TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Kaisa Käosaar

Portfelli optimiseerimine kahel meetodil

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: dotsent Peep Miidla

Tartu 2018

Portfelli optimiseerimine kahel meetodil

Bakalaureusetöö

Kaisa Käosaar

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös uuritakse aktivaportfelli optimiseerimist kahel meetodil. Üks optimiseerimismeetod põhineb Harry Markowitzi portfelliteoorial ja teine Kiyoharu Tagawa artiklis „Chebyshev Inequality based Approach to Chance Constrained Portfolio Optimization" [14] välja pakutud meetodil, kus püstitatakse tõenäosusega tõkestatud optimiseerimisülesanne. Töö esimeses osas antakse ülevaade Markowitzi meetodist ja teises osas kirjeldatakse tõenäosusega tõkestatud meetodit. Kolmandas osas võrreldakse meetodeid omavahel arvulise näite abil.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika

Märksõnad: optimiseerimine, portfelliteooria, investeeringuanalüüs

Portfolio Optimization Using Two Methods

Bachelor's thesis

Kaisa Käosaar

Abstract. This Bachelor's thesis describes two portfolio optimization methods. One optimization method is based on Harry Markowitz's modern portfolio theory and the other is based on Kiyoharu Tagawa's article „Chebyshev Inequality based Approach to Chance Constrained Portfolio Optimization" [14]. The first part of the thesis gives an overview of Markowitz optimization method, the second part describes the chance constrained optimization method and the third part offers a numerical experiment in order to make the two methods comparable to each other.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operations research, programming, actuarial mathematics

Key words: optimization, portfolio theory, investment analysis

Sisukord

Sissejuhatus

Portfelli optimiseerimine on olnud pikka aega finantsmatemaatika huvipakkuv valdkond. Harry Markowitzi võib pidada antud ala teerajajaks. 1952. aastal esitas ta sellekohase artikli „Portfolio Selection” [7], mis sai aluseks modernsele portfelliteooriale. Tema lähenemine portfelli optimiseerimisele pakkus huvi mitmetele teadlastele ning tänaseks on loodud erinevaid optimiseerimismeetodeid, mis põhinevad Markowitzi teoorial.

Portfelliks nimetatakse investori varade kogumikku, mille hulka kuuluvad näiteks aktsiad, võlakirjad ja optsioonid. Investorite eesmärgiks on endale sellise portfelli loomine, mis pakub võimalikult madala riski juures võimalikult kõrget tulu. Portfelli optimiseerimisteooriate eesmärgiks on anda investorile vahend, mille abil analüüsida portfelli oodatavat tulu ja riski. Selleks, et investeeringutega kaasnevaid riske hinnata ja portfelli edukalt hallata, on kasutusel erinevaid analüüsi meetodeid. Käesoleva töö eesmärk on tutvustada kahte portfelli optimiseerimismeetodit ja neid omavahel võrrelda.

Töö on jaotatud kolmeks osaks.

Esimeses osas kirjeldatakse Harry Markowitzi portfelliteoorial põhinevat optimiseerimismeetodit. Selle eesmärgiks on investori jaoks parima võimaliku portfelli leidmine arvestades tema riskitaluvust ja ootust investeeringu tulule.

Võrdluseks Markowitzi meetodile on võetud tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetod, mille pakkus välja Kiyoharu Tagawa artiklis „Chebyshev Inequality based Approach to Chance Constrained Portfolio Optimization” [14], mille kirjeldus on töö teises osas. See kasutab optimaalse portfelli leidmiseks metaheuristilist meetodit - diferentsiaalevolutsiooni.

Kolmas osa on empiiriline, kus numbrilise eksperimendi abil võrreldakse optimiseerimismeetodeid omavahel. Selleks rakendatakse Kiyoharu Tagawa artiklis kasutatud andmeid Markowitzi optimiseerimismeetodis. Programmid numbriliste eksperimentide läbiviimiseks on kirjutatud programmeerimiskeeles Python.

1 Markowitzi portfelliteooria

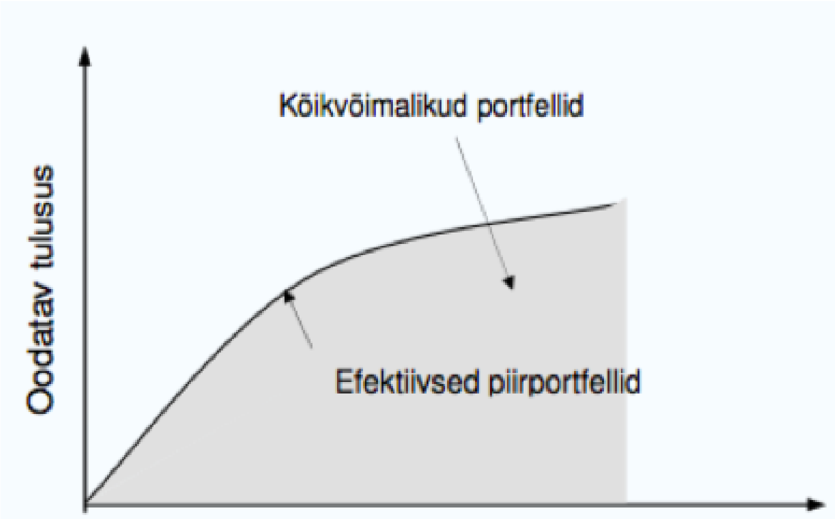
1.1 Portfelliteooria eeldused

Käesolevas peatükis antakse ülevaade Markowitzi teoorial põhinevast optimiseerimismeetodist, nn Markowitzi portfelliteooriast.

1952. aastal avaldati majandusteadlase Harry Markowitzi artikkel "Portfolio Selection" ajakirjas *Journal of Finance.* Markowitz esitas lähenemise aktivaportfellide optimaalseks koostamiseks, mis sai aluseks kaasaegsele portfelliteooriale [7]. Eesmärgiks on maksimeerida portfelli oodatavat tulu fikseeritud riskimäära juures või siis vastupidi minimeerida riski fikseeritud oodatava tulu suhtes. Teooria põhiidee on portfelli diversifitseerimine, et maandada riske [8]. Markowitzi teooria kohaselt tuleb hinnata üksikute aktivate mõju tervele portfellile, mitte valida varasid lähtudes nende individuaalsetest omadustest [2, lk 44]. Sellest tulenevalt on eesmärgiks hoida kogu portfelli kollektiivne risk madal, mitte hinnata vaid üksikute varade riski [8]. Markowitzi teooria põhineb järgmistel eeldustel [5, lk 7]:

- väärpaberiturg on efektiivne; see tähendab, et turg reageerib uuele infole koheselt, mistõttu ei õnnestu sama riskitaseme puhul ühel investoril teenida rohkem kui teisel;
- riski suurus määratakse oodatava tulu varieeruvuse põhjal;
- investeerimisotsuse tegemisel lähtutakse vaid oodatavast tulust ja riskist;
- investorid eelistavad fikseeritud riskitasemel kõrgema oodatava tulususega portfelli ning fikseeritud tulususe korral madalama riskitasemega portfelli.

Neid eeldusi arvesse võttes valib investor üksnes efektiivsete piirportfellide seast sobiva portfelli lähtuvalt oma riskitaluvusest. *Efektiivseks piirportfelliks* nimetatakse portfelli, millest sama riskitasemega portfellide hulgast ei paku ükski teine kõrgemat oodatavat tulu. Investoreid saab riskisse suhtumise alusel jaotada kolmeks: riskikartlikud, riskineutraalsed ja riskialtid investorid [11, lk 50]. Kõik efektiivsed piirportfellid asuvad efektiivsuspiiril (*efficient frontier*). Kõverast ülalpool ei ole võimalik antud oodatava tulususe ja riski juures portfelli luua ning allpool asuvad portfellid ei ole efektiivsed. Joonisel 1 on näidatud kõikvõimalikud portfellid ja efektiivsed piirportfellid.



