida para \mathbf{x}_k y \mathbf{P}_k . La matriz \mathbf{K}_k en las ecuaciones anteriores se denomina ganancia del filtro de Kalman.

Aquí se resume el filtro de Kalman de tiempo discreto combinando las ecuaciones anteriores en un algoritmo.

Algoritmo (3)

Inicialización:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = E\{\mathbf{x}_0\}$$

$$\mathbf{P}_0^+ = E\{(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^+)^T\}$$

Para $k \in \{1, 2, \dots, \infty\}$, las ecuaciones de predicción del filtro de Kalman son:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{u}_{k-1} = \textit{estado estimado a priori}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}^+\mathbf{F}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Las ecuaciones de actualización son:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} = \mathbf{P}_k^+ \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) = \textit{estado estimado a posteriori}$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T$$

$$\mathbf{P}_k^+ = [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k]^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$$

Observaciones:

- Un aspecto práctico importante del filtro de Kalman. Del Algoritmo (3), se puede notar que el cálculo de P_k^- , K_k y P_k^+ no dependen de las mediciones que se tengan de y_k , sino que dependen únicamente de los parámetros del sistema F_k , H_k , Q_k y R_k . Eso significa que se puede calcular la ganancia de Kalman K_k fuera de línea antes de que el sistema entre en operación y guardar los datos resultantes en la memoria. Luego, cuando llega el momento de operar el sistema en tiempo real, sólo las ecuaciones \hat{x}_k necesitan ser implementadas. Se puede ahorrar esfuerzo computacional de calcular K_k durante el funcionamiento en tiempo real pre-calculando la ganancia.

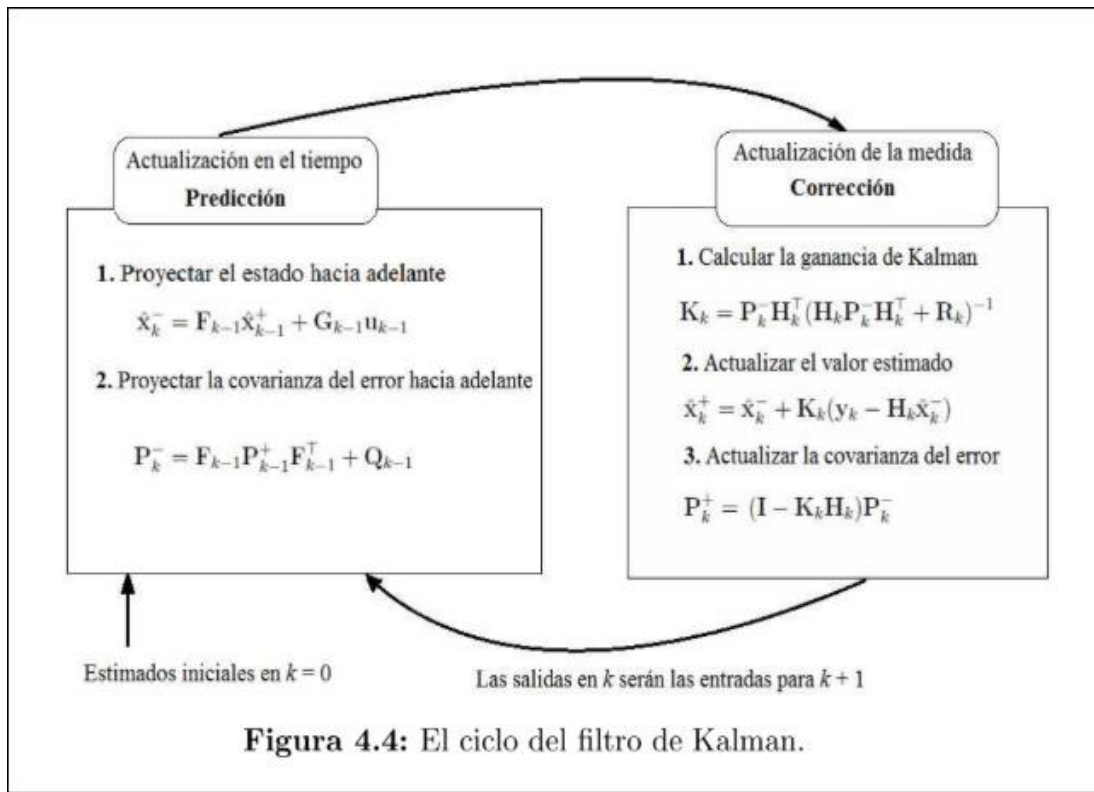


Figura 4.4: El ciclo del filtro de Kalman.

Figura 8. Ciclo del Algoritmo (3)

Desde este punto de vista, las ecuaciones que se utilizan para derivar el filtro de Kalman, se pueden dividir en dos grupos: las que actualizan el tiempo o ecuaciones de predicción y las que actualizan los datos observados o ecuaciones de actualización. Las del primer grupo son responsables de la proyección del estado en el instante k tomando como referencia el estado en el instante $k-1$ y de la actualización intermedia de la matriz de covarianza del estado. El segundo grupo de ecuaciones son responsables de la retroalimentación; es decir, incorporan nueva información dentro de la estimación anterior con lo cual se llega a una estimación mejorada del estado. Las ecuaciones que actualizan el tiempo pueden también ser pensadas como ecuaciones de pronóstico (predicción),

mientras que las ecuaciones que incorporan nueva información pueden considerarse cómo ecuaciones de corrección. Efectivamente, el algoritmo de estimación final puede definirse como un algoritmo de pronóstico corrección para resolver numerosos problemas. Así, el filtro de Kalman funciona por medio de un mecanismo de proyección y corrección al pronosticar el nuevo estado y su incertidumbre y corregir la proyección con la nueva medida. Este ciclo se muestra en la Figura (7.4) El primer paso consiste en generar un pronóstico del estado hacia adelante en el tiempo tomando en cuenta toda la información disponible en ese momento y en un segundo paso, se genera un pronóstico mejorado del estado, de tal manera que el error es minimizado estadísticamente.

