



Méthodes de régularisation évanescence pour la complétion de données

Laëtitia Caillé

► **To cite this version:**

Laëtitia Caillé. Méthodes de régularisation évanescence pour la complétion de données. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université de Caen Normandie, 2018. Français. tel-02278743

HAL Id: tel-02278743

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02278743>

Submitted on 4 Sep 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité Mécanique des solides, Génie mécanique, Productique, Transport et Génie civil

Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie

Méthodes de régularisation évanescence pour la complétion de données

**Présentée par
Laëtitia CAILLÉ**

**Soutenue le 25 octobre 2018
devant le jury composé de**

Amel BEN ABDA	Professeur des Universités, Laboratoire de Modélisation Mathématique et Numérique dans les Sciences de l'Ingénieur, ENIT, Université Tunis El-Manar	Rapporteur
Franck DELVARE	Professeur des Universités, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen Normandie	Directeur de thèse
Jean-Luc HANUS	Maître de conférences, Laboratoire de mécanique Gabriel Lamé, INSA Centre Val de Loire	Examineur
Liviu MARIN	Professeur des Universités, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Bucharest	Examineur
Nathalie MICHAUX-LEBLOND	Maître de conférences, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen Normandie	Examineur
Bertrand WATTRISSE	Professeur des Universités, Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Université de Montpellier	Rapporteur Président du jury

Thèse dirigée par Franck DELVARE, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme



Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Franck Delvare, pour m'avoir offert l'opportunité de réaliser une thèse et pour le temps qu'il m'a accordé pendant ces trois années. Nos échanges scientifiques ont toujours été fructueux et enrichissants. J'exprime ma gratitude à Nathalie Leblond, ma co-encadrante, pour son aide tout au long de ces années de thèse. Ses précieux conseils et ses qualités humaines m'ont permis de mener mes travaux dans des conditions optimales. Le soutien qu'elle m'a apporté est inoubliable, elle s'est toujours rendue disponible et même dans les moments les plus difficiles.

Je remercie les membres du jury pour leur implication, leurs questions et les échanges scientifiques qui me permettront d'aller plus loin. En particulier, j'exprime ma reconnaissance à mes rapporteurs Amel Ben Abda et Bertrand Wattrisse pour le temps qu'ils m'ont accordé pour examiner mon travail. Je remercie également Bertrand Wattrisse d'avoir accepté de présider le jury. Je tiens également à remercier Jean-Michel Génévaux d'avoir pris le temps d'examiner mon travail. Je ne peux pas remercier les membres du jury sans mentions spéciales pour Jean-Luc Hanus et Liviu Marin. Ces deux personnes à qualités humaines et connaissances scientifiques exceptionnelles m'ont accompagnée depuis ma dernière année de master. Je n'oublierai pas mes premiers pas à Bourges pour découvrir le monde expérimental avec Jean-Luc et à Bucarest pour collaborer et voyager avec Liviu.

J'ai une pensée particulière pour les enseignants du LMNO qui m'ont vu évoluer depuis ma première année de licence. Je remercie l'équipe des mécaniciens pour leurs enseignements qui m'ont permis d'avoir les connaissances nécessaires pour commencer une thèse et en particulier Nizar qui m'a incitée à aller vers la mécanique. Je pense également à Sylvain grâce à qui mes premiers TPs sont de très bons souvenirs et mes bricolages expérimentaux ont été plus agréables à vivre. Je remercie plus généralement l'ensemble du personnel du LMNO, en pensant particulièrement à la gentillesse d'Anita, Axelle et Marie et la bonne humeur de Sonia.

Je tiens également à remercier les doctorants et post-doctorants, des plus jeunes encore présents aux plus anciens déjà partis. Je n'oublierai pas les bons moments passés autour d'un café ou à écouter les séminaires jeunes. Mention spéciale pour

Sophie et Vincent, mes amis, qui m'ont été d'un réel soutien et toujours prêts à partager de bons moments autour d'un thé, d'une clémentine ou d'un bon plat au resto. Je tiens à souligner toute l'affection que Sophie m'apporte, comment dire ? avec Nathalie, vous êtes un peu mes "mamans de la fac".

Je pense à tous mes amis sportifs, avec qui je partage non seulement une passion mais aussi ce qui m'a permis de rester en forme. Vous êtes nombreux à ignorer ce que je fais réellement "dans la vraie vie" et pourtant à imaginer que j'y suis tout autant rigoureuse que je le suis à l'entraînement. Comme j'entends encore Max le dire : "Focus Laeti !". Je tiens à remercier mes amis et plus particulièrement les coachs de CrossFit Caen pour leur patience, parfois après une longue journée au bureau, leurs conseils et toutes les adaptations qu'ils ont pu faire pour que je puisse m'entraîner au mieux, avec la forme du jour, jusqu'à la veille de ma soutenance. Je pense également à mes amis sportifs de La Suite, ma famille berruyère, et en particulier à mon breton préféré et Lio qui se feront un plaisir de parcourir ce manuscrit et à Fred que je remercie pour son accueil chaleureux. Puisque je suis descendue dans le Centre, j'en profite pour remercier mes amis doctorants grâce à qui je ne pouvais rêver d'un meilleur accueil lors de mes séjours à l'école. Je n'oublie pas Alex, celui qui m'a donné goût au sport, qui m'a vu grandir avant et pendant la thèse et qui a toujours été là pour m'épauler (-jeter puisqu'on est friands de jeux de mots) puis Julie avec qui j'ai pu échanger sur l'expérience de la thèse, ils ont su me motiver lorsque je ne pensais plus y arriver.

J'exprime toute ma reconnaissance à mes parents que je ne remercierai jamais assez pour leur soutien tout au long de ces années d'études. Ils n'ont jamais douté de moi, ce qui m'a toujours motivée à aller plus loin. Un papa présent autant que possible avec ses contraintes professionnelles mais venu me soutenir, c'était un plaisir de le voir m'écouter le grand jour. Une complicité particulière avec maman, des échanges quotidiens, nul besoin de se voir ou d'en dire long pour qu'elle ressente mes émotions. Toujours là pour prendre soin de moi, "l'asile le plus sûr est le cœur d'une mère", j'en suis convaincue. Je pense également à ma grande sœur, qui a porté de l'intérêt à mon travail et qui m'a fait l'honneur de venir m'écouter.

J'ai gardé le meilleur pour la fin, pour mon Flo. Celui qui a vécu tout autant que moi cette expérience, qui a su me supporter, dans tous les sens du terme, tout au long de ces trois années. Malgré la distance qui nous sépare, il a su m'accompagner jusqu'au bout et faire en sorte que mon quotidien soit meilleur chaque jour. Grâce à cette expérience, j'ai découvert ses qualités de patience, d'écoute, d'adaptation,... qui font partie d'une longue liste qui fait de lui l'homme que j'aime.

Table des matières

Introduction générale	1
Partie I : Méthode de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz	4
Introduction	7
1 Méthodes de résolution pour les problèmes de complétion de données de type Cauchy	9
1.1 Méthodes de régularisation du problème continu	11
1.1.1 Les méthodes de type Tikhonov	12
1.1.2 La méthode de quasi-réversibilité	13
1.1.3 Des méthodes de type contrôle optimal	14
1.2 Méthodes utilisant une reformulation du problème de Cauchy	17
1.2.1 Méthode basée sur une procédure itérative alternée	18
1.2.2 Méthode basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique	19
1.2.3 L'algorithme de Steklov-Poincaré	20
1.3 Résolution par projection dans une base de solutions de l'opérateur	23
1.4 Méthodes de résolution pour les systèmes discrets mal conditionnés	23
1.4.1 Version en dimension finie de la méthode de Tikhonov	24
1.4.2 La méthode de décomposition en valeurs singulières	26
1.5 La méthode de régularisation évanescence	27
1.5.1 Principe de la méthode	27
1.5.2 Formulation de la méthode	28
1.5.3 Formulation en dimension finie de l'algorithme de régularisation évanescence	30
1.6 Bilan du chapitre	32
2 Méthode de régularisation évanescence pour le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz	37
2.1 Le problème de Cauchy pour l'équation d'Helmholtz	40
2.2 Formulation continue de la méthode	41

2.3	Formulation discrète de l'algorithme itératif	41
2.3.1	Discrétisation par la méthode des solutions fondamentales	42
2.3.1.1	Approximation de l'espace des solutions $H(\Gamma)$	42
2.3.1.2	Description de l'algorithme itératif de régularisation évanescence	43
2.3.2	Critère d'arrêt et normes d'erreur	45
2.4	Exemples numériques bidimensionnels	47
2.4.1	Cas d'un domaine à bord régulier	47
2.4.1.1	Influence du coefficient de régularisation c	48
2.4.1.2	Reconstructions dans le cas de données bruitées	50
2.4.1.3	Influence du nombre de sources N	53
2.4.1.4	Influence de la distance d séparant les sources du bord du domaine	54
2.4.2	Cas d'un domaine présentant une frontière non régulière	55
2.4.2.1	Influence du coefficient de régularisation c	56
2.4.2.2	Reconstructions dans le cas de données bruitées	58
2.4.2.3	Influence du nombre de sources N	59
2.4.2.4	Influence de la distance d séparant les sources du domaine	60
2.5	Exemples numériques tridimensionnels	61
2.5.1	Cas d'une solution régulière sur un domaine cubique	62
2.5.2	Cas d'une solution à valeurs singulières	67
2.6	Bilan du chapitre	70
Conclusion de la partie I		71
 Partie II : Méthode de régularisation évanescence pour l'identification de conditions aux limites à partir de mesures de champs partielles		73
Introduction		75
3	Mesures de champs et méthodes d'identification de paramètres	79
3.1	Mesures de champs et techniques expérimentales	81
3.2	Quelques techniques d'identification à partir de mesures de champs	83
3.2.1	La méthode des champs virtuels (VFM)	83
3.2.2	La méthode de l'écart à l'équilibre (EGM)	85
3.2.3	La méthode de recalage par éléments finis (FEMU)	86
3.2.4	La méthode de l'écart à la réciprocité (RGM)	88
3.2.5	La méthode de l'erreur en relation de comportement (CEGM)	89
3.2.6	Résumé	90
3.3	Bilan du chapitre	92