Joonis 1: Markowitzi efektiivsed piirportfellid [15, lk 6]

1.2 Portfelli tulusus ja risk

Selleks, et mõista portfelliteooria olemust, tuleb defineerida kaks mõistet - tulusus ja risk. Tulususe all mõeldakse investeeringute oodatavat tulumäära. Portfelli oodatava tulumäära leidmiseks arvutatakse üksikute varade tulumäärade kaalutud keskmine. Kaaludeks võetakse vastavalt iga vara osakaal antud portfellis. [11, lk 50-51]

Portfelli tulususe arvutamiseks kasutatakse järgmist valemit:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i E(R_i), \tag{1}$$

kus

$E(R_p) -$ portfelli oodatav tulumäär;

$\omega_i -$ i-nda aktiva osatähtsus portfellis,

$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_m = 1;$

$E(R_i) -$ i-nda aktiva oodatav tulumäär, mis reeglina leitakse ajalooliste andmete põhjal;

$m -$ aktivate arv portfellis.

Teine oluline mõiste on risk. Tavapäraselt seostub terminiga „risk” pigem negatiivne nähtus, kuid finantsteoorias mõistetakse selle all enamasti võimalike tulemuste hajuvust oodatava tulemuse suhtes. Kui tulemus on oodatavast parem, ei tähenda see, et tehinguga ei kaasne riski. Harry Markowitz oli esimene, kes võttis väärtpaberi riskimõõduna kasutusele standardhälbe σ. [1, lk 131]

Olgu X juhuslik suurus. Selle suuruse dispersiooniks nimetatakse arvu $DX = E(X - E(X))^2$ ja standardhälbeks arvu $\sigma = \sqrt{DX}$.

Standardhälve iseloomustab tulususe kui juhusliku suuruse volatiilsust ehk näitab kui palju varieerub tulusus aktiva keskmisest tulususest. Mida suurem on tulususe varieeruvus, seda suurem on antud varaga kaasnev risk [11, lk 31-32]. Oluline on silmas pidada, et portfelli koguriski arvutamine on keerulisem kui aktiva riski hindamine. Lisaks riskimäära leidmisele on vaja arvestada ka aktivate omavahelisi seoseid [2, lk 44]. Väärpaberitega seostuvad põhiliselt kaks riski: süstemaatiline ehk tururisk ja mittesüstemaatiline ehk spetsiifiline risk. Süstemaatilist riski ei ole võimalik hajutada. See tuleneb üldistest muutustest makromajanduses, mille tõttu väärtpaberi tegelik tulusus erineb oodatavast tulususest [4]. Mittesüstemaatilist riski on võimalik vähendada portfelli hajutamise abil. Üks võimalus portfelli riski hajutamiseks on valida portfelli erinevate sektorite ettevõtete aktsiaid [10, lk 236].

Lihtsuse mõttes koosnegu portfell kahest aktivast. Siis kirjeldab riski hinnangu arvutamist järgmine arutluskäik [2, lk 53-54]:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= E(R_p - E(R_p))^2 = E[\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 - (\omega_1 E(R_1) + \omega_2 E(R_2)]^2 = \\ &= E[\omega_1(R_1 - E(R_1) + \omega_2(R_2 - E(R_2)]^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Siin R_p on juhuslik suurus, mis tähistab kogu portfelli tulumäära. Kasutades summa ruudu valemit, saab valem (2) kuju:

$$\sigma_p^2 = E[\omega_1^2(R_1 - E(R_1))^2 + 2\omega_1\omega_2(R_i - E(R_1))(R_2 - E(R_2) + \omega_2^2(R_{2j} - E(R_2))^2]. \tag{3}$$

Kehtivad järgmised keskväärtuse omadused:

$E(R_1 + R_2) = E(R_1) + E(R_2),$

$E(c(R_i)) = c \cdot E(R_i),$

kus

c – konstant;

R_i – i-nda aktiva tulumäär.

Neid omadusi rakendades saab valemi (3) kirjutada kujul:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \omega_1^2 E[(R_1 - E(R_1))^2] + 2\omega_1\omega_2 E[(R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2))] + \\
&+ \omega_2^2 E[(R_2 - E(R_2))^2] = \\
&= \omega_1^2\sigma_1^2 + 2\omega_1\omega_2 E[(R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2))] + \omega_2^2\sigma_2^2. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Suurust $E[(R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2))]$ nimetatakse *kovariatsiooniks*. Tähistame selle sümboliga σ_{12}, kusjuures $\sigma_i^2 = \sigma_{ii}$.
Asendades valemis (4) $E[(R_1 - E(R_1))(R_2 - E(R_2))]$ sümboliga σ_{12} saame:

$$\sigma_p^2 = \omega_1\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12}.$$

Kovariatsiooni abil on võimalik näha aktivate vahelise seose suunda; selleks, et hinnata selle tugevust, on vajalik leida ka korrelatsioonikordaja:

$$corr_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Kui korrelatsioonikordaja $corr_{12} = -1$ on tegemist perfektse negatiivse korrelatsiooniga ja kui $corr_{12} = 1$ näitab see perfektset positiivset korrelatsiooni. Kui $corr_{12} = 0$, siis puudub kahe aktiva vahel korrelatsioon.

Üldvalem m aktivast koosneva portfelli oodatava tulumäära standardhälbe arvutamiseks on seega [2, lk 57]:

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{m}(\omega_j^2\sigma_j^2) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m}(\omega_j\omega_k\sigma_{jk}). \qquad (5)$$

1.3 Markowitzi optimiseerimisülesanne

Harry Markowitz pakkus välja efektiivse portfelli leidmise meetodi, mis lähtub portfelli oodatavast tulumäärast ja tulumäära standardhälbest (*mean-variance optimization*). Leidmaks efektiivsed portfellid, tuleb lahendada optimiseerimisülesanne. Selleks fikseeritakse oodatav tulusus ja leitakse portfell, mille risk on minimaalne.

Optimiseerimisülesanne on järgmine [3]:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i E(R_i) = E(R_p), \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 1, \tag{8}$$

$$0 \leq \omega_i \leq 1, \ i = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

kus

m – portfellis olevate aktivate arv;

ω_i – i-nda aktiva osakaal portfellis;

σ_{ij} – i-nda ja j-nda aktiva vaheline kovariatsioon;

$E(R_i)$ – i-nda aktiva oodatav tulumäär;

$E(R_p)$ – portfelli oodatav tulumäär.

Antud optimiseerimisülesande eesmärk on minimeerida portfelli riski fikseeritud oodatava tulu korral. Võrdus (7) määrab, et portfelli oodatav tulusus on võrdne suurusega $E(R_p)$, võrduse (8) kohaselt peab aktivate kaalude summa olema võrdne ühega. Võrratus (9) seab piirangu, et aktivate laenuks võtmine (*short selling*) ei ole lubatud [3]. Lühikeseks müümine on protsess, kus investor müüb aktsiaid, mille ta on enne müüki laenanud lootuses, et väärtpaberi hind langeb. Pärast hinnalangust saab investor väärtpaberi odavamalt tagasi osta ning omanikule tagastada.

1.4 Lagrange'i meetod

Markowitzi optimiseerimisülesande (6) saab lahendada kasutades Lagrange'i kordajate meetodit. Lagrange'i funktsioon on järgmine:

$$L = \frac{1}{2}\omega^T V\omega + \lambda_1(E(R_p) - \omega^T\mu) + \lambda_2(1 - \omega^T\mathbf{1}), \tag{10}$$

kus

λ_1, λ_2 – Lagrange'i kordajad;

$\mathbf{1}$ – n-mõõtmeline vektor $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T$;

μ – vaadeldava portfelli aktivate tulumäärade matemaatiliste ootuste vektor.