7.1 Modelo de la señal

7.1.1 Modelo en el dominio del tiempo

La dinámica del modelo de la señal describe un mecanismo que permite observar cómo puede evolucionar el proceso. Por lo tanto, la etapa inicial en el diseño del filtro es el modelado de la señal y la obtención de sus ecuaciones en el espacio de estados. El modelo de una señal armónica no estacionaria y ruidosa se da como:

$$y(t) = s(t) + \eta(t) \quad (7.15)$$

Donde $s(t)$ es una señal armónica pura definida de la forma:

$$s(t) = A(t)\cos(\omega(t).t + \varphi(t)) \quad (7.16)$$

$A(t)$, $\omega(t)$ y $\varphi(t)$ son la amplitud, la frecuencia y la fase de la señal variables en el tiempo. También, $\eta(t)$ es un ruido estacionario de banda ancha (es decir, ruido blanco) con distribución gaussiana.

7.1.1 Modelamiento en el espacio de estados

Para construir un modelo de espacio de estados para $s(t)$, se considera $s(t)$ en un incremento de un paso en el tiempo como [1]:

$$s(t + 1) = A(t + 1)\cos[\omega(t + 1).(t + 1) + \varphi(t + 1)]$$

$$s(t + 1) = A(t + 1)[\cos(\omega(t + 1).t + \varphi(t + 1)).\cos(\omega(t + 1)) - \sin(\omega(t + 1).t + \varphi(t + 1)).\sin(\omega(t + 1))] \quad (7.17)$$

Por simplicidad, se considera que el tiempo t y la frecuencia $\omega(t)$ están normalizadas al período y a la frecuencia de muestreo, respectivamente. Se puede modelar la relación entre la amplitud de $s(t)$ y $s(t + 1)$ como:

$$A(t + 1) = \alpha(t)A(t) \quad (7.18)$$

donde $\alpha(t)$ es un coeficiente variable en tiempo real. Asumiendo que la frecuencia de la señal $\omega(t)$ no cambia mucho de una muestra a la siguiente, se puede escribir:

$$\omega(t + 1) \cong \omega(t) \quad (7.19)$$

Puesto que la fase de una señal armónica no cambia muy rápidamente, se puede asumir que

$$\varphi(t + 1) \cong \varphi(t) \quad (7.20)$$

Sustituyendo (7.18), (7.19) y (7.20) en (7.17) se llega a:

$$s(t + 1) = \alpha(t)A(t)[\cos(\omega(t).t + \varphi(t)).\cos(\omega(t)) - \sin(\omega(t).t + \varphi(t)).\sin(\omega(t))] \quad (7.21)$$

Definiendo

$$\begin{cases} x1(t) = A(t)\cos(\omega(t).t) \\ x2(t) = A(t)\sin(\omega(t).t) \\ x3(t) = \alpha(t) \\ x4(t) = \omega(t) \\ x5(t) = \varphi(t) \end{cases} \quad (7.22)$$

Se obtiene:

$$s(t) = x1(t)\cos x5(t) - x2(t)\sin x5(t) \quad (7.23)$$

Nótese que la anterior expresión con un avance de un paso en el tiempo quedará:

$$s(t + 1) = x1(t + 1)\cos x5(t) - x2(t + 1)\sin x5(t) \quad (7.24)$$

Por lo tanto, el modelo de espacio de estados de quinto orden de la señal medida $y(t) = s(t) + \eta(t)$ se puede escribir como:

$$\begin{cases} x1(t + 1) = x3(t)[x1(t)\cos x4(t) - x2(t)\sin x4(t)] \\ x2(t + 1) = x3(t)[x1(t)\sin x4(t) - x2(t)\cos x4(t)] \\ x3(t + 1) = x3(t) + u(t) \\ x4(t + 1) = x4(t) + v(t) \\ x5(t + 1) = x5(t) \end{cases} \quad (7.25)$$

$$y(t) = x1(t)\cos x5(t) - x2(t)\sin x5(t) + \eta(t) \quad (7.26)$$

$u(t), v(t)$ y $\eta(t)$ son ruidos blancos no correlacionados con media cero y varianzas q, p y r , respectivamente. Nótese que la variable de estado $x5(t)$ varía entre $-\pi$ y π . Dado el modelo de variables de estado (7.25) y (7.26), la técnica de EKF se puede aplicar directamente. Considerando un estimado del vector de estados de la señal medida y $(\tau), \tau = 0, 1, \dots, t$ como:

$$\hat{x}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}1(k) \\ \hat{x}2(k) \\ \hat{x}3(k) \\ \hat{x}4(k) \\ \hat{x}5(k) \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Las ecuaciones del rastreador de frecuencia EKF pueden escribirse como [2]:

$$\begin{cases} \hat{x}(k) = f(\hat{x}_{k-1}) + K(t)[y(t) - Hf(\hat{x}_{k-1})] \\ \hat{\omega}(t) = C\hat{x}_k \\ K(t) = P(t)H^\top (HP(t)H^\top + \gamma)^{-1} \\ P(t + 1) = F(t)[P(t) - K(t)HP(t)]F^\top(t) + I_{qp} \end{cases} \quad (7.28)$$

Donde:

$$f(\hat{x}_k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_3(k)[\hat{x}_1(k)\cos\hat{x}_4(k) - \hat{x}_2(k)\sin\hat{x}_4(k)] \\ \hat{x}_3(k)[\hat{x}_2(k)\cos\hat{x}_4(k) - \hat{x}_1(k)\sin\hat{x}_4(k)] \\ \hat{x}_3(k) \\ \hat{x}_4(k) \\ \hat{x}_5(k) \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

$$F(t) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} x = \hat{x}_{k-1}$$

$$H = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$C = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$I_{qp} = \text{diag}(0,0, q, p, 0)$$

En el conjunto de ecuaciones (7.28) $\mathbf{K}(t)$ y $\mathbf{P}(t)$ son las matrices de la ganancia de Kalman y del error de la covarianza, respectivamente. La cuarta ecuación en (7.288.14) corresponde a la ecuación de Riccati. Nótese que el rastreador EKF esta parametrizado en $\{q, p, r\}$ los cuales deben estar sintonizados. El diseñador debe sintonizar estos parámetros para obtener un adecuado desempeño del rastreador. Es interesante reducir el número de parámetros para simplificar el proceso. Se propone un algoritmo adaptativo para estimar valores opcionales de los parámetros y mejorar su desempeño.