4	Méthode de régularisation évanescence pour les problèmes de complé- tion de données partielles	93
4.1	Le problème modèle	95
4.2	Formulation continue de la méthode	96
4.2.1	Définitions et notations	96
4.2.2	Formulation équivalente du problème modèle	97
4.2.3	La solution du problème physique qui s'approche au mieux des données	98
4.2.4	Un contrôle itératif de la solution	98
4.2.5	Convergence de l'algorithme	100
4.3	Formulations discrètes de l'algorithme itératif	103
4.3.1	Discrétisation par la méthode des solutions fondamentales	103
4.3.1.1	Approximation de l'espace des solutions $\mathbf{H}(\Gamma)$	103
4.3.1.2	Description de l'algorithme itératif	104
4.3.1.3	Critère d'arrêt et normes d'erreurs	106
4.3.2	Discrétisation en utilisant la méthode des éléments finis	107
4.3.2.1	Approximation de l'espace des solutions $\mathbf{H}(\Gamma)$	107
4.3.2.2	Description de l'algorithme itératif	108
4.4	Validation de la méthode sur un exemple numérique	109
4.4.1	Simulations numériques avec la méthode des solutions fon- damentales	111
4.4.1.1	Influence du coefficient de régularisation c	112
4.4.1.2	Reconstructions à partir de données bruitées	114
4.4.1.3	Reconstructions à partir d'un champ de déplace- ments perturbé par un mouvement de solide rigide	118
4.4.1.4	Influence de la taille de la grille de données	120
4.4.2	Simulations numériques par la méthode des éléments finis	123
4.4.2.1	Influence de la discrétisation du domaine	124
4.4.2.2	Influence du coefficient de régularisation c	128
4.4.2.3	Reconstructions à partir de données bruitées	130
4.4.2.4	Influence de la taille de la grille de données	135
4.4.3	Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes numériques	137
4.5	Applications à des situations réelles	139
4.5.1	Contribution à l'analyse d'essais de compression diamétrale	140
4.5.1.1	Essai de compression d'un cylindre en polyéthylène	140
4.5.1.2	Essai de traction indirecte sur un matériau quasi- fragile	149
4.5.2	Conclusions sur l'application de la méthode à des situations réelles	156
4.6	Bilan du chapitre	157

Conclusion de la partie II	159
Conclusion générale et perspectives	161
A Résultats numériques obtenus pour une solution régulière du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz tridimensionnelle	165
B Détermination du mouvement de solide rigide par une procédure d'optimisation non linéaire	177
C Résultats numériques obtenus pour un test de compression avec des conditions aux limites non constantes	181
Bibliographie	187

Introduction générale

Des tests des structures en service, telles que les ponts et les tunnels, sont nécessaires afin de vérifier l'intégrité de ces ouvrages d'art. Le contrôle non destructif est une technique d'évaluation des structures qui ne nécessite pas d'endommagement. On cite, à titre d'exemple, la détection de fissures sur un pont en béton, pour laquelle des mesures directes ne sont pas accessibles au voisinage de la fissure. Les caractéristiques de l'ouvrage supportant un trafic doivent alors être retrouvées à partir de mesures sur une partie accessible du pont, on parle de complétion de données. En plus d'être partielles, les mesures ne sont pas parfaites : elles sont entachées de bruit expérimental. Ces difficultés donnent naissance à des problèmes d'identification, qui sont de réels défis scientifiques de part le manque d'informations nécessaires à leur résolution directe, il s'agit de problèmes inverses.

Les problèmes inverses interviennent dans divers domaines de la physique, tels que la thermique ou la mécanique. Ils trouvent de nombreuses applications, comme l'identification de frontières, de cavités ou de fissures, l'identification de paramètres matériau, l'identification de conditions aux limites non accessibles à la mesure,... Les problèmes inverses s'opposent aux problèmes directs, problèmes pour lesquels nous connaissons le domaine et sa frontière, l'équation d'équilibre, la loi de comportement, les conditions aux limites en tout point de la frontière et éventuellement, les conditions initiales. Un problème inverse est caractérisé par l'absence d'au moins une de ces informations. Au sens mathématique, les problèmes directs sont connus pour être bien posés. D'après Hadamard, un problème est bien posé s'il admet une unique solution qui dépend continûment des données. A contrario, l'existence, l'unicité ou la stabilité de la solution d'un problème inverse ne peuvent pas être garanties. La résolution de tels problèmes ne peut donc pas se faire par les méthodes usuelles pour résoudre les problèmes directs, d'où la nécessité de développer des méthodes spécifiques de résolution. Les techniques inverses les plus connues sont les méthodes de résolution de type Tikhonov, la méthode de quasi-réversibilité et des méthodes itératives qui consistent à résoudre une succession de problèmes bien posés. Ces méthodes cherchent à résoudre un système de la forme

$$A(u) = f \tag{1}$$

où les inconnues u sont exprimées en fonction des grandeurs connues f . De petites

perturbations des données f peuvent fortement altérer la solution, c'est pourquoi les méthodes de type Tikhonov et de quasi-réversibilité utilisent un opérateur régularisant afin d'obtenir une solution stable vis à vis de faibles perturbations. Les quasi-solutions ainsi obtenues sont dépendantes d'un paramètre de régularisation et les données f sont utilisées de manière exacte, c'est à dire que les inconnues u du problème sont exprimées directement en fonction de ces données. Cimetière et al. [65,67] ont proposé la méthode de régularisation évanescence, différente par le fait que les inconnues u ne sont pas exprimées directement en fonction des données f . Elle repose sur l'idée de rechercher parmi toutes les solutions de l'équation d'équilibre celle qui s'approche aux mieux des données. Ainsi, l'équation d'équilibre est considérée fiable et les données sont des quantités non fiables.

Initialement introduite pour résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace [65, 67], la méthode de régularisation évanescence a plus tard été étendue pour résoudre les problèmes de Cauchy bidimensionnels en élasticité [78]. Dans cette thèse, nous proposons, dans une première partie, d'étendre la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de Cauchy, bidimensionnels ou tridimensionnels, gouvernés par l'équation d'Helmholtz. Dans une seconde partie, nous proposons tout d'abord la généralisation de la méthode aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles et nous l'appliquons ensuite à des mesures réelles.

Le premier chapitre est consacré aux méthodes de résolution des problèmes de complétion de données de type Cauchy. Nous présentons des méthodes dédiées à la régularisation du problème continu et des méthodes de résolution des systèmes discrets mal conditionnés. Les idées de base ainsi que les formulations continue et discrète de la méthode de régularisation évanescence sont détaillées.

Le second chapitre présente la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz avec la méthode de régularisation évanescence. La formulation continue de la méthode ainsi que sa mise en œuvre numérique avec la méthode des solutions fondamentales sont exposées. Des exemples numériques bidimensionnels considérant des domaines à frontière régulière ou présentant des points anguleux sont traités. Nous étudions l'influence du paramètre de régularisation et des paramètres de la discrétisation. Enfin nous présentons des résultats numériques tridimensionnels.

Le troisième chapitre est dédié aux mesures de champs et à leurs principales utilisations pour l'identification. Nous présentons les motivations à réaliser des mesures de champs et les techniques expérimentales disponibles, parmi lesquelles nous distinguons la corrélation d'images numériques. Les mesures de champs étant actuellement exploitées dans le cadre de l'identification de paramètres matériau, nous

présentons quelques méthodes d'identification.

Le quatrième chapitre est consacré à la généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles. Nous présentons le problème modèle et nous détaillons la formulation continue ainsi que la mise en œuvre numérique d'une part avec la méthode des éléments finis et, d'autre part, avec la méthode des solutions fondamentales. Un exemple numérique de compression uniforme permet de valider l'approche que nous proposons et de comparer les deux méthodes numériques. Nous présentons ensuite des reconstructions de champs de déplacements et de conditions aux limites obtenues à partir de mesures de champs partielles, issues de corrélation d'images numériques et réalisées lors d'essais de compression d'un cylindre en polyéthylène et d'un disque en béton.

Partie I

Méthode de régularisation évanescente pour le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz

Introduction

Cette première partie est dédiée à la résolution d'un problème de complétion de données de type Cauchy, pour lequel des conditions aux limites surabondantes sont accessibles seulement sur une partie de la frontière du domaine alors qu'aucune information n'est disponible sur la partie complémentaire de la frontière. Les problèmes de Cauchy ont de nombreuses applications en ingénierie, telles que la thermique, l'acoustique, l'imagerie médicale, l'ingénierie pétrolière,... Par exemple, en thermique, un fluide caloporteur s'écoule dans une conduite et les conditions d'échange thermique avec le milieu extérieur sont connues (par exemple, la donnée du flux et la température pariétale) tandis qu'aucune condition (ni la température du fluide, ni les conditions d'échange avec le fluide) en paroi interne n'est accessible. Le problème de Cauchy consiste alors à reconstruire la température (par exemple) en paroi interne. La résolution de problèmes de type Cauchy est souvent rencontrée comme une étape préalable dans les travaux de contrôle non destructif, il s'agit, par exemple, de reconstruire le champ de déplacements d'un solide à partir de mesures des déplacements et des efforts sur une partie de sa frontière afin d'identifier, par la suite, des défauts (fissures, zones plastiques, tumeurs,...).