Võtame funktsioonist L osatuletised ω, λ_1 ja λ_2 järgi ja saame võrrandisüsteemi $m + 2$ parameetri $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m, \lambda_1, \lambda_2$ leidmiseks:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} = V\omega - \lambda_1\mu - \lambda_2\mathbf{1} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = E(R_p) - \omega^T\mu = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - \omega^T\mathbf{1} = 0. \tag{13}$$

Võrrandist (11) saame:

$$\omega = V^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2\mathbf{1}) = \lambda_1 V^{-1} + \lambda_2 V^{-1}\mathbf{1}. \tag{14}$$

Korrutame võrrandi (14) mõlemaid pooli suurusega μ^T:

$$\mu^T\omega = \lambda_1\mu^T V^{-1}\mu + \lambda_2\mu^T V^{-1}\mathbf{1} = E(R_p), \tag{15}$$

kus viimane võrdus kehtib võrrandi (12) tõttu.

Korrutades nüüd võrrandi (14) mõlemaid pooli suurusega $\mathbf{1}$:

$$\mathbf{1}\omega = \lambda_1\mathbf{1}^T V^{-1}\mu + \lambda_2\mathbf{1}^T V^{-1}\mathbf{1} = 1,$$

kus viimane võrdus kehtib võrrandi (13) tõttu.

Tähistame

$$A = \mu^T V^{-1}\mathbf{1},$$

$$B = \mu^T V^{-1}\mu,$$

$$C = \mathbf{1}^T V^{-1}\mathbf{1}.$$

Avaldame λ_1 ja λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{CE(R_p) - A}{D}, \tag{16}$$

$$\lambda_2 = \frac{B - AE(R_p)}{D}, \tag{17}$$

kus $D = BC - A^2$.

Nüüd saame avaldada aktivate optimaalsed kaalud, mis minimeerivad fikseeritud oodatava tulususe juures portfelli riski:

$$\omega = \frac{1}{D}(BV^{-1}\mathbf{1} - AV^{-1}\mu) + \frac{1}{D}(CV^{-1}\mu - AV^{-1}\mathbf{1}) \cdot E(R_p). \tag{18}$$

Tabuleerides oodatava tulususe $E(R_p)$ suurust on võimalik leida efektiivsete portfellide kõver. Portfellide minimaalsed riskid saab arvutada valemiga:

$$\sigma_p^2 = \frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{D}.$$

Eelpoolkirjeldatud optimiseerimisülesandele saab lisada veel täiendavaid piiranguid ning praktikas seda tihti ka tehakse. Näiteks võib vajalikuks osutuda piirangu lisamine aktiva osakaalule, mis ei luba sellel muutuda väga väikeseks. Seda seetõttu, et aktivalt saadav tulu ei pruugi ära katta aktiva omandamise ja juhtimisega seotud kulusid. Samas toob iga täiendav piirang kaasa valikuvõimaluste vähenemise ning antud töös ühtegi lisapiirangut ülesandele ei seata. [12, lk 14-15]

1.5 Markowitzi teooria kriitika

Markowitzi teooria on tänapäeva portfelliteooria alustala. See on kergesti mõistetav ning esitab arusaadavalt riski ja oodatava tulususe kontseptsiooni. Siiski on teoorial omad puudused. Esiteks on kriitikat saanud eeldus, et ratsionaalsed investorid peavad tingimata olema riskikartlikud. Teiseks on kaheldud, kas standardhälbe kasutamine riskimõõduna on asjakohane. Markowitzi teoorias hinnatakse aktivate ajaloolist volatiilsust, et leida tõenäoline tulususe varieeruvus keskmisest tulevikus. Kui aga investeering on pikaajaline ning investorile ei ole tähtis kõrge likviidsus, siis ei kujuta volatiilsus investorile suurt riski.

Lisaks on Markowitzi mudeli kasutamine ajamahukas, sest iga kord, kui muutub olemasoleva portfelli sisu, tuleb soovitud riski ja tulususe bilansi säilitamiseks uuesti hinnata kõiki võimalikke aktivaid. See asjaolu võib aga omakorda kaasa tuua tehingu kulude suurenemise sellisel määral, et efektiivse portfelli hoidmine muutub kulukaks.

Võttes arvesse kriitikat ei peaks Markowitzi teooriat vaatama kui ainuõiget juhist portfelli haldamiseks. Harry Markowitz pakkus esmakordselt välja idee, et investeerimisotsuste tegemisel tuleks hinnata aktivate mõju kogu portfellile, mitte lähtuda ainult konkreetse aktiva tulususest ja riskist. Harry Markowitz pani tugeva aluse, et teised teadlased saaksid täiendada teooriat nii, et seda oleks võimalik praktikas edukamalt rakendada. [1, lk 135-136]

Järgmises osas kirjeldatakse ühte alternatiivi portfelli optimiseerimiseks.

2 Tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetod

2.1 Ülesande püstitus

Käesolevas osas antakse ülevaade artiklis [14] välja pakutud lahendusele optimaalse portfelli leidmiseks, kasutades tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodit (*chance constrained portfolio optimization*).

Eeldame, et portfellis on m aktivat. Olgu $\omega_i \in \mathbb{R}$, $\omega_i \in [0,1]$, $i = 1, \ldots, m$ i-nda vara osakaal portfellis. Kaalude vektori esitame kujul $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)^T$. Olgu R portfelli kuuluvate aktivate tulude juhuslik vektor. Investeerimine i-ndasse varasse annab oodatava tulu $E(R_i)$ vaadeldava fikseeritud perioodi jooksul. Samuti olgu antud vaadeldava portfelli aktivate tulumäärade matemaatiliste ootuste vektor $\mu \in \mathbb{R}^m$ ja V olgu kovariatsioonimaatriks kujul:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}.$$

Eesmärk on maksimeerida oodatavat tulu:

$$g(w, R) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot E(R_i).$$

Vaadeldavas meetodis tuuakse sisse tõenäosus $\alpha \in (0,1)$, mis tähistab ülesandes investeeringu riski. See fikseeritakse vastavalt investori riskitaluvusele. Võttes kasutusse sihimuutuja $\gamma \in \mathbb{R}$, mis tähistab oodatavat tulusust, saab optimiseerimisülesanne kuju:

$$\begin{cases} \max\limits_{\omega \in X} \ \gamma, \\ P(\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i E(R_i) \geq \gamma) \geq 1 - \alpha, \\ \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_m = 1. \end{cases} \tag{19}$$

2.2 Tšebõšovi võrratus

Tšebõšovi võrratus on laialdaselt kasutusel statistika valdkonnas. Olgu X juhuslik suurus kesväärtusega μ ja dispersiooniga σ^2 nii, et $0 < \sigma^2 < \infty$. Siis Tšebõšovi võrratus on järgmine [9]:

$$P(|X - \mu| \geq \lambda \cdot \sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}, \tag{20}$$

kus $\lambda > 1$.

Kuna aktivate tulude ootuste vektor $R \in \mathbb{R}^m$, siis funktsiooni $g(\omega, R)$ erinevaid väärtusi vaadeldakse sama kaalude vektori $\omega \in X$ jaoks. Kui μ ja σ^2 mingi suvalise $g(\omega, R)$ kohta on teada, siis saab Tšebõšovi võrratuse kirja panna kujul:

$$P(|g(\omega, R) - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}, \tag{21}$$

kus $\lambda > 1$.

Tšebõšovi võrratuse puudus on see, et tavaliselt ei ole $\mu(\omega)$ ja $\sigma^2(\omega)$ teada. J. G. Saw *et al.* [13] on võrratust täiendanud selliselt, et seda saab kasutada ka juhul, kui antud väärtused ei ole teada (või neid ei eksisteeri).

Selleks valime vektorile R N väärtust $R^1, R^2, \ldots R^N$ sihifunktsiooni $g(\omega, R)$ jaoks ja arvutame:

$$g(\omega, R^n) = (R^n)^T \omega = R_1^n \omega_1 + R_2^n \omega_2 + \ldots + R_m^n \omega_m, \tag{22}$$

$n = 1, 2, \ldots, N$.