7.2 Reducción del número de parámetros de sintonización

Se define el nuevo parámetro γ como:

$$\gamma = \frac{q}{p} \quad (7.30)$$

Donde \mathbf{q} y \mathbf{p} son las varianzas de los ruidos de la estimación en la ecuación (7.25) y permite definir la matriz I_γ como:

$$I_\gamma = \text{diag}(0,0,\gamma,1,0) \quad (7.31)$$

Se puede escribir

$$I_{qp} = pI_\gamma \quad (7.32)$$

Sustituyendo (7.32) en (7.28), la ecuación de Riccati quedará:

$$P(t+1) = F(t)[P(t) - K(t)HP(t)]F^\top(t) + pI_\gamma \quad (7.33)$$

Similarmente, definiendo la relación de γ y p como:

$$\lambda = \frac{\gamma}{p} \quad (7.34)$$

Donde γ es la varianza del ruido medido en (7.25). Entonces, las ecuaciones correspondientes de la ganancia de Kalman y de Riccati cambiarán a:

$$K(t) = P(t)H^\top (HP(t)H^\top + \lambda)^{-1} \quad (7.35)$$

$$P(t+1) = F(t)[P(t) - K(t)HP(t)]F^\top(t) + I_\gamma \quad (7.36)$$

Por lo tanto, el desempeño del rastreador depende de λ y γ y así, el problema de sintonizar tres parámetros de diseño q , p , γ se puede reducir a dos parámetros γ , λ . Con estos resultados, las ecuaciones (7.28) se pueden escribir como:

$$\begin{cases} \hat{x}(k) = f(\hat{x}_{k-1}) + K(t)[y(t) - Hf(\hat{x}_{k-1})] \\ \hat{\omega}(t) = C\hat{x}_k \\ K(t) = P(t)H^\top (HP(t)H^\top + \lambda)^{-1} \\ P(t+1) = F(t)[P(t) - K(t)HP(t)]F^\top(t) + I_\gamma \end{cases} \quad (7.37)$$

El rastreador (7.37) es una simplificación de (7.28) cuyos parámetros sintonizables son γ y λ .

7.3 Algoritmo aplicativo del modelo

A continuación, se muestra la simulación que cumple con el objetivo fundamental de este trabajo de grado que es modelado y estimación de la señal AC para aplicación con filtro de Kalman con dos algoritmos fundamentales el primero es la señal ruidosa generada que será tomada por el algoritmo dos para aplicar el filtro de Kalman y mostrar el seguimiento de los estados.

Algoritmo aplicativo 1

%creamos la función que tomará aplicación en el filtro de Kalman

```
function [w,phase,A,t] = ondaac(f,fs,N)
```

```
vt= (1: N+1) /fs.; %vector de tiempo
```

```
deltaf=0.25; %coeficiente para el cambio de frecuencia
```

```
deltaa=0.20; %coeficiente para el cambio de amplitud
```

```
b,a=fir1(100,0.005);%filtro pasa banda
```

```
ruid1 =deltaf*filter (b, a,randn (1, N+1)); %forma de onda ruidosa cambio de frecuencia con un filtro digital
```

```
b,a= fir1(30,0.01); %filtro pasa banda
```

```
ruid2 =deltaa*filter (b, a, randn(1, N+1)); %forma de onda ruidosa cambio de amplitud con un filtro digital
```

```
w=2*pi*(f*vt+ruid1); %argumento de la funciónsinoidal
```

```
phase = 2*pi*(1*rand (1)-1);
```

```
theta=w+phase;
```

```
x5=phase;
```

```
A=1+ruid2(1: N+1);
```

```
X1= A.*cos (w (1: N+1));
```

```
X2= A.*sin (w (1: N+1));
```

```
seno = A.*sin (theta (1: N+1));
```

```
coseno = A.*cos (theta (1: N+1));
```

```
gruid = awgn(seno,10);
```

```
gruido = awgn(coseno,10);
```

```
S=X1. *cos(x5)-X2. *sin(x5);
```

```
y=gruido+gruid+S;
```

```
figure;
```

```
plot (S,'r', 'LineWidth',2);
```

```
xlabel ('senalgenerada');
```

```
ylabel('amplitud');
```

```
figure;
```

```
plot (gruido,'r', 'LineWidth',2);
```

```
xlabel('ruido');
```

```
ylabel('amplitud');
```

```
figure;
```

```
plot(y,'r', 'LineWidth',2);
```

```
xlabel ('senal generada con ruido');
```

```
ylabel('amplitud');
end
```