Nous considérons que le problème de Cauchy que l'on cherche à résoudre est lié à un problème physique pour lequel l'équation d'équilibre, la loi de comportement et le domaine et sa frontière sont connus. Nous supposons que la fonction et sa dérivée normale sont données sur une partie accessible de la frontière mais qu'aucune condition aux limites n'est connue, imposée ou mesurable sur la partie complémentaire. Dans le cas où les conditions aux limites sont compatibles, le problème de Cauchy a une solution. D'après le théorème de Holmgren [110], cette dernière est unique mais elle ne dépend pas continûment des données, de petites perturbations sur les conditions aux limites peuvent alors rendre la solution instable sur la partie complémentaire de la frontière. Le problème de Cauchy est alors un problème mal posé au sens d'Hadamard [97] puisque la stabilité de la solution par rapport aux données n'est pas assurée. Lorsque les données de conditions aux limites sont des mesures réelles, elles ne sont, en général, pas compatibles, à cause du bruit de mesure. Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode de résolution du problème de Cauchy stable par rapport aux incertitudes de mesure.

Dans un premier chapitre, nous présentons quelques méthodes de résolution pour les problèmes de type Cauchy. Nous considérons des méthodes de régularisation du

problème continu, des méthodes utilisant une reformulation du problème de Cauchy, des méthodes de projection dans une base de solutions de l'opérateur et des méthodes de résolution pour les systèmes discrets mal conditionnés. Nous détaillons les formulations continues et discrètes de la méthode de régularisation évanescence, qui repose sur l'idée de rechercher parmi toutes les solutions de l'équation d'équilibre celle qui s'approche au mieux des conditions aux limites disponibles. Les conditions aux limites, potentiellement entachées d'erreurs de mesure, sont ainsi considérées comme non fiables.

Un second chapitre est consacré à la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz avec la méthode de régularisation évanescence. Nous présentons le problème modèle et nous détaillons la formulation continue de la méthode ainsi que sa mise en œuvre numérique avec la méthode des solutions fondamentales. Des exemples numériques bidimensionnels sont étudiés dans le cas d'un domaine à frontière régulière et d'un domaine avec des points anguleux. Nous considérons aussi des exemples tridimensionnels pour une solution régulière et une solution qui caractérise la présence d'une singularité à proximité mais à l'extérieur du domaine.

Chapitre 1

Méthodes de résolution pour les problèmes de complétion de données de type Cauchy

Sommaire

1.1	Méthodes de régularisation du problème continu	11
1.1.1	Les méthodes de type Tikhonov	12
1.1.2	La méthode de quasi-réversibilité	13
1.1.3	Des méthodes de type contrôle optimal	14
1.2	Méthodes utilisant une reformulation du problème de Cauchy	17
1.2.1	Méthode basée sur une procédure itérative alternée . . .	18
1.2.2	Méthode basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique	19
1.2.3	L'algorithme de Steklov-Poincaré	20
1.3	Résolution par projection dans une base de solutions de l'opé- rateur	23
1.4	Méthodes de résolution pour les systèmes discrets mal condi- tionnés	23
1.4.1	Version en dimension finie de la méthode de Tikhonov .	24
1.4.2	La méthode de décomposition en valeurs singulières . .	26
1.5	La méthode de régularisation évanescence	27
1.5.1	Principe de la méthode	27
1.5.2	Formulation de la méthode	28
1.5.3	Formulation en dimension finie de l'algorithme de régu- larisation évanescence	30
1.6	Bilan du chapitre	32

Dans ce chapitre, nous présentons des méthodes adaptées à la résolution du problème modèle de Cauchy qui peut être énoncé comme suit :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , délimité par sa frontière Γ composée de Γ_d et Γ_i tel que $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ et $\Gamma_d \cap \Gamma_i = \emptyset$ (voir Figure 1.1). Etant données ϕ_d et ψ_d deux fonctions définies sur Γ_d , on cherche une fonction $u \in \Omega$ solution de l'opérateur L telle que

$$L(u) = 0 \quad (1.1)$$

et vérifiant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u = \phi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u' = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1.2)$$

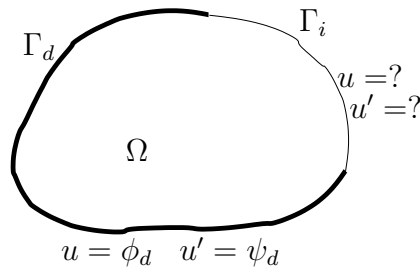


Figure 1.1 – Problème modèle de Cauchy

Nous nous intéressons en premier lieu aux méthodes dédiées à la résolution du problème continu. Des méthodes de régularisation du problème continu permettent d'obtenir une quasi-solution stable par rapport aux données, d'autres méthodes proposent de résoudre le problème de Cauchy mal posé en utilisant une reformulation qui permet de se ramener à des problèmes bien posés et il existe également des méthodes qui suggèrent de décomposer la solution du problème sur une base de solutions analytiques.

Selon la méthode numérique utilisée, certaines de ces méthodes amènent à résoudre un système d'équations mal conditionné. Nous présentons alors dans un second temps des méthodes de résolution de systèmes discrets mal conditionnés.

Enfin, nous présentons la méthode de régularisation évanescente et les motivations à l'origine de sa construction et nous détaillons les formulations continue et discrète de la méthode avant de conclure.

1.1 Méthodes de régularisation du problème continu

Différentes méthodes permettent de régulariser le problème continu, c'est à dire que la solution obtenue est contrôlée au moyen d'un terme régularisant, le plus souvent dépendant d'un paramètre. On obtient ainsi une quasi-solution stable par rapport aux données.

Considérons deux espaces de Hilbert V et H . Un problème inverse peut être écrit en utilisant la notation symbolique (1) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ Au = f \end{cases} \quad (1.3)$$

où $f = (u|_{\Gamma_d}, u'|_{\Gamma_d})$ décrit les données appartenant à H et A est un opérateur de V dans H .

1.1.1 Les méthodes de type Tikhonov

La technique de Tikhonov [195] consiste à remplacer le problème mal posé par un problème approché bien posé. Le caractère bien posé est obtenu grâce à l'ajout d'un terme de contrôle pondéré par un paramètre de régularisation.

Le problème régularisé au sens de Tikhonov consiste à trouver la fonction u_λ qui minimise la fonctionnelle :

$$J_\lambda(u, f) = \|Au - f\|_H^2 + \lambda J_r(u) \quad (1.4)$$

avec λ le paramètre de régularisation à déterminer et J_r une fonctionnelle stabilisatrice.

Le terme régularisant J_r s'exprime, par exemple, si l'on recherche :

- la solution la plus proche d'une valeur de référence ou d'une connaissance a priori u^0 par $J_r = \|u - u^0\|_V^2$,
- ou la solution de norme minimale par $J_r = \|u\|_V^2$.

Dans le cas où l'on cherche la solution approchée de norme minimale du problème de Cauchy, la solution approchée et régularisée de Tikhonov u_λ est donnée par la solution de l'équation :

$$(A^*A + \lambda I)u = A^*f \quad (1.5)$$

où A^* est l'opérateur adjoint de A .

L'élément optimal le plus proche de la connaissance a priori u^0 vérifie l'équation :

$$u_\lambda = (A^*A + \lambda I)^{-1}(A^*f + \lambda u^0).$$

On peut introduire une version itérative de la méthode de Tikhonov qui consiste à résoudre une succession de problèmes de ce type, avec à chaque itération la mise à jour de la connaissance a priori. A chaque itération, la valeur de référence u^0 correspond à l'élément optimal calculé à l'itération précédente. La fonctionnelle à minimiser à l'itération k est

$$J_\lambda^k(u, f) = \|Au - f\|_H^2 + \lambda \|u - u_\lambda^{k-1}\|_V^2 \quad (1.6)$$

et l'élément optimal est

$$u_\lambda^k = (A^*A + \lambda I)^{-1}(A^*f + \lambda u_\lambda^{k-1}), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

La solution obtenue par une méthode de type Tikhonov est donc une solution approchée au problème mal posé, stable par rapport aux données mais dépendante du paramètre de régularisation λ utilisé (ou d'un critère d'arrêt pour la version itérative). Il existe plusieurs techniques pour choisir le paramètre de régularisation, telles que le critère de Morozov [164], le critère de validation croisée [197] ou la technique de la L-curve [101, 102].

1.1.2 La méthode de quasi-réversibilité

La méthode de quasi-réversibilité, introduite par Lattès et Lions [131], consiste à transformer le problème de Cauchy mal posé ((1.1) et (1.2)) d'ordre 2 en une famille de problèmes bien posés d'ordre 4. Cette famille dépend d'un petit paramètre λ de telle manière que la solution régularisée u_λ tende vers "la solution exacte" u lorsque λ tend vers zéro [53].