Leiame väärtused $\overline{g}(\omega)$ ja $s^2(\omega)$:

$$\overline{g}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(\omega, R^n), \tag{23}$$

$$s^2(\omega) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (g(\omega, R^n) - \overline{g}(\omega))^2. \tag{24}$$

Kasutades nüüd suurusi $\overline{g}(\omega)$ ja $s^2(\omega)$, saab Tšebõšovi võrratus kuju:

$$P\left(|g(\omega, R) - \overline{g}(\omega)| \geq \lambda \sqrt{\frac{N+1}{N}} s(\omega)\right) \leq \frac{1}{N+1} \left\lfloor \frac{(N+1)(N-1+\lambda^2)}{N\lambda^2} \right\rfloor, \tag{25}$$

kus $\lfloor r \rfloor$ on $r \in \mathbb{R}$ alumine täisosa.

Teoreem 1. *Olgu $g(\omega, R^n)$, $n = 1, \ldots, N$ väärtuste hulk ja olgu $N \geq N_{\min}$. Antud tõenäosuse $\alpha \in (0,1)$ korral minimaalne valimimaht on*

$$N_{\min} = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} + 1 \right\rfloor. \tag{26}$$

Tõenäosuse $\alpha \in (0,1)$ ja valimimahu $N > N_{\min}$ kaudu on κ defineeritud kui

$$\kappa = \sqrt{\frac{N^2 - 1}{N(\alpha N - 1)}}. \tag{27}$$

Kasutades $\overline{g}(\omega)$, $s^2(\omega)$ ja κ, saame $g(\omega, R)$ prognoosiintervalliks:

$$\begin{cases} P([g^L(\omega), g^U(\omega)] \ni g(\omega, R)) \geq 1 - \alpha, \\ g^L(\omega) = \overline{g}(\omega) - \kappa s(\omega), \\ g^U(\omega) = \overline{g}(\omega) + \kappa s(\omega), \end{cases} \tag{28}$$

kus

$g^L(\omega)$ *– funktsiooni $g(\omega, R)$ alumine tõke;*

$g^U(\omega)$ *– funktsiooni $g(\omega, R)$ ülemine tõke.*

Käesolevas töös Teoreemile 1 tõestust ei anta, see on leitav artiklist [14].

Kasutades suurusi $\overline{g}(\omega)$, $s^2(\omega)$ ja κ, saab $g(\omega, R)$ alumise tõkke $g^L(\omega)$ arvutada väärtuste $g(\omega, R^n), n = 1, \ldots, N$ põhjal. Suuruse κ väärtus sõltub nii tõenäosusest α kui valimimahust N. Leiame parameetri κ piirväärtuse:

$$\lim_{N \to \infty} \kappa = \lim_{N \to \infty} \sqrt{\frac{N^2 - 1}{N(\alpha N - 1)}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}.$$

2.3 Ülesande sõnastus

Kasutades funktsiooni $g(\omega, R)$ alumist tõket $g^L(\omega)$ teoreemist 1, saame tõenäosusega tõkestatud optimiseerimisülesandest alumise tõkkega optimiseerimisülesande kujul:

$$\begin{cases} \max\limits_{\omega \in X} \quad g^L(\omega) = \overline{g}(\omega) - \kappa s(\omega), \\ \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_m = 1, \end{cases} \tag{29}$$

kus on eelduseks, et valimimaht N, mida $g^L(\omega)$ arvutamiseks kasutatakse, on suurem kui $N_{\min}$.

Teoreem 2. *Kui $\omega \in X$ on lubatav lahend alumise tõkkega optimiseerimisülesandele (29), siis $\omega \in X$ on lubatavaks lahendiks ka tõenäosusega tõkestatud optimiseerimisülesandele tingimusel $\gamma = g^L(\omega)$.*

Tõestus. Oletame, et $\omega \in X$ on ülesandele (29) lubatav lahend. Siis $\omega \in X$ annab alumise tõkke (28). Kuna $g^L(\omega) = \gamma$, siis

$$P(g(\omega, R) \geq \gamma) = P([\gamma, \infty) \ni g(\omega, R)) \geq P([g^L(\omega), g^U(\omega)] \ni g(\omega, R)) \geq 1 - \alpha. \tag{30}$$

Võrratus (30) näitab, et alumise tõkkega optimiseerimisülesande lubatav lahend $\omega \in X$ rahuldab ka tõenäosuse kitsendust optimiseerimisülesandes (19). $\square$

Selleks et arvutada $g(\omega, R)$ alumine tõke $g^L(\omega)$, kasutame väärtusi R^n, $n = 1, \ldots, N$.

Esitame kovariatsioonimaatriksi V Cholesky lahutusena:

$$V = BB^T,$$

kus B on alumine kolmnurkmaatriks:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}.$$

Kui on antud keskväärtuste vektor $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)^T$, leitakse kõik $R^n = (R_1^n, \ldots, R_m^n)^T$ järgmiselt:

$$\begin{cases} R_1^n = \mu_1 + b_{11}\varepsilon_1^n, \\ R_2^n = \mu_2 + b_{21}\varepsilon_1^n + b_{22}\varepsilon_2^n, \\ \vdots \\ R_m^n = \mu_m + b_{m1}\varepsilon_1^n + \ldots + b_{mm}\varepsilon_m^n, \end{cases}$$

kus hälbed $\varepsilon_i^n, i = 1, \ldots, m$ on paarikaupa sõltumatute normaaljaotusega juhuslike muutujate väärtused.

2.4 Diferentsiaalevolutsioon

Selleks, et leida lahendid tõenäosusega tõkestatud optimeerimisülesandele kasutatakse artiklis [14] metaheuristilist meetodit. Metaheuristiliste meetodite puhul alustatakse ülesande lahendamist mingist juhuslikult valitud lahendist (või lahenditest). Seejärel üritatakse iteratiivselt leida ülesandele võimalikult hea lahend, kasutades selleks mõnda eelneval sammul leitud lahendit. Igal iteratsioonil leitakse mingi uus juhuslik lahendikandidaat. Metaheuristika ülesanne on iga uue lahendi korral otsustada, kas antud lahend on parem kui eelnev. Kui otsustatakse jääda vana lahendi juurde, siis hakatakse selle ümbrusest uut kandidaati otsima; kui otsustakse vastu võtta uus lahend, siis jätkatakse lahendi otsingut selle lähedusest. Iteratsioone tehakse nii kaua kuni leitakse sobiv lahend või jõutakse mõne muu eelnevalt defineeritud peatumiskriteeriumini (maksimaalne iteratsioonide arv saab täis, ettenähtud aeg saab otsa vms). Metaheuristiliste meetodite kasutamisel sõltub lahendite tulemus suuresti parameetrite valikust. [6]

Portfelli optimiseerimisel on kasutatud diferentsiaalevolutsiooni, mis on üks kõige kasutatavamatest metaheuristilistest algoritmitest. Diferentsiaalevolutsiooni korral moodustub lahendikandidaatidest nö populatsioon. Konkreetset lahendikandidaati nimetatakse indiviidiks ja ühte iteratsiooni nimetatakse populatsiooni põlvkonnaks. Igal iteratsioonil luuakse uus põlvkond, kasutades indiviide juba olemasolevast populatsioonist. Selleks võetakse populatsioonist indiviid, mida nimetatakse vanemaks. Iga indiviidi kasutatakse otsese vanemana vaid ühel korral. Lisaks on vaja teist vanemat, mis konstrueeritakse kasutades kolme erinevat indiviidi. Seega peab populatsioonis leiduma vähemalt neli indiviidi, et saaks luua järglase - üks otsene vanem ja 3 indiviidi, millest luuakse teine vanem. Konstrueeritava vanema loomiseks valitakse indiviidid täiesti juhuslikult ning ei vaadata nende kvaliteeti. [6]