y el [algoritmo aplicativo \(2\)](#) que sería el principal se muestra a continuación:

```
Algoritmo aplicativo 1
function senal
clc
clear all
f=45;
fs=800;
N=100;
w,phase,A,t=ondaac(f,fs,N);
Tau = 0.08; %muestreo de la señal medida
tf =2; %tiempo final de muestreo
dt = 0.005; %diferencial de tiempo
P =eye (5);
Q = [0.1;23;0.3;0.4;0.5];
H = [1 0 0 0 0];
C = [0 0 1 0 0];
p=10;
q=40;
r=10;
lambda = r/p;
gamma= q/p;
lgamma = [0 0 0 0 0;0 0 0 0 0;0 0 eta 0 0;0 0 0 1 0;0 0 0 0 0];
lqp=p*lgamma;
x= [8;8.7;20; f;phase];
xest=x;valor esperado de x
x1= A.*cos (w (1: N+1));
x2= A.*sin (w (1: N+1));
s=x1.*cos(phase)-x2.*sin(phase);
xArray = [];
xestArray = [];
tArray = [];
for t = 0:Tau:tf
xArray = [xArray x];
xestArray = [xestArrayxest];
tArray = [tArray t];
for tauu = dt:dt:Tau+dt/10
xt/t = [x (3). *(x (1). *cos (x (4))- x (2). *sin (x (4)));
x (3). *(x (1). *sin (x (4)) + x (2). *cos (x (4))); x (3); x (4); x (5)];
xt/t = xt/t + sqrt(Q). *randn (5,1);
x = x + xt/t * dt;
st/t=x (3). *(x (1). *cos (x (4))- x (2). *sin (x (4)));
```

```

Y=x (1). *cos (5)-x (2). *sin (5);
s3 = cos (xest (4));
s4 = sin (xest (4));
F= [xest (3) *s3 -xest (3) *s4 (xest(1) *s3-xest(2) *s4) -
xest(3) *s4*xest (1)-xest (2) *s3*xest (3) 0; xest (3) *s4
xest (3) *s3 (xest (2) *s3+xest (1) *s4) xest (3) *s4*xest (2)-
xest (1) *s3*xest (3) 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0;0 0 0 0 1];
xestt/t= [xest (3). *(xest (1). *cos (xest (4))-
xest (2). *sin (xest (4))); xest (3). *(xest (1). *sin (xest (4))
+ xest (2). *cos (xest (4))); xest (3); xest (4); xest (5)];
xest = xest + xestt/t * dt;
Pt/t = F * P + P * F' + sqrt(Q)*sqrt(Q');
P = P + Pt/t * dt;
end
z=1/ (H *P* H' + lambda);
K =P*H'*z;
xest = xest + K *(Y - H * xest);
P = F * (P - K * H * P) * F' + lgamma;
west= C * xestt/t;
end
close all
figure;
plot(s)
set(gca,'FontSize',18); set(gcf,'Color','White');
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Estado x');
legend ('Verdadera', 'Estimada');
figure;
plot (tArray, xArray(1, :), tArray,xestArray(1,:),'r')
set(gca,'FontSize',18); set(gcf,'Color','White');
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Estado x1');
legend ('Verdadera', 'Estimada');
figure;
plot (tArray, xArray(2, :), tArray,xestArray(2,:),'r')
set(gca,'FontSize',18); set(gcf,'Color','White');
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Estado x2');
legend ('Verdadera', 'Estimada');
figure;
plot (tArray, xArray(3, :), tArray,xestArray(3,:),'r:')
set(gca,'FontSize',18); set(gcf,'Color','White');
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Estado x3');
legend ('Verdadera', 'Estimada');
figure;
plot (tArray, xArray(4, :), tArray,xestArray(4,:),'r:')
set(gca,'FontSize',18); set(gcf,'Color','White');
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Estado x4');
legend ('Verdadera', 'Estimada');

```

```
figure;  
plot(tArray, xArray(5, :), tArray, xestArray(5,:), 'r:');  
set(gca, 'FontSize', 18); set(gcf, 'Color', 'White');  
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Estado x5');  
legend('Verdadera', 'Estimada');  
end
```

Se muestra gráficamente los resultados tanto para el algoritmo aplicativo (1) como para el algoritmo aplicativo (2) donde se observa el modelado y la estimación de la señal AC y la aplicación del filtro de Kalman en donde los estados estimados se aproximan a los verdaderos:

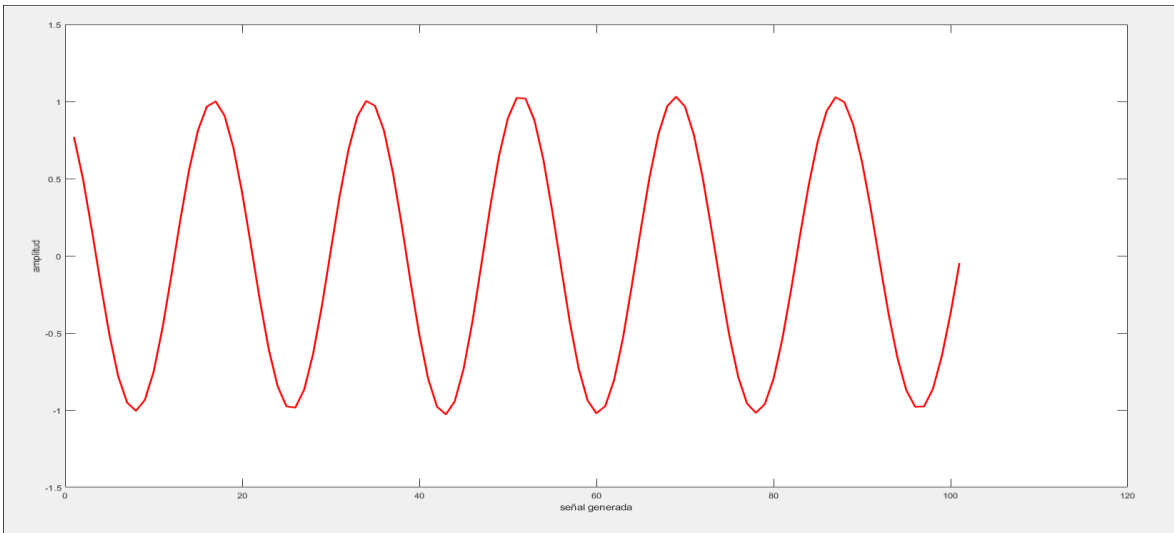


Figura 9. Señal generada.