On introduit les espaces V et V_0 :

$$\begin{aligned} V &= \left\{ v \in H^2(\Omega), v|_{\Gamma_d} = \phi_d, v'|_{\Gamma_d} = \psi_d \right\} \\ V_0 &= \left\{ v \in H^2(\Omega), v|_{\Gamma_d} = 0, v'|_{\Gamma_d} = 0 \right\} \end{aligned}$$

La formulation variationnelle de quasi-réversibilité pour le problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\lambda \in V \text{ tel que } \forall v \in V_0 : \\ (\Delta u_\lambda, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + \lambda(u_\lambda, v)_{H^2(\Omega)} = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Le problème (1.7) a une unique solution $u_\lambda \in V$, telle que $\|u_\lambda - u\|_{H^2(\Omega)} \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

La méthode de quasi-réversibilité a été implémentée pour résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace, sa facilité d'implémentation en utilisant des différences finies [126] ou des éléments finis de classe C^1 est remarquable. Bourgeois [51] propose une formulation de la méthode, pour le problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace, qui utilise des éléments finis de classe C^0 . Le choix du paramètre de régularisation λ , dont la solution dépend, est déterminant, notamment dans le cas où les données sont bruitées, c'est pourquoi une nouvelle version de la méthode d'optimisation basée sur la dualité et inspirée du principe de Morozov est introduite [52]. La méthode est également appliquée à la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz [178]. Le problème inverse d'obstacle est résolu avec des conditions aux limites de Dirichlet [53, 73] en couplant l'approche de

quasi-réversibilité à une méthode Level Set. Une “approche extérieure” [73] a récemment été appliquée au problème de Stokes [54] et au problème associé à l’équation de la chaleur [55]. Dardé et al. [74] s’intéressent à la version itérative de la méthode, qui consiste à résoudre itérativement des problèmes utilisant la méthode de quasi-réversibilité, la solution de chaque problème dépendant de la solution du problème précédent. Une suite de solutions, qui converge vers la solution exacte du problème lorsque les données sont exactes, est ainsi obtenue peu importe le choix du paramètre de régularisation λ . L’amplitude du bruit sur les données de conditions aux limites doit toutefois être connue, si ces dernières ne sont pas compatibles, afin d’utiliser le principe de Morozov pour arrêter le processus itératif.

1.1.3 Des méthodes de type contrôle optimal

Des méthodes permettent de régulariser le problème de Cauchy en le reformulant comme un problème de contrôle optimal.

Les conditions aux limites étant à déterminer sur la partie Γ_i , on considère la fonction sur Γ_i comme un contrôle $\eta \in L^2(\Gamma_i)$ dans une formulation de problème direct pour s’accorder aux données $\phi_d \in L^2(\Gamma_d)$ sur la partie Γ_d .

On considère alors le problème direct :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u = \eta, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \\ u' = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1.8)$$

avec $\psi_d \in L^2(\Gamma_d)$ et \mathcal{H} l’opérateur associé :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : L^2(\Gamma_i) &\longrightarrow L^2(\Gamma_d) \\ \eta \in L^2(\Gamma_i) &\longrightarrow \mathcal{H}\eta = u|_{\Gamma_d} \in L^2(\Gamma_d). \end{aligned}$$

L’existence et l’unicité d’une solution $u(\eta, \psi_d) \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ de (1.8) est garantie [137] dans le cas d’une frontière régulière Γ constituée de deux parties disjointes Γ_d et Γ_i .

Le but est de trouver η tel que $u(\eta, \psi_d)|_{\Gamma_d} = \phi_d$. Pour cela, on minimise la fonctionnelle :

$$J_\eta(v) = \frac{1}{2} \|v - \phi_d\|_{L^2(\Gamma_d)}^2 \quad (1.9)$$

par rapport à η , dont le gradient dépend de $S \in L^2(\Omega)$ la solution du problème adjoint :

$$\begin{cases} \Delta(S) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ S = 0, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \\ S'^* = \xi, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1.10)$$

avec $(\cdot)'^*$ l'opérateur adjoint de $(\cdot)'$. $\xi \in L^2(\Gamma_d)$ et \mathcal{H}^* est l'opérateur adjoint de \mathcal{H} tel que :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^* : L^2(\Gamma_d) &\longrightarrow L^2(\Gamma_i), \\ \xi \in L^2(\Gamma_d) &\longrightarrow \mathcal{H}^*\xi = -S'^* \Big|_{\Gamma_i} \in L^2(\Gamma_i).\end{aligned}$$

La détermination de η est ensuite réalisée en utilisant un algorithme itératif de descente. On peut par exemple citer l'algorithme du gradient conjugué, la méthode de Landweber-Fridman et la méthode de l'erreur minimale, que nous présentons par la suite.

La méthode du gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué [106] est une méthode de descente dépendante d'un paramètre, dont on rappelle l'algorithme :

- Étape 1 : Choisir une fonction arbitraire $\eta^1 \in L^2(\Gamma_i)$.
- Étape 2 : Résoudre, pour $k \geq 1$, le problème direct :

$$\begin{cases} \Delta(u^k) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u^k = \eta^k, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \\ u^k = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1.11)$$

afin de déterminer les quantités u^k , $\forall \underline{x} \in \Omega$ et u'^k , $\forall \underline{x} \in \Gamma_i$. On pose ensuite $\xi^k = \phi_d - u^k$, $\forall \underline{x} \in \Gamma_d$.

- Étape 3 : Résoudre, pour $k \geq 1$, le problème adjoint :

$$\begin{cases} \Delta(S^k) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ S^k = 0, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \\ S'^*k = \xi^k, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1.12)$$

pour déterminer α_{k-1} et ζ^k tels que :

$$\alpha_{k-1} = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ \frac{\|S'^*k\|_{L^2(\Gamma_i)}^2}{\|S'^*k-1\|_{L^2(\Gamma_i)}^2}, & k > 1 \end{cases}$$

$$\zeta^k = \begin{cases} -S'^*k, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i, k = 1 \\ -S'^*k + \alpha_{k-1}\zeta^{k-1}, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i, k > 1 \end{cases}$$

- Étape 4 : Résoudre, pour $k \geq 1$, le problème direct :

$$\begin{cases} \Delta(w^k) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ w^k = \zeta^k, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \\ w'^k = 0, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases}$$

pour déterminer β_k et η^{k+1} :

$$\beta_k = \frac{\|S'^{*k}\|_{L^2(\Gamma_i)}^2}{\|w^k\|_{L^2(\Gamma_d)}^2},$$

$$\eta^{k+1} = \xi^k + \beta_k \zeta^k, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_i.$$

- Étape 5 : Incrémenter k ($k = k + 1$) puis recommencer le processus itératif à l'étape 2 tant que le critère d'arrêt choisi n'est pas satisfait.

La méthode du gradient conjugué utilise la direction conjuguée, elle a donc l'avantage de converger plus vite que les algorithmes standards de gradient. On trouve des applications à des problèmes de Cauchy associés à différents opérateurs, comme l'équation de la chaleur [29, 104], l'équation de Laplace [103], l'équation de Lamé [154] et les équations de type Helmholtz [151].

La méthode de Landweber-Fridman

La méthode de Landweber-Fridman [88, 130] est une méthode régularisante itérative dépendante d'un paramètre γ dont l'algorithme s'écrit :

- Étape 1 : Choisir une fonction arbitraire $\eta^1 \in L^2(\Gamma_i)$.
- Étape 2 : Pour $k \geq 1$, déterminer u^k , $\forall \underline{x} \in \Omega$ et u'^k , $\forall \underline{x} \in \Gamma_i$ en résolvant le problème direct (1.11) et poser ensuite $\xi^k = \phi_d - u^k$, $\forall \underline{x} \in \Gamma_d$.
- Étape 3 : Mettre à jour la donnée de Dirichlet sur Γ_i :

$$\eta^{k+1} = \eta^k - \gamma S'^{*k}, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_i, \quad 0 < \gamma < \|\mathcal{H}\|^{-2},$$

en résolvant le problème adjoint (1.12).

- Étape 4 : Incrémenter k ($k = k + 1$) puis recommencer le processus itératif à l'étape 2 tant que le critère d'arrêt choisi n'est pas satisfait.

La méthode de Landweber est une variante de l'algorithme du gradient. Marin et al. utilisent la méthode des éléments de frontière pour l'implémenter dans le cas des problèmes de Cauchy associés à l'élasticité linéaire [160] ou à des équations de type Helmholtz [152]. Dans [109, 123, 138, 139, 199, 200], la méthode est appliquée à des problèmes de tomographie. La méthode a récemment été employée pour des problèmes inverses d'identification de sources pour l'équation d'Helmholtz modifiée [198] et pour l'équation parabolique de la chaleur à partir de données de Cauchy [112]. Dans ces derniers travaux [112], la méthode de Landweber permet d'obtenir une solution stable et la méthode du gradient conjugué est également employée pour accélérer la convergence. On déplore cependant le grand nombre d'itérations requis pour résoudre le problème en comparaison à d'autres procédures itératives régularisantes, telles que la méthode du gradient conjugué. Récemment,

Maxwell [163] a montré que l'algorithme itératif alternatif de Kozlov et al. [127], que nous présentons par la suite, pouvait être écrit sous la forme d'une itération de Landweber : il propose d'accélérer cet algorithme en utilisant l'algorithme du gradient conjugué.