Ristamise tulemusel tekib küll kaks järglast, kuid vaja on ainult ühte ja teine visatakse kõrvale. Kui indiviid, mis loodi, on parema kvaliteediga kui selle otsene vanem, siis asendatakse vanem järglasega. Vastasel juhul jäetakse vanem populatsiooni alles. [6]

Käesolevas töös diferentsiaalevolutsiooni protsessi rohkem ei kirjeldata; üksikasjalik kirjeldus on olemas ka artiklis [14]. Numbrilise eksperimendi jaoks valiti artiklis põlvkondade ehk iteratsioonide arvuks 200 ja populatsioonide arvuks 30. [6]

3 Optimiseerimismeetodite võrdlemine

3.1 Algandmed

Empiirilise osa eesmärgiks on välja selgitada, kuivõrd erineb tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetod Markowitzi optimiseerimismeetodist. Strateegia katsetamiseks on võetud andmed Kiyoharu Tagawa artiklist [14], millega on läbi lahendatud tõenäosusega tõkestatud optimiseerimisülesanne. Nende andmete põhjal on töö autor lahendanud Markowitzi optimiseerimisülesande. Andmeanalüüsi osa viidi läbi kasutades programmi Microsoft Excel ja programmeerimiskeelt Python. Microsoft Excelis korrastati põhiliselt andmed ja tehti joonised ning Pythonis viidi läbi meetodite testimine.

Näites on valitud aktivaportfell, mis sisaldab 4 aktivat S_i, $i = 1, \dots, 4$.

Oodatavate tulude vektor μ ja kovariatsioonimaatriks V on antud:

$$\mu = (0.05, 0.1, 0.15, 0.2),$$

$$V = \begin{bmatrix} 0,0004 & -0,0006 & 0,0001 & -0,0006 \\ -0,0006 & 0,0016 & -0,0012 & 0,0006 \\ 0,0001 & -0,0012 & 0,0036 & -0,0014 \\ -0,0006 & 0,0006 & -0,0014 & 0,0064 \end{bmatrix}.$$

$N = 80$ ja B on järgnev:

$$B = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 & 0 & 0 \\ -0,028 & 0,0286 & 0 & 0 \\ 0,0060 & -0,0361 & 0,0475 & 0 \\ -0,032 & -0,009 & -0,0331 & 0,0648 \end{bmatrix}.$$

Nende andmete põhjal on tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi tulemused leitud kasutades diferentsiaalevolutsiooni meetodit.

Numbriline eksperiment viidi läbi kuue erineva riskitaseme $\alpha \in (0, 1)$ korral. Kasutatud riskitasemed ja neile vastavad tulususlused tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi puhul on toodud Tabelis 1.

Tabel 1: Tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi sihifunktsiooni väärtused erinevate riskimäärade korral

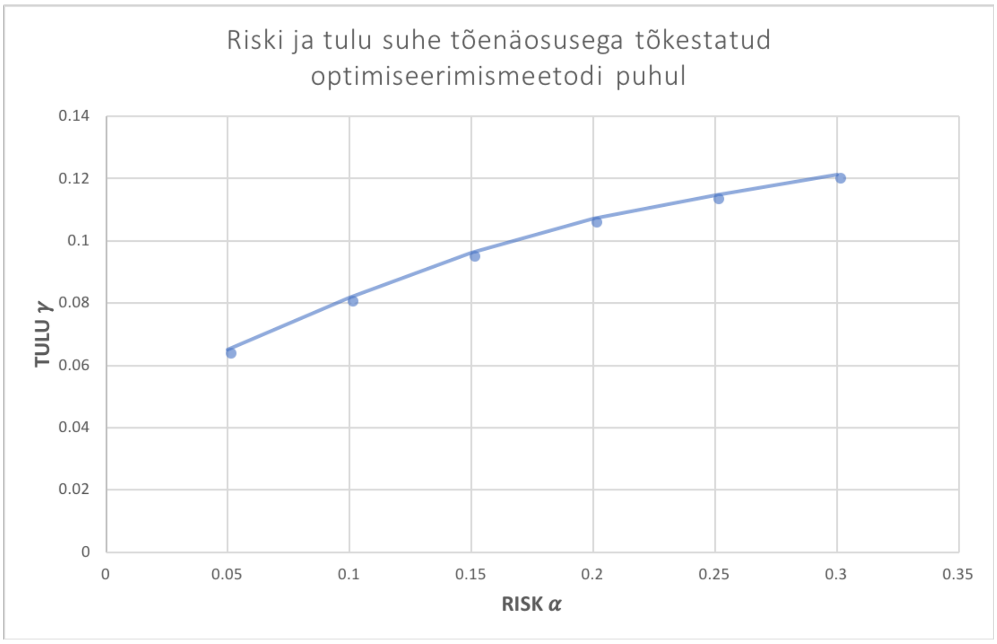
α	γ
0,05	0,0652
0,10	0,0817
0,15	0,0962
0,20	0,1071
0,25	0,1145
0,30	0,1212

Artiklis läbiviidud arvutuste tulemuse kohaselt on vastavate optimiseerimisülesannete lahendid esitatud Tabelis 2.

Tabel 2: Tõenäosusega tõkestatud optimiseerimisülesande lahendid

α	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0,05	0,4449	0,2587	0,1791	0,1171
0,10	0,1782	0,2909	0,3319	0,1988
0,15	0,0364	0,2712	0,3664	0,3257
0,20	0,0043	0,1482	0,4388	0,4085
0,25	0,0019	0,0990	0,5058	0,3930
0,30	0,0070	0,1321	0,4189	0,4419

Tabelis 2 esitatud andmete põhjal on koostatud Joonis 2, kus on näha efektiivsed portfellid:



Joonis 2: Lahendiportfellid tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi puhul

Jooniselt 2 on näha riski ja oodatava tulu suhet portfelli optimiseerimisel tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi puhul. Jooniselt võib lugeda, et risk suureneb proportsionaalselt investeeringu tulususe suurenedes.

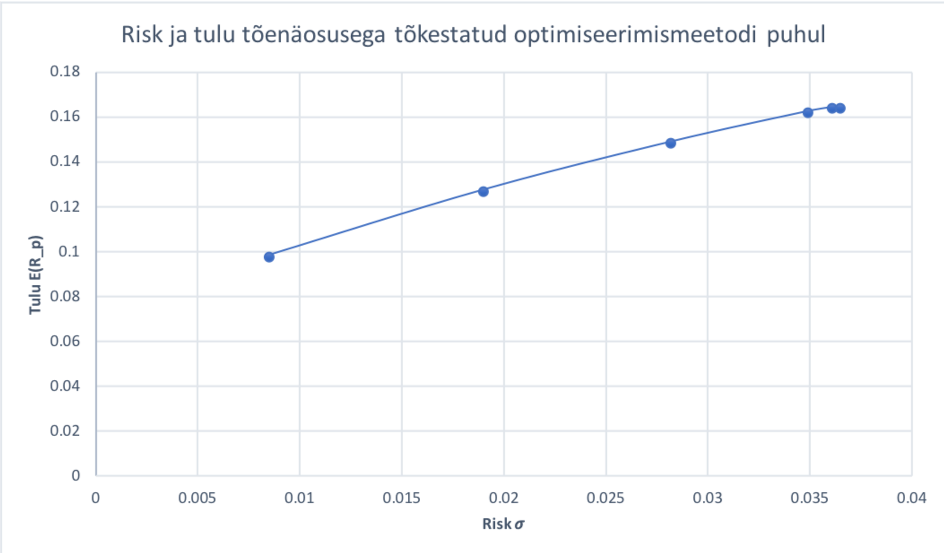
3.2 Algandmete esitamine Markowitzi terminoloogias

Kuna tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodis on kasutusel erinev riski suuruse ühik, siis selleks, et meetodeid omavahel võrrelda, koostas töö autor programmi, mis arvutas riskimäärad ümber. Saadud tulemused on esitatud Tabelis 3:

Tabel 3: Markowitzi teooriale vastavad portfellid

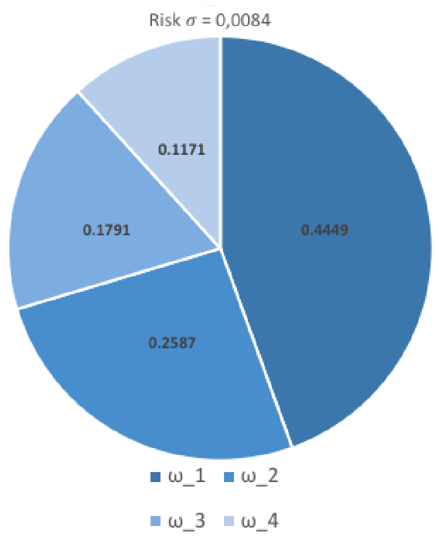
σ	$E(R_p)$
0,0084	0,0984
0,0189	0,1275
0,0281	0,1490
0,0348	0,1626
0,0360	0,1645
0,0364	0,1648

Tabelis 3 esitatud andmete põhjal on koostatud Joonis 3, kus riskimääraks ei ole α vaid σ. Riskimäära arvutamiseks on kasutatud valemit (5).

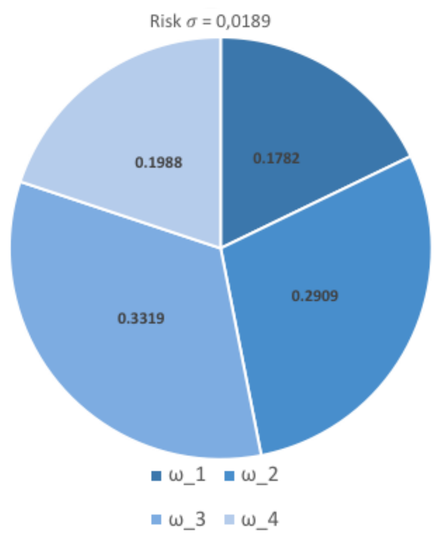


Joonis 3: Risk ja tulu tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi puhul, riskimäär σ

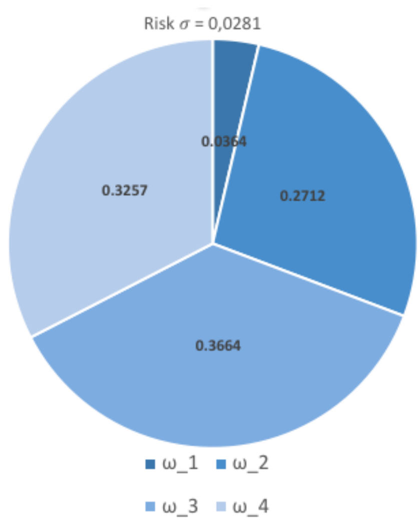
Investori vaatepunktist on lisaks portfelli riskitasemele ja oodatavale tulususele oluline teada ka seda, kui suure osa mingi aktiva koguportfellist peaks moodustama. Järgmistel diagrammidel (Joonised 4-9) on esitatud aktivate portfellid erinevate riskitasemete korral. Kaaludeks $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ on võetud tõenäosusega tõkestatud optimiseerimisülesande lahendid Tabelist 2.



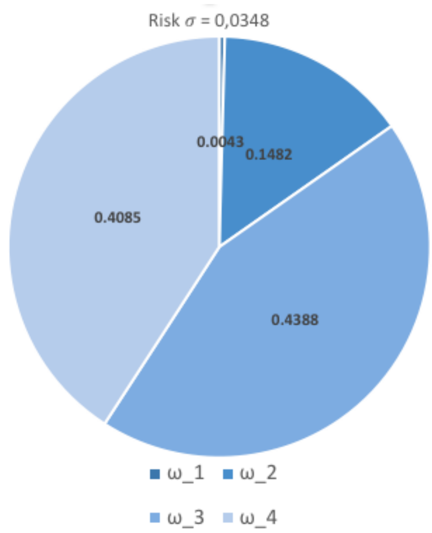
Joonis 4: Risk $\sigma = 0,0084; \alpha = 0,05$



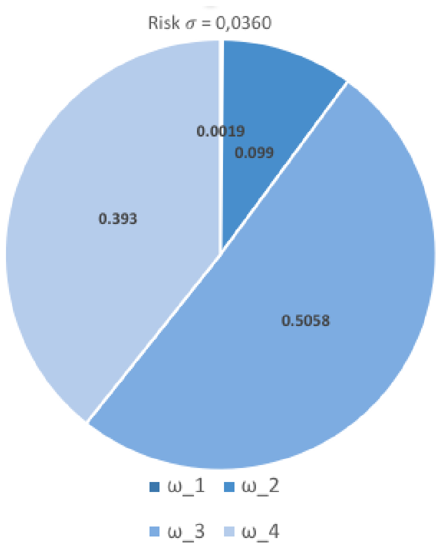
Joonis 5: Risk $\sigma = 0,0189; \alpha = 0,1$



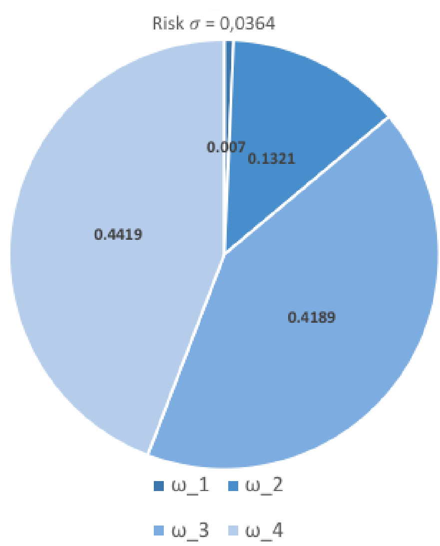
Joonis 6: Risk $\sigma = 0,0281; \alpha = 0,15$



Joonis 7: Risk $\sigma = 0,0348; \alpha = 0,2$



Joonis 8: Risk $\sigma = 0,0360; \alpha = 0,25$



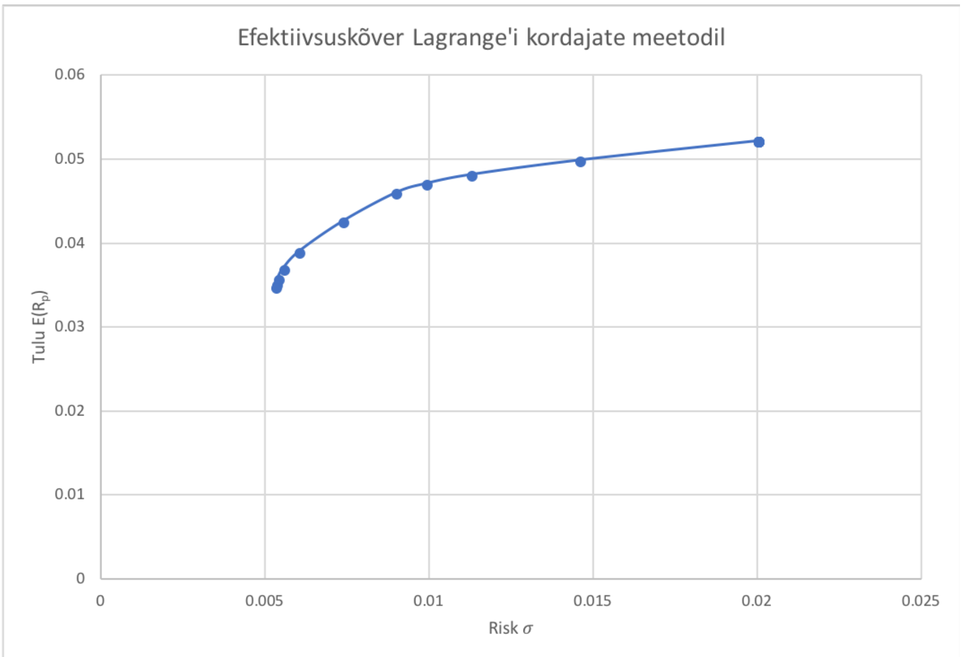
Joonis 9: Risk $\sigma = 0,0364; \alpha = 0,3$

Diagrammide põhjal selgub, et kui risk on väike, siis moodustavad aktivad kaaludega ω_1 ja ω_2 suurema osa portfellist. Suurema riski korral muutub aktiva ω_1 osakaal väga väikeseks ning portfellis domineerivad aktivad ω_3 ja ω_4.