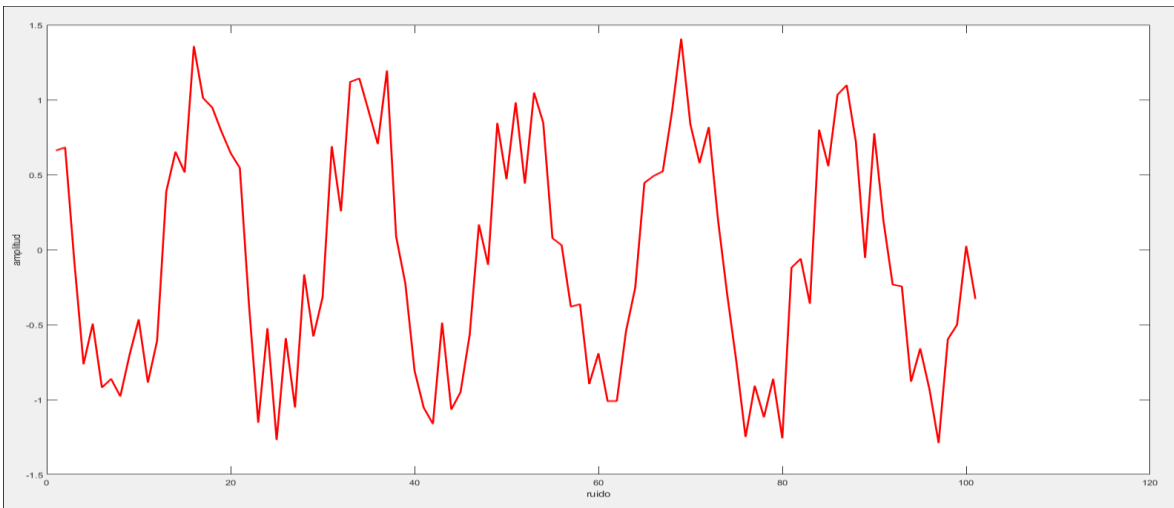


Figura 10. Ruido generado.

Modelado y estimación de la señal AC para aplicación con filtro de Kalman

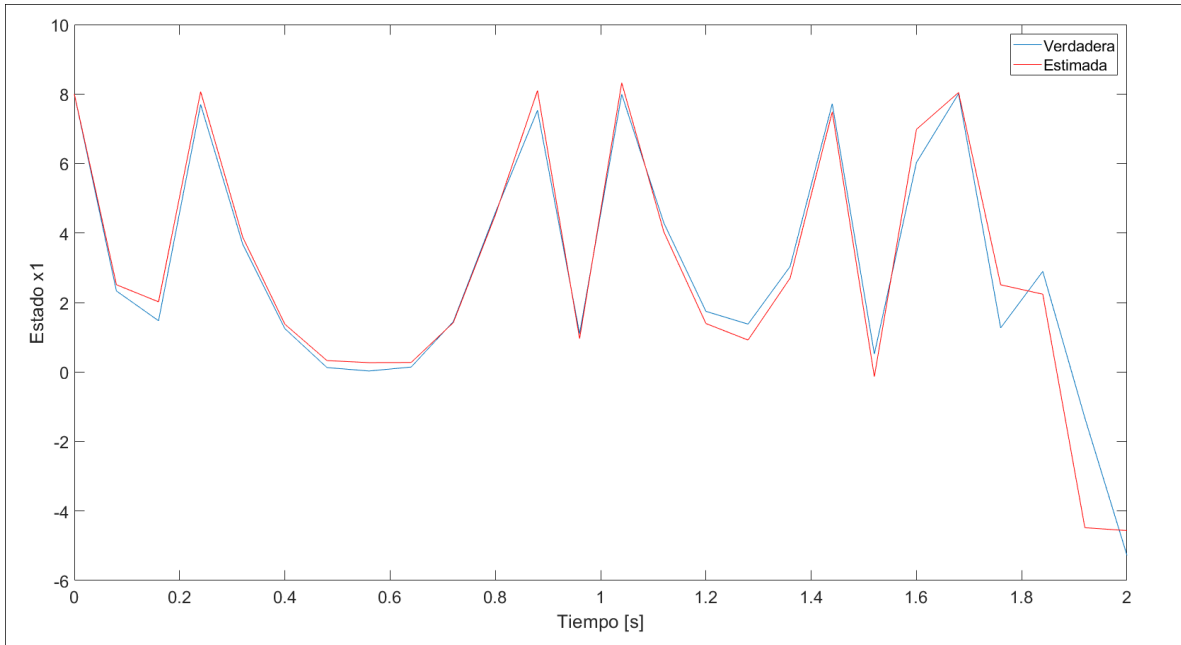


Figura 11. Estado $x_1(t)$.