La méthode de l'erreur minimale

Nous présentons une variante de la méthode du gradient conjugué, la méthode de l'erreur minimale [124], dont on rappelle l'algorithme :

- Étape 1 : Choisir une fonction arbitraire $\eta^1 \in L^2(\Gamma_i)$.
- Étape 2 : Pour $k \geq 1$, déterminer $u^k, \forall \underline{x} \in \Omega$ et $u'^k, \forall \underline{x} \in \Gamma_i$ en résolvant le problème direct (1.11) et poser ensuite $\xi^k = \phi_d - u^k, \forall \underline{x} \in \Gamma_d$.
- Étape 3 : Résoudre le problème adjoint (1.12) afin de déterminer $\gamma_{k-1}, \zeta^k, \delta_k$ et η^{k+1} tels que :

$$\gamma_{k-1} = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ \frac{\|\xi^k\|_{L^2(\Gamma_d)}^2}{\|S'^{*k-1}\|_{L^2(\Gamma_d)}^2}, & k > 1 \end{cases}$$

$$\zeta^k = \begin{cases} -S'^{*k}, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i, k = 1 \\ -S'^{*k} + \gamma_{k-1}\zeta^{k-1}, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i, k > 1 \end{cases}$$

$$\delta_k = \frac{\|\xi^k\|_{L^2(\Gamma_d)}^2}{\|\zeta^k\|_{L^2(\Gamma_i)}^2},$$

$$\eta^{k+1} = \eta^k + \delta_k \zeta^k, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_i.$$

- Étape 4 : Incrémenter k ($k = k + 1$) puis recommencer le processus itératif à l'étape 2 tant que le critère d'arrêt choisi n'est pas satisfait

Avec un choix approprié de critère d'arrêt, la méthode de l'erreur minimale a un effet régularisant et quelques itérations suffisent pour obtenir une solution numérique stable et précise [144]. La méthode a été implémentée pour les problèmes de Cauchy associés aux équations de Stokes [115], de Lamé [146] et de type Helmholtz [144]. Une limite de la méthode est soulignée dans [146], les conditions aux limites de Neumann ne peuvent pas être reconstruites avec précision sur le bord inaccessible.

1.2 Méthodes utilisant une reformulation du problème de Cauchy

Nous présentons ici quelques méthodes qui permettent de résoudre le problème de Cauchy mal posé en utilisant une reformulation qui nous ramène à des problèmes bien posés.

1.2.1 Méthode basée sur une procédure itérative alternée

Cette méthode itérative a été introduite par Kozlov et al. [127] pour résoudre les problèmes inverses de type Cauchy. Elle consiste à remplacer le problème mal posé par une suite de problèmes mixtes bien posés. Bien que la méthode soit applicable aux problèmes de Cauchy gouvernés par des équations aux dérivées partielles elliptiques, nous la présentons dans le cas du problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace.

L'algorithme itératif suivant permet la reconstruction de la solution et de sa dérivée normale sur Γ_i :

Étape 1 :

- Si $k = 1$, initialisation arbitraire de la solution $u^1, \forall \underline{x} \in \Gamma_i$,
ou
- Si $k > 1$, résoudre le problème direct mixte bien posé :

$$\begin{cases} \Delta(u^{2k-1}) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u^{2k-1} = \phi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u'^{2k-1} = u'^{2k-2}, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \end{cases} \quad (1.13)$$

pour déterminer $u^{2k-1}, \forall \underline{x} \in \Omega$ et $u'^{2k-1}, \forall \underline{x} \in \Gamma_i$.

Étape 2 : Ayant calculé la solution u^{2k-1} pour $k \geq 1$, déterminer $u^{2k}, \forall \underline{x} \in \Omega$ et $u'^{2k}, \forall \underline{x} \in \Gamma_i$, en résolvant le problème direct mixte bien posé :

$$\begin{cases} \Delta(u^{2k}) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u^{2k} = u^{2k-1}, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \\ u'^{2k} = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d. \end{cases} \quad (1.14)$$

Étape 3 : Incrémenter k ($k = k + 1$) puis recommencer le processus itératif à l'étape 1 tant que le critère d'arrêt choisi n'est pas satisfait.

Si $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ est une frontière régulière et si les données ϕ_d et ψ_d sont compatibles, alors la solution u^k calculée par le processus itératif converge vers la solution du problème de Cauchy [127].

La méthode itérative alternée est une méthode exacte, au sens où elle ne perturbe pas l'équation, puisque la solution qu'elle fournit converge vers la solution du problème de Cauchy et ne dépend pas d'un coefficient de régularisation. L'opérateur n'étant pas perturbé, il s'agit d'une méthode qui respecte la physique du problème.

Lesnic et al. [136] utilisent, quant à eux, la méthode des éléments de frontière pour implémenter l'algorithme dans le cas du problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace. La méthode est étendue à la résolution de problèmes mal posés

régis par des équations aux dérivées partielles elliptiques, paraboliques ou hyperboliques [30]. Dans le cas de données bruitées, des hypothèses de régularité sur les données doivent être faites pour estimer le taux de convergence. L'algorithme itératif alternatif est également implémenté par la méthode des éléments de frontière pour résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz [149]. Le critère régularisant de Morozov [164] peut être utilisé pour arrêter la procédure itérative dans le cas de données bruitées. Marin [143, 145] utilise la méthode des solutions fondamentales (MFS) pour implémenter l'algorithme itératif. La méthode numérique est alors combinée à une méthode de type Tikhonov [195] pour résoudre les problèmes mixtes bien posés qui interviennent à chaque itération. Le paramètre de régularisation est choisi en utilisant un critère de validation croisée [197] qui, de par son caractère itératif, augmente le temps de calcul. Le même auteur [147] utilise alors les méthodes de relaxation proposées par Jourhmane et al. [117] pour accélérer la vitesse de convergence de l'algorithme implémenté par la MFS. Berntsson et al. [43] implémentent également la méthode itérative avec la MFS pour résoudre le problème de Cauchy pour l'équation d'Helmholtz.

1.2.2 Méthode basée sur la minimisation d'une fonctionnelle énergétique

Andrieux et al. [9, 12] ont introduit une méthode similaire à la précédente basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur en énergie. La méthode consiste à minimiser l'écart entre deux champs distincts, chacun étant solution d'un problème bien posé auquel on a attribué une inconnue et une donnée aux limites du problème de Cauchy. La méthode est présentée, ici, dans le cas de l'équation de Laplace.

Le problème de Cauchy défini par (1.1) et (1.2) est décomposé en deux sous problèmes bien posés dont les deux champs distincts u_1 et u_2 sont respectivement solutions de :

$$\begin{cases} \Delta(u_1) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u_1 = \phi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u'_1 = \eta, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta(u_2) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u_2 = \tau, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \\ u'_2 = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (1.15)$$

avec (η, τ) les inconnues de Neumann et Dirichlet sur la partie Γ_i .

La méthode consiste à définir une fonctionnelle, notée $E(\eta, \tau)$, mesurant l'écart entre les champs u_1 et u_2 :

$$E(\eta, \tau) = \int_{\Omega} [\nabla(u_1(\eta)) - \nabla(u_2(\tau))]^2 dx. \quad (1.16)$$

On cherche alors à minimiser cette fonctionnelle, ce qui revient à résoudre le

problème suivant :

$$(\eta^*, \tau^*) = \arg \min_{(\eta, \tau)} E(\eta, \tau) \quad (1.17)$$

La fonctionnelle s'annulant à l'optimum lorsque les données sont compatibles, les champs u_1 et u_2 ainsi obtenus sont identiques et vérifient l'équation aux dérivées partielles (1.1) et les conditions aux limites (1.2). Ils fournissent alors la solution du problème de Cauchy.

La méthode est généralisable à différents problèmes régis par des opérateurs elliptiques, paraboliques ou hyperboliques. Elle a souvent été employée, pour des problèmes utilisant des opérateurs elliptiques, avec des applications dans les domaines de la thermique stationnaire [9, 25] ou de l'élasticité [5, 24]. Les résultats obtenus présentent cependant une instabilité numérique du fait de l'approximation de la solution en reformulant le problème mal posé en un problème bien posé. Rischette et al. [187] analysent la convergence numérique de la méthode et proposent un critère d'arrêt paramétré par le taux de bruit sur les données. Ce critère d'arrêt permet de stopper l'algorithme à l'itération qui fournit la meilleure solution en présence de données bruitées mais il n'évite pas l'influence du bruit et la solution calculée reste perturbée. Afin de remédier à cet inconvénient, une procédure de débruitage a posteriori a été proposée [186]. La solution est régularisée a posteriori en utilisant les méthodes de Tikhonov ou de variation totale. Elle dépend ainsi d'un paramètre de régularisation choisi par le critère de Morozov [164]. Cette procédure de débruitage, initialement appliquée à l'équation de la chaleur [26], est étendue à la résolution de problèmes de Cauchy paraboliques [188].

La méthode de minimisation d'une fonctionnelle énergétique est une application de l'erreur en relation de comportement [169] et est étendue dans le cadre de l'élasticité à des problèmes tridimensionnels. Récemment, Andrieux et al. [8] proposent une extension de ces travaux au cas des matériaux à comportement non-linéaire alors que Faverjon et al. [84] appliquent les méthodes dans le cas de matériaux à propriétés matérielles incertaines. L'application à l'identification de fissures est également proposée [6, 7], le déplacement, solution du problème de Cauchy, est recherché sur toute la surface enfermant la fissure et le saut de déplacement induit par la fissure ainsi que la géométrie de la fissure sont déterminés grâce des méthodes adaptées, parmi lesquelles on peut citer la méthode de l'écart à la réciprocité [72]. Le problème de Cauchy étant résolu sans régularisation, la qualité du déplacement reconstruit est affectée et laisse supposer que l'application à des situations réelles nécessiterait l'ajout de régularisation.

1.2.3 L'algorithme de Steklov-Poincaré

Belgacem et El Fekih [31] proposent une formulation du problème de Cauchy comme un problème de Steklov-Poincaré. Il s'agit de résoudre le problème de Cau-

chy en utilisant, comme intermédiaires, deux problèmes directs impliquant respectivement les données de Dirichlet et de Neumann. Nous présentons l'algorithme pour l'équation de Laplace.

On pose $\lambda = u|_{\Gamma_i}$ et on considère les problèmes elliptiques de Dirichlet et de Neumann dont u_D et u_N sont respectivement solutions de :

$$\begin{cases} \Delta(u_D(\lambda)) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u_D(\lambda) = \phi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u_D(\lambda) = \lambda, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta(u_N(\lambda)) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u'_N(\lambda) = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u_N(\lambda) = \lambda, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \end{cases} \quad (1.18)$$

La trace λ sur Γ_i de la solution u satisfait alors l'équation :

$$u'_N(\lambda) = u'_D(\lambda) \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_i \quad (1.19)$$

Il est montré, en utilisant le théorème de Holmgren, que ce problème a au plus une solution et que pour des données compatibles, $u_D = u_N = u$ correspond à la solution du problème de Cauchy.