3.3 Markowitzi optimiseerimisülesande lahendamine

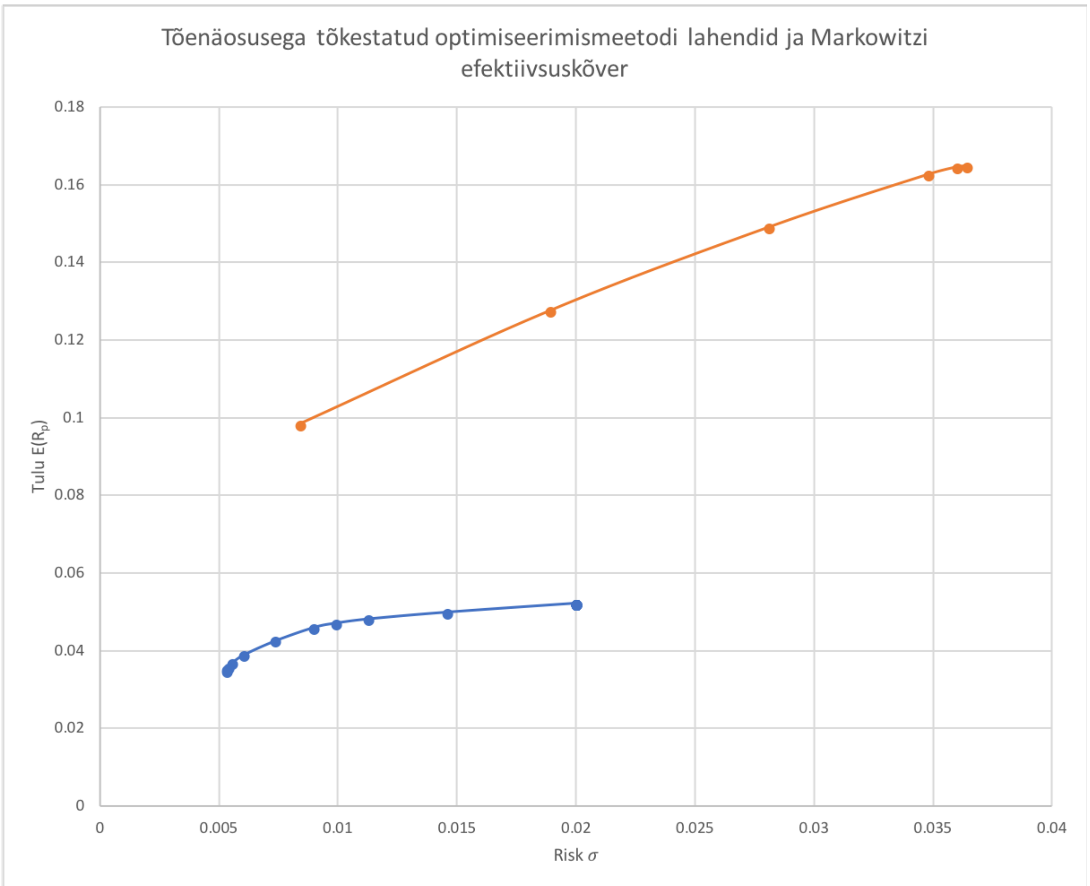
Et vaadata, millised tulemused annab Markowitzi optimiseerimismeetod, leiame artiklist saadud algandmete põhjal Lagrange'i meetodi abil efektiivsed piirportfellid.

Selleks on kasutatud Pythoni programmi, mille skripti on võimalik näha lisades. Lagrange'i meetod ei võta arvutamisel aluseks aktivate osakaalu, vaid efektiivsuskõver leitakse oodatava tulususe ja kovariatsioonimaatriksi põhjal. Kõigepealt leidsin efektiivsuskõvera, mis koosnes 20 portfellist. Efektiivsuskõver 20 erineva oodatava tulususe jaoks on näha järgmisel Joonisel 10.



Joonis 10: Efektiivsuskõver Lagrange'i kordajate meetodil

Efektiivsuskõveral asuvad piirportfellid on madalama riskiga ja madalama oodatava tulususega kui tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi abil leitud portfellid. Järgmisel Joonisel 11 on näha kuidas asetsevad Markowitzi piirportfellid ja tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi abil leitud portfellid üksteise suhtes.



Joonis 11: Tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi lahendid ja Markowitzi efektiivsuskõver

Jooniselt 11 võib lugeda, et sama riskimäära juures pakub Markowitzi teooria madalamat oodatavat tulusust kui tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetod. Järelikult võimaldab tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodi kasutamine leida parema riski-tulu määraga portfelle. Samas on viimase meetodi kasutamine keerulisem ja nõuab teadmisi metaheuristilisest meetodist - diferentsiaalevolutsioonist. Markowitzi teooria abil leitud efektiivsed piirportfellid on küll mõnevõrra madalama oodatava tulususega, kuid samas on nende leidmine lihtsam ning vähem aeganõudev.

4 Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärgiks oli kirjeldada kahte portfelli optimiseerimismeetodit.

Autorit huvitas, kas on võimalik leida paremaid tulemusi rakendades Markowitzi optimiseerimismeetodi asemel mõnda muud optimiseerimismeetodit. Võrdluseks võeti Kiyoharu Tagawa artiklis [14] kirjeldatud tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetod.

Töö teoreetilises osas kirjeldati Markowitzi optimiseerimismeetodit ning tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodit.

Empiirilises osas võeti aluseks andmed artiklist [14], kus on esitatud tulemused portfelli optimiseerimise kohta tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetodil. Samade andmetega lahendati käesolevas töös Markowitzi optimiseerimisülesanne.

Selgus, et Markowitzi teooriapõhine optimiseerimine, mis on aluseks modernsele portfelliteooriale jäi alla uuele meetodile, mis kasutab metaheuristilisi võtteid.

Bakalaureusetöö võiks olla aluseks edasistele uuringutele - kas diferentsiaalevolutsiooni meetodiga oleks võimalik leida veelgi paremaid tulemusi. Samuti võiks portfelli optimiseerimisel kasutada ka teisi metaheuristilisi meetodeid. Lisaks oleks võimalik uurida, kuidas töötab tõenäosusega tõkestatud optimiseerimismeetod suuremate aktsiaportfellide koostamise puhul.

Viited

[1] **Cohen, J.B., Zinbarg, E.D., Zeikel, A.** (1987). Investment Analysis and Portfolio Management. Fifth Edition. Homewood, Illinois: Irwin. 738 pp.

[2] **Elton, E.J., Gruber, M.J., Brown, S.J., Goetzmann, W.N.** (2003). Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. Sixth Edition. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc. 705 pp.

[3] **Karadag, D. T.** (2008). Portfolio Risk Calculation and Stohastic Portfolio Optimization by a COPULA Based Approach. Master's thesis. Bogazici University, 188 pp.

[4] **Krumm, K.** (2011). Investeeringute alused. Tallinn: Tallinna Tehnikaülikooli Kirjastus. 91 lk.

[5] **Kunsing, S., Tuusis, D.** (1995). Väärtpaberite portfellianalüüs. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus. 82 lk.