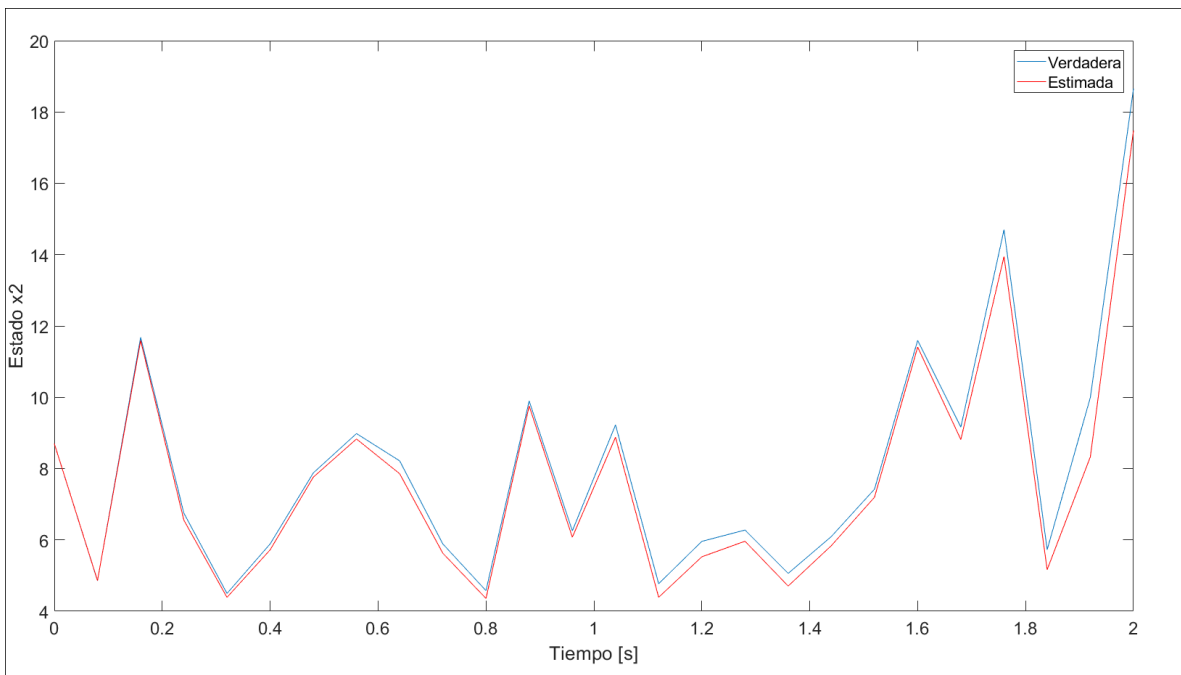


Figura 12. Estado $x_2(t)$.

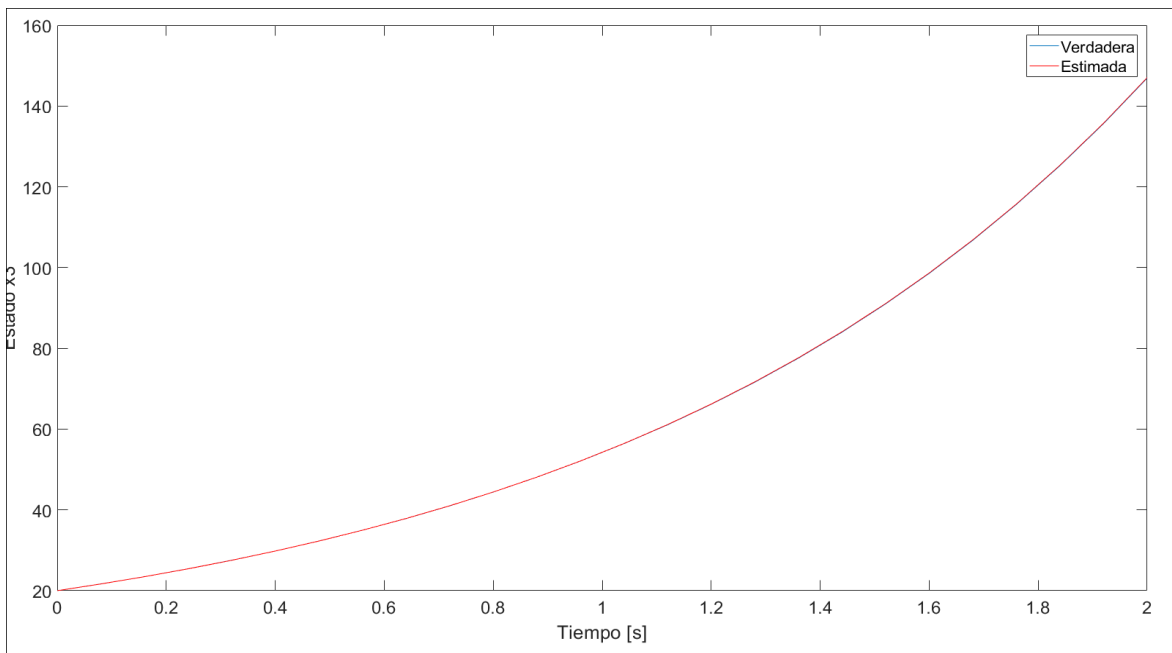


Figura 13. Estado $x_3(t)$.

Nótese que el valor estimado se aproxima al valor verdadero debido a la precisión del modelo

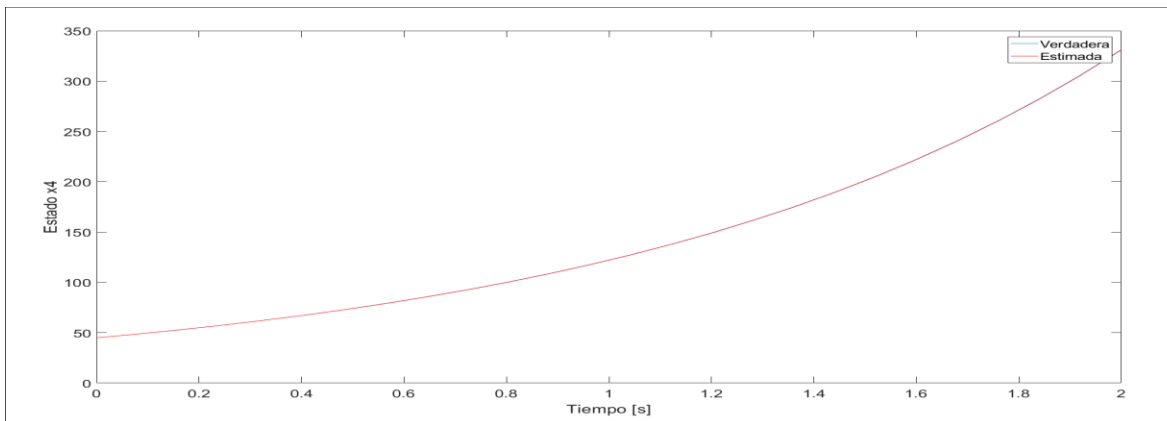


Figura 14. Estado $x_4(t)$.