Soit le couple (u_N^*, u_D^*) qui vérifie :

$$\begin{cases} \Delta(u_D^*) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u_D^* = \phi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u_D^* = 0, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta(u_N^*) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u_N^{*'} = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u_N^* = 0, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \end{cases} \quad (1.20)$$

et les extensions harmoniques de λ à Ω , $(u_N^0(\lambda), u_D^0(\lambda))$ qui vérifient :

$$\begin{cases} \Delta(u_D^0(\lambda)) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u_D^0(\lambda) = 0, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u_D^0(\lambda) = \lambda, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta(u_N^0(\lambda)) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u_N^{0'}(\lambda) = 0, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u_N^0(\lambda) = \lambda, & \forall \underline{x} \in \Gamma_i \end{cases} \quad (1.21)$$

Il vient que $u_N(\lambda) = u_N^* + u_N^0(\lambda)$ et $u_D(\lambda) = u_D^* + u_D^0(\lambda)$. L'équation (1.19) revient à imposer que λ satisfasse l'équation de Cauchy-Steklov-Poincaré :

$$S\lambda = \Phi, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_i \quad (1.22)$$

où $\Phi := -u_N^{*'} + u_D^{*'}$ et S est l'opérateur de Cauchy-Steklov-Poincaré défini par $S\mu := u_N^{0'}(\mu) - u_D^{0'}(\mu)$.

L'opérateur S est compact, son inverse n'est donc pas borné et par conséquent le problème de Cauchy est mal posé. Après approximation par éléments finis, la formulation variationnelle du problème décrite dans [1] amène à un système linéaire mal conditionné de la forme $S_h x = \Phi_h$. Le système a une unique solution si les données sont compatibles, néanmoins si celles-ci sont bruitées la compatibilité est perdue et

résoudre le système revient à chercher une quasi-solution au sens des moindres carrés. Le système discret doit alors être résolu à l'aide d'une méthode régularisante, comme par exemple une méthode de type gradient conjugué [1]. La construction d'une solution stable du problème de Steklov-Poincaré en utilisant une méthode de régularisation est étudiée par Azaïez et al. [21].

La méthode de régularisation de Lavrentiev [132], qui peut être considérée comme une méthode de type Tikhonov, a largement été utilisée et étudiée pour régulariser le problème de Cauchy écrit sous la forme variationnelle de Steklov-Poincaré [32]. Belgacem et al. [33] proposent un critère de convergence qui découle du choix du paramètre de régularisation par le principe de Morozov [164]. La solution variationnelle discrétisée par éléments finis et régularisée par la méthode de Lavrentiev est introduite dans [19] et récemment il a été montré que le cadre variationnel de Steklov-Poincaré est également adapté à l'analyse de convergence de la méthode éléments finis semi-discrète [34]. L'algorithme de Steklov-Poincaré est également applicable aux problèmes inverses de reconstruction de sources supportées par des surfaces avec la nécessité de connaître la localisation des sources [20]. On trouve également une application de l'opérateur de Steklov-Poincaré à l'identification de fissures planes dans un solide élastique tridimensionnel [118].

En résumé, les méthodes présentées pour reformuler le problème de Cauchy mal posé en un problème bien posé sont étroitement liées et les solutions qu'elles procurent nécessitent une régularisation afin d'être stables vis à vis de petites perturbations sur les données. Ben Abda et al. [36] proposent de reformuler le problème de Cauchy comme un problème de contrôle optimal en utilisant la formulation de la méthode énergétique [9] avec une fonction de coût régularisée. Ils utilisent une méthode de factorisation qui transforme le problème elliptique en deux problèmes paraboliques et montrent que pour certaines valeurs des paramètres de régularisation on retrouve l'approche de Steklov-Poincaré [31]. La méthode énergétique est également appliquée au problème de Cauchy associé au système de Stokes [39] et les auteurs montrent que la première condition d'optimalité est équivalente à résoudre un problème à l'interface régi par un opérateur de Steklov-Poincaré. Les résultats obtenus sont comparés à ceux fournis par la procédure itérative alternée également adaptée au système de Stokes [28]. L'algorithme itératif alternatif peut-être interprété comme une méthode de minimisation à direction alternée d'une fonctionnelle énergétique.

1.3 Résolution par projection dans une base de solutions de l'opérateur

Il s'agit de méthodes non itératives qui proposent de déterminer la solution du problème de Cauchy en utilisant une projection dans une base de solutions de l'opérateur.

Une première approche de ce type est basée sur les outils de l'analyse complexe et de la théorie des fonctions analytiques, il s'agit d'un schéma assez naturel qui consiste à trouver une solution qui est la plus proche des données et qui a un comportement continu sur la partie inaccessible du bord. La procédure peut être formulée [134] comme un problème d'approximation vérifiant une contrainte en norme dans l'espace de Hardy [27]. Elle est introduite pour le problème inverse d'identification du coefficient de Robin à partir de données de Cauchy pour l'équation de Laplace [60] et connaît les mêmes limites que les outils de l'analyse complexe. Elle ne peut donc pas être étendue immédiatement à des géométries complexes et à d'autres opérateurs que le Laplacien. Cette méthode d'approximation sous contraintes dans les espaces de Hilbert de fonctions analytiques est également appliquée aux problèmes inverses de détection de fissures ou de sources dans un matériau à partir de données de Cauchy [133]. Ces premiers résultats limités aux domaines bidimensionnels simplement connexes sont par la suite étendus à des géométries annulaires [113].

D'autres approches procèdent par projection dans l'espace de Fourier [166] et certaines sont basées sur des méthodes de troncature. On peut citer une méthode basée sur la transformée de Fourier tronquée [182] qui fournit la solution du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz. La transformée de Fourier permet aussi d'obtenir une solution régularisée à partir d'une équation intégrale directement perturbée par la troncature des hautes fréquences [174]. Le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz peut également être régularisé en utilisant une décomposition dans la base des ondelettes de Meyer [121].

Il est également mentionné que tronquer la factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive pourrait avoir un effet stabilisant [119], il s'agit de régulariser le problème en restreignant le nombre de degrés de liberté. La méthode de séparation des variables [176] est utilisée pour résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace.

1.4 Méthodes de résolution pour les systèmes discrets mal conditionnés

Selon la méthode numérique utilisée, certaines approches précédemment présentées amènent finalement à résoudre un système discret mal conditionné. Il est

alors nécessaire d'utiliser des méthodes numériques adaptées pour obtenir une quasi-solution du système.

En considérant la forme discrétisée de l'équation (1.1) obtenue par application d'une des différentes méthodes numériques, le problème est réduit à un système discret de M équations algébriques linéaires à N inconnues de la forme :

$$AX = B \quad (1.23)$$

où A est une matrice de taille $M \times N$, B est un vecteur à M composantes et X désigne le vecteur constitué des N inconnues.

La résolution directe du système (1.23) ne mène pas à une solution stable si la matrice A est mal conditionnée ou si les données B sont entachées de bruit.

1.4.1 Version en dimension finie de la méthode de Tikhonov

La méthode de Tikhonov [195], dont le principe général a été introduit au paragraphe 1.1, est largement utilisée pour résoudre les systèmes mal conditionnés (1.23).

La solution régularisée de Tikhonov du système d'équations (1.23) s'écrit :

$$X_\lambda : J_\lambda(X_\lambda) = \min_{X \in \mathbb{R}^N} J_\lambda(X), \quad (1.24)$$

où J_λ représente la fonctionnelle de Tikhonov d'ordre p :

$$J_\lambda(X) = \|AX - B\|_2^2 + \lambda \|L^p X\|_2^2.$$

La constante $\lambda > 0$ est le paramètre de régularisation à choisir. La matrice $L^p \in \mathbb{R}^{(N-p) \times N}$ introduit une contrainte d'ordre p sur la solution, contrôlant ainsi les variations de la solution. Par exemple, dans le cas des méthodes de régularisation de Tikhonov d'ordre zéro, un et deux ($p = 0, 1, 2$) la matrice L^p est donnée par

$$L^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad L^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N},$$

$$L^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-2) \times N}.$$

La solution régularisée de Tikhonov X_λ est la solution de l'équation régularisée :

$$X_\lambda = [A^T A + \lambda L^{pT} L^p]^{-1} A^T B.$$

Un terme de régularisation est donc ajouté pour atténuer la contribution du bruit sur les données et contrôler la norme de la solution. Le paramètre de régularisation introduit pour contrôler la norme de la solution doit être judicieusement choisi : si on impose une régularisation trop importante (pour un λ trop grand) alors la solution ne sera pas assez proche des données et a contrario si la régularisation est trop faible (pour un λ trop petit) alors la norme du résidu sera trop grande, la solution sera proche des données mais dominée par le bruit de mesure, et la norme que l'on cherche à contrôler sera trop grande. Il semble alors naturel de tracer la norme de la solution comme une fonction de la norme du résidu paramétrée par le paramètre de régularisation λ , il s'agit de la L-curve [100], une courbe de compromis entre les deux quantités qui doivent être contrôlées. Bien que cette technique soit robuste, elle présente des désavantages : d'une part, dans le cas de solutions très régulières, le λ calculé est mauvais et d'autre part, la courbe L-curve a un comportement asymptotique à mesure que la taille du problème augmente [99]. D'autres procédures spécifiques au choix du paramètre de régularisation peuvent également être utilisées [164, 197].