[6] **Loolaid, I.** (2013). Ülevaade metaheuristilistest meetoditest ja rändkaupmehe ülesande lahendamine GRASP meetodiga. Bakalaureusetöö. Tartu Ülikool, Matemaatika instituut.

[7] **Markowitz, H. M.** (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance, 7(1), pp. 77-91.

[8] **Omnisore, I., Yusuf, M., Christopher, N.** (2012). The Modern Portfolio Theory as an Investment Decision Tool. Journal of Accounting and Taxation, 4(2), pp. 19-28.

[9] **Pärna, K.** (2013). Tõenäosusteooria algkursus. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus. 211 lk.

[10] **Roos, A., Sander, P., Nurmet, M., Ivanova, N.** (2014). Finantsturud ja -institutsioonid. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus. 428 lk.

[11] **Sander, P.** (1999). Portfelliteooria I. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus. 78 lk.

[12] **Sander, P.** (2003). Portfelliteooria II. Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus. 152 lk.

[13] **Saw, J. G., Yang, M.C.K, Mo, T.C.** (1984). Chebyshev Inequality with Estimated Mean and Variance. The American Statistician, 38(2), pp. 130-132

[14] **Tagawa, K.** (2017). Chebyshev Inequality based Approach to Chance Constrained Portfolio Optimization. International Journal of Mathematical and Computational Methods, Volume 2, pp. 66-71.

[15] **Tomberg, A.** (2007) Portfelliriskide hindamine aktsiate portfelli näitel. Magistritöö. Tartu Ülikool, Matemaatilise Statistika Instituut, 91 lk.

5 Lisad

Lisa 1. Pythoni skript Markowitzi teooriale vastavate portfellide leidmiseks.

```
import numpy as np
aktivate_osakaalud_1 = np.asarray([0.4449, 0.2587,
0.1791, 0.1171])
aktivate_osakaalud_2 = np.asarray([0.1782, 0.2909,
 0.3319, 0.1988])
aktivate_osakaalud_3 = np.asarray([0.0364, 0.2712,
0.3664, 0.3257])
aktivate_osakaalud_4 = np.asarray([0.0043, 0.1482,
0.4388, 0.4085])
aktivate_osakaalud_5 = np.asarray([0.0019, 0.0990,
0.5058, 0.3930])
aktivate_osakaalud_6 = np.asarray([0.0070, 0.1321,
 0.4189, 0.4419])

aktiva_tulu = [0.05, 0.1, 0.15, 0.2]

kovariatsiooni_maatriks=[[0.0004, -0.0006, 0.0001, -0.0006],
                         [-0.0006, 0.0016, -0.0012, 0.0006],
                         [0.0001, -0.0012, 0.0036, -0.0014],
                         [-0.0006, 0.0006, -0.0014, 0.0064]]

portfelli_tulu_1 =np.dot(aktivate_osakaalud_1, aktiva_tulu)
portfelli_tulu_2 =np.dot(aktivate_osakaalud_2, aktiva_tulu)
portfelli_tulu_3 =np.dot(aktivate_osakaalud_3, aktiva_tulu)
portfelli_tulu_4 =np.dot(aktivate_osakaalud_4, aktiva_tulu)
portfelli_tulu_5 =np.dot(aktivate_osakaalud_5, aktiva_tulu)
portfelli_tulu_6 =np.dot(aktivate_osakaalud_6, aktiva_tulu)
print(round(portfelli_tulu_1,4))
```

```
print(round(portfelli_tulu_2,4))
print(round(portfelli_tulu_3,4))
print(round(portfelli_tulu_4,4))
print(round(portfelli_tulu_5,4))
print(round(portfelli_tulu_6,4))

portfelli_risk_1 = round(np.sqrt(np.dot
(aktivate_osakaalud_1.T,np.dot(kovariatsiooni_maatriks,
 aktivate_osakaalud_1))),4)
portfelli_risk_2 = round(np.sqrt(np.dot
(aktivate_osakaalud_2.T,
np.dot(kovariatsiooni_maatriks,
aktivate_osakaalud_2))),4)
portfelli_risk_3 = round(np.sqrt(np.dot
(aktivate_osakaalud_3.T,
np.dot(kovariatsiooni_maatriks,
aktivate_osakaalud_3))),4)
portfelli_risk_4 = round(np.sqrt(np.dot
(aktivate_osakaalud_4.T,
np.dot(kovariatsiooni_maatriks,
aktivate_osakaalud_4))),4)
portfelli_risk_5 = round(np.sqrt(np.dot
(aktivate_osakaalud_5.T,
np.dot(kovariatsiooni_maatriks,
 aktivate_osakaalud_5))),4)
portfelli_risk_6 = round(np.sqrt(np.dot
(aktivate_osakaalud_6.T,
np.dot(kovariatsiooni_maatriks,
aktivate_osakaalud_6))),4)

print(portfelli_risk_1)
print(portfelli_risk_2)
```

```
print(portfelli_risk_3)
print(portfelli_risk_4)
print(portfelli_risk_5)
print(portfelli_risk_6)
```

Lisa 2. Pythoni skript efektiivsuskõvera leidmiseks

```
import numpy as np
import cvxopt as opt
from cvxopt import blas, solvers
import pandas as pd

solvers.options['show_progress'] = False

#aktivate arv portfellis
aktivate_arv = 4

def k_portfellid(portfellid):
    portfellide_list = []
    for portfell in portfellid:
        temp = np.array(portfell).T
        portfellide_list.append(temp[0].tolist())

    return portfellide_list

def optimaalsed_portfellid(oodatavad_tulud):
    n = len(oodatavad_tulud)
    oodatavad_tulud = np.asmatrix(oodatavad_tulud)

    N = 20
    mus = [10**(5.0 * t/N - 1.0) for t in range(N)]

    kovariatsiooni_maatriks = opt.matrix(
    [[0.0004, -0.0006, 0.0001, -0.0006],
    [-0.0006, 0.0016, -0.0012, 0.0006],
    [0.0001, -0.0012, 0.0036, -0.0014],
    [-0.0006, 0.0006, -0.0014, 0.0064]])
```

```
p = opt.matrix(np.mean(oodatavad_tulud, axis=1))

#maatriksid ylesande kitsenduste jaoks
G = -opt.matrix(np.eye(n))
h = opt.matrix(0.0, (n ,1))
A = opt.matrix(1.0, (1, n))
b = opt.matrix(1.0)

#efektiivsuskoveral asuvate portfellide
 aktivate kaalud
portfellid = [solvers.qp(mu*kovariatsiooni_maatriks,
 -p, G, h, A, b)['x'] for mu in mus]

portfellide_list = k_portfellid(portfellid)

#portfellide oodatavate tulude ja riskide leidmine
oodatavad_tulud = [blas.dot(p, i) for i in portfellid]
risk = [np.sqrt(blas.dot(i, kovariatsiooni_maatriks*i))
for i in portfellid]

#leiame efektiivsuskovera
m1 = np.polyfit(oodatavad_tulud, risk, 2)
x1 = np.sqrt(m1[2] / m1[0])
#optimaalne portfell
aktivate_kaalud = solvers.qp(opt.matrix(x1 *
kovariatsiooni_maatriks), -p, G, h, A, b)['x']
print(aktivate_kaalud)
kontrolli_kaalud = sum(aktivate_kaalud) #peab vorduma
#yhega

return np.asarray(aktivate_kaalud), oodatavad_tulud,
```

```
    risk, portfellide_list

print(aktivate_kaalud)
print(risk)
print(oodatavad_tulud)

aktivate_kaalud, oodatavad_tulud, risk, portfellid =
optimaalsed_portfellid(oodatavate_tulude_vektor)
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, ____________Kaisa Käosaar___________________________,
(autori nimi)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose
"Portfelli optimiseerimine kahel meetodil",
(lõputöö pealkiri)

mille juhendaja on _________________Peep Miidla________________________________,
(juhendaja nimi)

reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Kaisa Käosaar
13.05.2019