Nótese que el valor estimado se aproxima al valor verdadero debido a la precisión del modelo

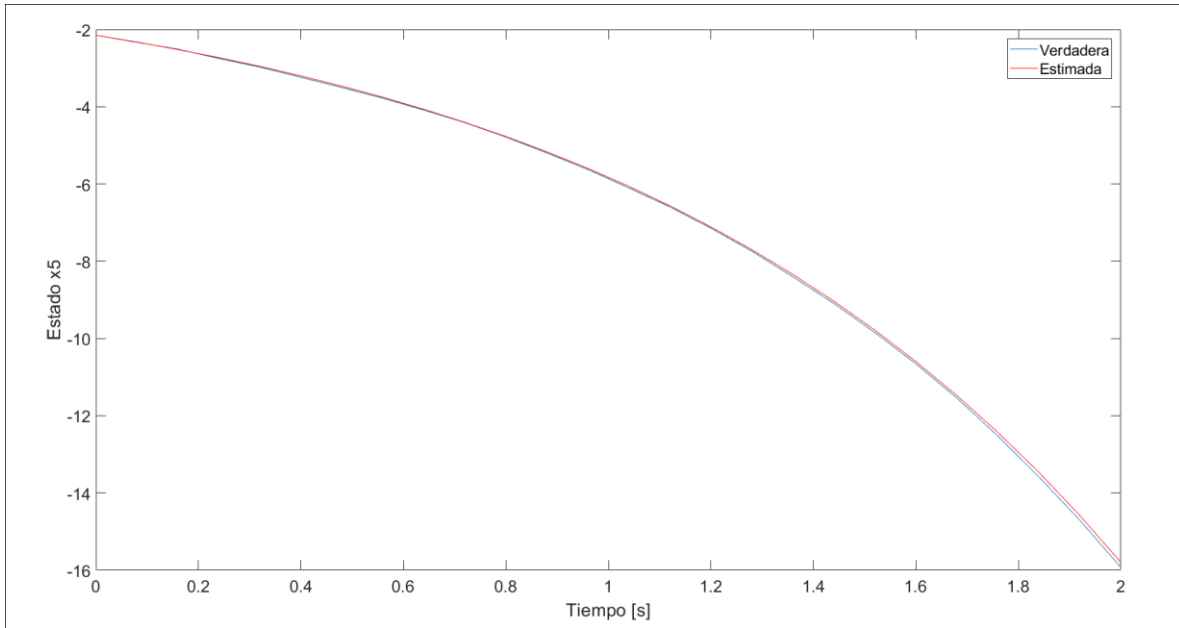


Figura 15. Estado $x_5(t)$.

Nótese que el valor estimado se aproxima al valor verdadero debido a la precisión del modelo

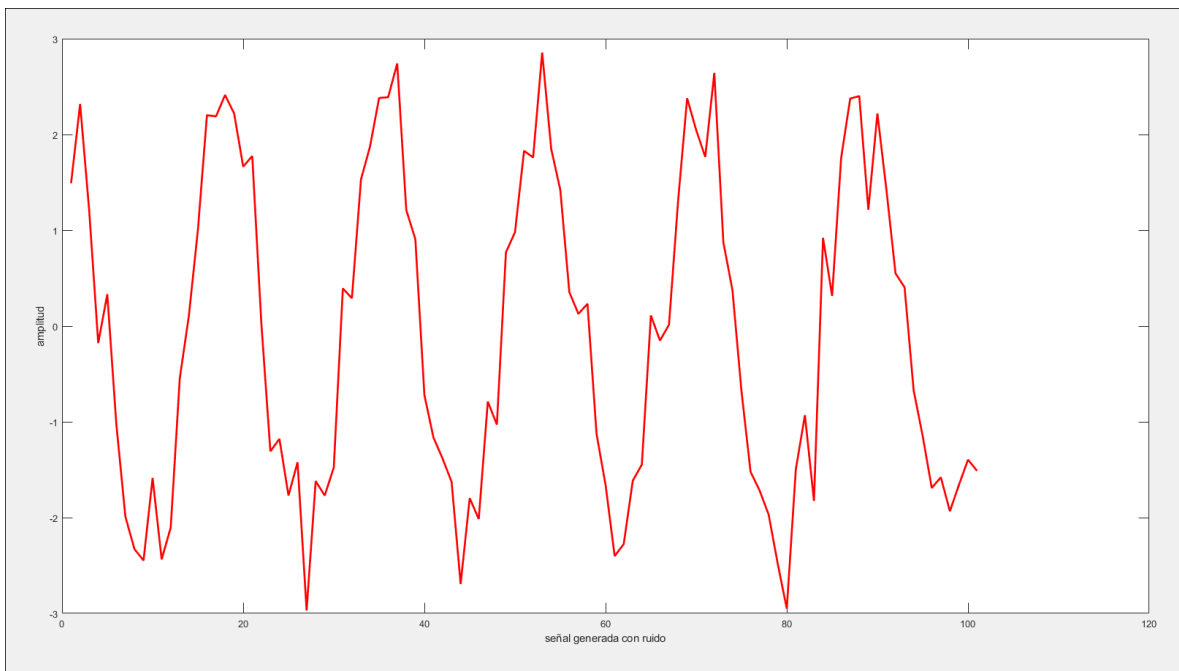


Figura 16. Señal generada con ruido.