De nombreux travaux utilisent la méthode de Tikhonov pour régler les problèmes de stabilité des solutions. La méthode de Tikhonov est combinée à la méthode des solutions fondamentales (MFS) [143, 145] pour résoudre les problèmes mixtes bien posés qui interviennent à chaque itération de l'algorithme itératif alternatif [127]. La solution obtenue par la méthode énergétique peut être régularisée a posteriori lorsque les données sont bruitées [186]. Plusieurs variantes de la technique sont disponibles [81], parmi lesquelles on peut citer la méthode de Lavrentiev [132] très utilisée dans le cadre variationnel de Steklov-Poincaré [32].

Plusieurs méthodes numériques peuvent être employées pour discrétiser le problème inverse, on cite à titre d'exemples les méthodes des différences finies, des éléments finis (FEM), des éléments de frontière (BEM) et des solutions fondamentales (MFS). On peut mentionner qu'avec la méthode des solutions fondamentales [128] le système d'équations est, par construction, mal conditionné même dans le cas d'un problème direct. Le système mal conditionné généré par la MFS est résolu en employant la méthode de Tikhonov pour des problèmes en élasticité linéaire [159], en thermique [141, 191, 192], de type Helmholtz [44, 140, 201] ou en thermo-élasticité [155]. La méthode régularisante est très souvent combinée avec la méthode des éléments de frontière (BEM) [150, 157, 158].

Burman [57] présente des techniques pour stabiliser la solution discrète obtenue par la méthode des éléments finis. La méthode de Tikhonov est par exemple utilisée dans le cadre des éléments finis pour stabiliser la solution du problème de Cauchy en élasticité linéaire [46]. On trouve également des applications aux problèmes inverses de conduction [92] et d'identification de sources [63].

1.4.2 La méthode de décomposition en valeurs singulières

La méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) exprime la solution du système matriciel (1.23) comme une combinaison linéaire de vecteurs singuliers.

La matrice A peut être décomposée en valeurs singulières, sous la forme :

$$A = W X V^T = \sum_{i=1}^N w_i \xi_i v_i^T$$

avec $W = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^{M \times N}$ et $V = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ des matrices de colonnes orthonormales et $X = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_N)$ une matrice diagonale à éléments diagonaux positifs et rangés tels que $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_N \geq 0$. Ces éléments diagonaux sont les valeurs singulières de la matrice A et les vecteurs w_i et v_i sont les vecteurs singuliers à droite et à gauche, respectivement de la matrice A .

Dans le cas où les données B ne sont pas perturbées, on ignore les composantes de la décomposition associées aux valeurs singulières nulles et on calcule les solutions du système :

$$X = \sum_{i=1}^{\text{rang}(A)} \frac{w_i^T B}{\xi_i} v_i. \quad (1.25)$$

En pratique, la matrice A présente souvent des valeurs propres ξ_i très petites mais non nulles, ce qui produit un effet amplificateur de la perturbation et rend la solution (1.25) instable. En effet la norme de la solution X définie par

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{w_i^T B}{\xi_i} \right)^2}$$

devient très grande en présence de petites valeurs de ξ_i .

Pour contrôler la norme de la solution et ainsi rendre la solution stable, une troncature à un ordre $n < \text{rang}(A)$ permet d'obtenir une quasi-solution stable donnée par :

$$X^n = \sum_{i=1}^n \frac{w_i^T B}{\xi_i} v_i = A^+ B. \quad (1.26)$$

où A^+ correspond au pseudo-inverse de la matrice A . On parle de décomposition en valeurs singulières tronquées (TSVD) [101].

La solution régularisée (tronquée) décomposée en valeurs singulières est obtenue en remplaçant la matrice A mal conditionnée par sa décomposition tronquée et en calculant ensuite la solution de norme minimale au sens des moindres carrés. L'indice de troncature optimal n agit comme un paramètre de régularisation, il est à choisir avec les critères usuels, comme celui de la L-curve [101, 102], de Morozov [164] ou de validation croisée généralisée [197]. Le critère de Morozov nécessite une estimation du niveau de bruit sur les données, qui n'est pas accessible pour des problèmes réels. La méthode de courbe en L (L-curve) et le critère de validation

croisée généralisé sont donc plus adaptés dans le cas de mesures réelles.

La méthode des solutions fondamentales combinée à la méthode SVD a été employée par Ramachandran [179] pour obtenir les solutions numériques de problèmes associés aux équations de Laplace et de Helmholtz dans le cas de données non bruitées. Jin [114] s'intéresse, en utilisant la version tronquée (TSVD), au cas où les données sont éventuellement bruitées pour les problèmes associés aux opérateurs bilaplacien et de Laplace. Il est remarqué qu'en utilisant la TSVD pour résoudre le système matriciel fourni par la MFS la précision des solutions numériques est relativement indépendante de la position des sources (MFS). Le problème associé à l'équation de Poisson est également résolu en présence de sources par la combinaison des méthodes MFS et TSVD [142]. La méthode de décomposition en valeurs singulières est aussi utilisée pour résoudre le système discret obtenu après discrétisation en utilisant la méthode BEM [153, 156]. Récemment, Bilotta et Turco [47] régularisent la solution obtenue par la méthode SVD en utilisant la méthode de Tikhonov dans le cadre des éléments finis pour les problèmes de corrosion. Le paramètre de régularisation est choisi avec le critère de validation croisée généralisé [197]. Il est important de noter que cette méthode n'est pas adaptée lorsque la taille des systèmes d'équations est trop grande.

1.5 La méthode de régularisation évanescence

1.5.1 Principe de la méthode

La méthode de régularisation évanescence introduite par Cimetière et al. [65, 67] est différente par le fait qu'elle distingue les quantités fiables des quantités non fiables : l'équation d'équilibre (1.1) est supposée vérifiée exactement et représentant bien le phénomène réel que l'on cherche à modéliser alors que les conditions aux limites (1.2) accessibles peuvent être entachées d'erreurs. La méthode de régularisation évanescence repose donc sur l'idée de rechercher parmi toutes les solutions satisfaisant l'équilibre (1.1) celle qui s'approche au mieux des conditions aux limites (1.2) disponibles sur une partie de la frontière. Les auteurs répondent ainsi à leurs objectifs en proposant une méthode de régularisation qui permet d'obtenir une solution stable qui ne dépend pas d'un paramètre de régularisation et de débruiter les conditions aux limites en les recalculant.

1.5.2 Formulation de la méthode

La solution du problème est recherchée dans l'espace $H(\Omega)$ des solutions de l'équation d'équilibre (1.1) :

$$H(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ; L(v) = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

L'espace $H(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$. Il s'agit d'un espace de Hilbert lorsqu'il est équipé du produit scalaire usuel de $H^1(\Omega)$.

On note v' la dérivée normale de v sur Γ . Pour v dans $H(\Omega)$ on a $v' \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Les traces $(v|_{\Gamma}, v'|_{\Gamma})$ des éléments v de $H(\Omega)$ engendrent l'espace $H(\Gamma)$ des paires compatibles :

$$H(\Gamma) = \{\underline{U} = (u, u') \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) ; \exists v \in H(\Omega) \text{ tel que } v|_{\Gamma} = u, v'|_{\Gamma} = u'\}$$

$H(\Gamma)$ est un sous-espace fermé de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour le produit scalaire :

$$\langle \underline{U}, \underline{V} \rangle_{\Gamma} = \langle u, v \rangle_{\frac{1}{2}, \Gamma} + \langle u', v' \rangle_{-\frac{1}{2}, \Gamma}$$

On peut définir $H(\Gamma_d)$ l'espace des restrictions à Γ_d des éléments de $H(\Gamma)$. Cet espace est muni du produit scalaire et de la norme induits par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ de $H(\Gamma)$ et sa norme $\|\cdot\|_{\Gamma}$.

Formulation équivalente du problème modèle

Soit $\underline{\Phi}_d = (\phi_d, \psi_d)$ un couple de données compatibles. Une formulation équivalente du problème modèle de Cauchy défini par (1.1) et (1.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{U}_e = (u, u') \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \underline{U}_e = \underline{\Phi}_d \text{ sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (1.27)$$

Ce problème est mal posé au sens d'Hadamard [97] car même s'il admet, lorsque les données $\underline{\Phi}_d$ sont compatibles, une unique solution qui correspond à la solution du problème de Cauchy, cette solution ne dépend pas continûment des données $\underline{\Phi}_d$. Les techniques usuelles employées pour résoudre les problèmes directs ne permettent pas de résoudre ce problème mais il est possible de rechercher cette solution par l'intermédiaire d'un problème d'optimisation.

La solution de l'équilibre qui s'approche au mieux des données

L'idée est de rechercher parmi toutes les solutions de l'équation d'équilibre celle qui s'approche au mieux des conditions aux limites accessibles à la mesure. Les données, souvent issues de mesures expérimentales, ne peuvent pas être considérées comme parfaites, les conditions d'optimalité sont alors vérifiées aux erreurs de mesures près. En revanche, l'équilibre doit être vérifié de manière exacte.

La solution du problème de Cauchy est alors définie en tant qu'élément proximal, solution du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{U} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J(\underline{U}) \leq J(\underline{V}), \forall \underline{V} \in H(\Gamma) \text{ avec} \\ J(\underline{V}) = \|\underline{V} - \underline{\Phi}_d\|_{\Gamma_d}^2 \end{cases} \quad (1.28)$$

Le problème (1.28) reste mal posé. En effet, même s'il admet une unique solution, il est toujours possible de trouver une solution \underline{U} dans l'espace $H(\Gamma)$ dont la restriction à Γ_d est aussi proche que l'on veut de la donnée $\underline{\Phi}_d$, entraînant ainsi une solution instable sur la partie complémentaire de la frontière.