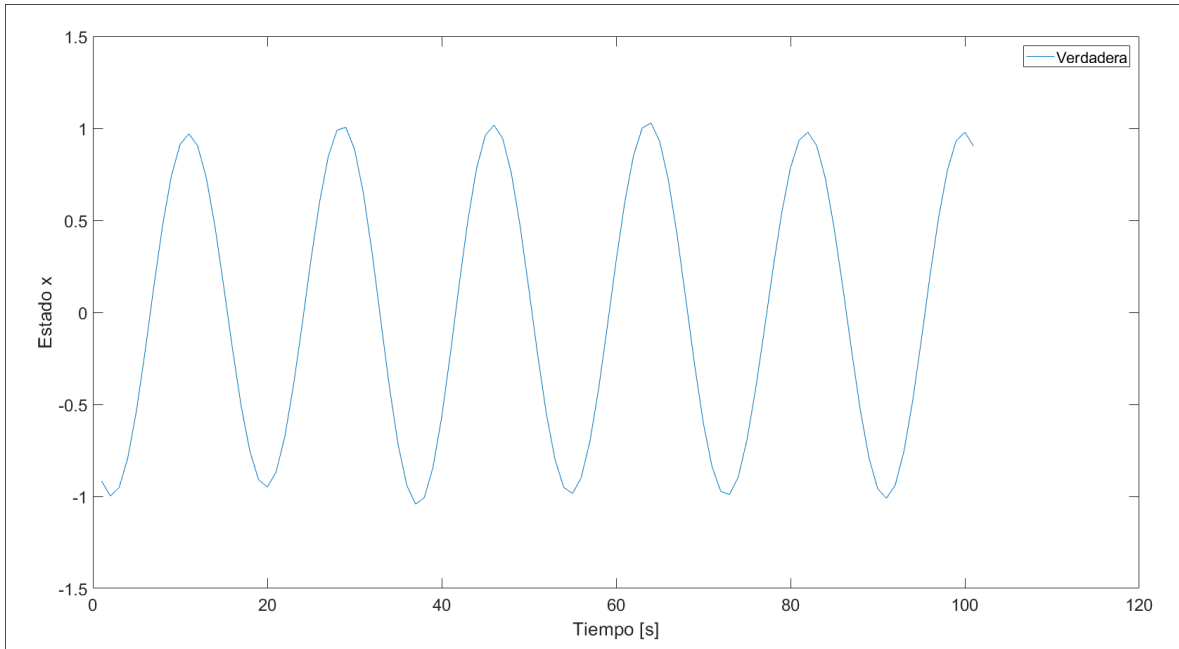


Figura 17. Señal sin ruido debido al filtro.

Nótese que la figura (16) muestra la señal AC con ruido, la cual contiene muchos armónicos y no se aprovecha el máximo de su energía mientras que en la figura (17) se observa lo contrario muestra la señal AC sin ruido con un solo armónico que contiene toda la energía que puede disipar.

Conclusiones

- El filtro de Kalman es en realidad una estimación recursiva de mínimos cuadrados de segundo orden.
- Un sistema dinámico describe la propagación en el tiempo de la media y la covarianza.
- Las ecuaciones del filtro de Kalman se pueden escribir de varias maneras diferentes, cada una de las cuales puede parecer muy diferente a las otras, aunque todas ellas son matemáticamente equivalentes.
- El filtro de Kalman es el estimador óptimo cuando el ruido es gaussiano y es el estimador lineal óptimo cuando el ruido no es gaussiano.
- El filtro de Kalman utiliza un concepto de predicción y corrección.

1. BIBLIOGRAFÍA

- [1] H. Hajimolahoseini, M. Reza-Taban, and H.Soltanian-Zade, Extended Kalman Filter frequency tracker for nonstationary harmonic signals, *Measurement*, vol. 45, no. 1, p. 126-132, January 2012.
- [2] S. Bittani and S. M. Saversi, On the parameterization and design of an extended Kalman filter frequency tracker, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 9, pp. 1718 - 1724, September 2000.
- [3] M. H. Costa and M. C. Tavares, Removing harmonic power line interference from biopotential signals in low cost acquisition systems, *Computers in Biology and Medicine*, vol. 39, no. 6, pp. 519 - 526, June 2009.
- [4] D. Zwillinger, *Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31st ed., Chapman Hall, Ed. New York, USA: CRC Press, 2003.
- [5] International Electrotechnical Commission (IEC), *Electromagnetic compatibility (EMC) Part 2-2: Environment - Compatibility levels for low- frequency conducted disturbances and signalling in public low-voltage power supply systems*, 2nded., 3, Rue de Varembe, PO Box 131, CH-1211, Geneva 20, Switzerland, March 2002.
- [6] *Electromagnetic compatibility (EMC) Part 4-7: Testing and measurement techniques General guide on harmonics and interharmonics measurements and instrumentation, for power supply systems and equipment connected thereto*, 2nd ed., 3, Rue de Varembe, PO Box 131, CH-1211, Geneva 20, Switzerland, March 2002.
- [7] DR. MSC Luis Enrique Avendaño y Gloria M. Valencia T., *Diseño de filtros óptimos*, Pereira, Colombia, 2018
- [8] KalmanFilter, <http://www.cae.wisc.edu/~ece539/project/presentation/gissel/Kalman.html> (December 16, 2003).
- [9] Nobel Prize Winners and Famous Hungarians, <http://www.hungary.org/~hipcat/sciencemathandtech2.htm> (December 16, 2003).
- [10] "Rudolf Emil Kalman," <http://icel.me.pusan.ac.kr/ResearchArea/kalman/sub/kalmanbiblio.htm> (December 16, 2003).
- [11] Tomasi, Wayne *Sistemas de Comunicaciones Electrónicas* Pearson Educación, México, 2003