Détermination de la solution grâce à un processus itératif

Afin d'éviter l'instabilité de la solution, il est nécessaire d'introduire un terme de contrôle dans la fonctionnelle J . Le problème d'optimisation (1.28) est remplacé par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{U} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c(\underline{U}) \leq J_c(\underline{V}), \forall \underline{V} \in H(\Gamma) \text{ avec} \\ J_c(\underline{V}) = \|\underline{V} - \underline{\Phi}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\underline{V} - \underline{\Phi}\|_{\Gamma}^2 \end{cases} \quad (1.29)$$

où c est un coefficient réel strictement positif et $\underline{\Phi}$ est un élément de $H(\Gamma)$.

Lemme 1.

Le problème (1.29) admet une unique solution caractérisée par :

$$\left\langle \underline{U}|_{\Gamma_d} - \underline{\Phi}_d, \underline{V}|_{\Gamma_d} \right\rangle_{\Gamma_d} + c \left\langle \underline{U} - \underline{\Phi}, \underline{V} \right\rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \underline{V} \in H(\Gamma) \quad (1.30)$$

La démonstration de ce lemme est disponible dans [65].

L'ajout du terme de contrôle rend le problème d'optimisation (1.29) bien posé au sens d'Hadamard et en particulier sa solution est stable vis à vis des données $\underline{\Phi}_d$. Le terme de contrôle $c \|\underline{V} - \underline{\Phi}\|_{\Gamma}^2$ peut être considéré comme un terme régularisant et il agit sur l'ensemble de la frontière Γ . Le terme régularisant a pour effet de régler les problèmes de stabilité mais la solution du problème (1.29) dépend du coefficient c et du choix de $\underline{\Phi}$. Pour s'affranchir de cette dépendance par rapport à c et $\underline{\Phi}$, une version itérative est introduite [65,67] et la solution de (1.27) est considérée comme la limite d'une suite de problèmes d'optimisation bien posés.

L'algorithme itératif s'écrit :

Étant donné $c > 0$ et $\underline{U}^0 \in H(\Gamma)$,

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{U}^{k+1} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\underline{V}), \quad \forall \underline{V} \in H(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{V}) = \|\underline{V} - \underline{\Phi}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\underline{V} - \underline{U}^k\|_{\Gamma}^2 \end{cases} \quad (1.31)$$

D'après le Lemme 1, à chaque itération, il existe un unique élément optimal \underline{U}^{k+1} caractérisé par

$$\left\langle \underline{U}^{k+1} \Big|_{\Gamma_d} - \underline{\Phi}_d, \underline{V} \Big|_{\Gamma_d} \right\rangle_{\Gamma_d} + c \left\langle \underline{U}^{k+1} - \underline{U}^k, \underline{V} \right\rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \underline{V} \in H(\Gamma) \quad (1.32)$$

Lors de ce processus itératif, l'équation d'équilibre (1.1) est prise en compte de manière exacte puisqu'à chaque itération la recherche de l'élément optimal est effectuée dans l'espace $H(\Gamma)$. Deux termes, qui ont des rôles différents, composent les fonctionnelles à optimiser. Le premier terme, qui est un terme de relaxation, représente l'écart entre l'élément optimal \underline{U}^{k+1} et les conditions aux limites surabondantes $\underline{\Phi}_d$. Il agit uniquement sur Γ_d et permet de relaxer les données éventuellement entachées d'un bruit de mesure. Le second terme, le terme de régularisation, intervient sur toute la frontière Γ et non seulement où les conditions aux limites sont manquantes. Il contrôle la distance entre deux éléments optimaux successifs. Ce dernier tend vers zéro au fur et à mesure des itérations, ce qui justifie l'indépendance de la solution par rapport à c . Ainsi, à chaque itération, on calcule une solution exacte du problème physique (1.1) qui s'accorde au mieux aux données (1.2) et qui ne s'éloigne pas trop de la solution optimale obtenue à l'itération précédente.

La démonstration du résultat de convergence suivant est également disponible dans [65] :

Théorème 1.

Soit $\underline{\Phi}_d$ un couple de données compatibles de $H(\Gamma_d)$ associé au couple \underline{U}_e solution de (1.27), alors la suite (\underline{U}^k) définie par l'algorithme itératif (1.31) converge fortement vers \underline{U}_e sur Γ_d et faiblement vers \underline{U}_e sur Γ .

1.5.3 Formulation en dimension finie de l'algorithme de régularisation évanescence

Par souci de simplicité, nous notons de la même manière, \underline{U}^k , la solution continue et le vecteur composé des valeurs discrètes sur le bord. La discrétisation de la formulation continue (1.31) permet d'écrire le $k^{\text{ème}}$ terme de la suite $\{\underline{U}^k\}_{k>0}$ comme le vecteur $\underline{U}^k = (U_1^k, \dots, U_N^k, U_1^k, \dots, U_M^k)$ composé des N valeurs discrètes de la fonction u sur toute la frontière Γ et des M valeurs discrètes de la dérivée normale u' .

Soit $c > 0$, le terme \underline{U}^{k+1} de la suite est défini par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{U}^{k+1} \in H_N(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\underline{V}), \quad \forall \underline{V} \in H_N(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{V}) = \|\underline{V} - \underline{U}^d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\underline{V} - \underline{U}^k\|_{\Gamma}^2 \end{cases} \quad (1.33)$$

avec $\underline{U}^d = (U_1^d, \dots, U_p^d, U_1^d, \dots, U_q^d)$ le vecteur composé des $p + q$ valeurs discrètes des données surabondantes sur Γ_d et $H_N(\Gamma)$ l'espace qui caractérise de manière discrète les solutions de l'équation d'équilibre. La caractérisation en dimension

finie des solutions d'équilibre peut être obtenue en utilisant différentes méthodes numériques telles que la méthode des éléments de frontière [79], la méthode des éléments finis [65, 78] ou la méthode des solutions fondamentales [148].

La résolution du “problème de Cauchy discret” revient à chercher dans $H_N(\Gamma)$, la ou les solutions qui vérifient exactement les $p+q$ données. Dans le cas où $(p+q) > N$, cette solution ne peut être obtenue qu'au sens des moindres carrés pour un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_d}$ induit par celui de $H_N(\Gamma)$. Cependant, si $(p+q) < N$ il y a une infinité de solutions, qui sont définies à un élément du noyau de “l'opérateur trace discret” sur Γ_d près.

On introduit Z_N ce noyau, il s'agit du sous-espace de $H_N(\Gamma)$ formé des éléments nuls sur Γ_d :

$$Z_N(\Gamma) = \left\{ \underline{U} = (U, U') \in H_N(\Gamma); U_1 = \dots = U_p = 0, U'_1 = \dots = U'_q = 0 \right\} \quad (1.34)$$

On note $Z_N^\perp(\Gamma)$ l'espace orthogonal à $Z_N(\Gamma)$ dans $H_N(\Gamma)$:

$$Z_N^\perp(\Gamma) = \left\{ \underline{U} = (U, U') \in H_N(\Gamma); \langle \underline{U}, \underline{V} \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \underline{V} \in Z_N(\Gamma) \right\} \quad (1.35)$$

On peut ainsi écrire le problème de Cauchy discret :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{U}_N \in Z_N^\perp(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \langle \underline{U}_N - \underline{U}^d, \underline{V} \rangle_{\Gamma_d} = 0, \quad \forall \underline{V} \in Z_N^\perp(\Gamma) \end{array} \right. \quad (1.36)$$

Ce problème possède une unique solution.

Le résultat de convergence suivant, dont la démonstration est disponible dans [65], a été établi :

Théorème 2.

Si le premier terme de la suite est $\underline{U}^0 = 0$ alors :

- tous les termes de la suite $\left\{ \underline{U}^k \right\}_{k>0}$ sont dans $Z_N^\perp(\Gamma)$,
- la suite converge et sa limite \underline{U}_N est dans $Z_N^\perp(\Gamma)$ et ne dépend pas de la valeur de c ,
- la limite \underline{U}_N de la suite est la solution du problème de Cauchy discret (1.36).

Il est alors important d'initialiser l'algorithme avec $\underline{U}^0 = 0$ car si nous utilisons par exemple $\underline{U}^0 = \underline{Y}^0 + \underline{Z}^0$ avec $\underline{Y}^0 \in Z_N^\perp(\Gamma)$ et $\underline{Z}^0 \in Z_N(\Gamma)$ l'algorithme convergera vers $\underline{U}^L = \underline{U}_N + \underline{Z}^0$ au lieu de \underline{U}_N .

La méthode de régularisation évanescence introduite pour résoudre les problèmes de Cauchy associés à l'équation de Laplace [65,67] est généralisable à tout opérateur elliptique. Implémentée par la méthode des éléments finis, elle est appliquée à des

problèmes de complétion de données en élasticité linéaire [78]. Dans ces travaux, un problème de compression d'un cylindre élastique entre deux plateaux rigides parallèles est étudié et la méthode permet d'identifier des frontières inconnues, telles que les zones de contact. En plus d'une bonne approximation de l'extension des zones de contact, la répartition des efforts sur celles-ci est retrouvée. Ces travaux en élasticité linéaire [78] amènent aux mêmes conclusions que celles formulées pour l'équation de Laplace : l'algorithme itératif est très stable vis à vis du bruit sur les données, les reconstructions de la solution montrent que les données sont débruitées et les reconstructions de la dérivée normale sont nettement moins précises que celles de la solution, avec notamment une difficulté à débruiter la donnée ψ_d .

Dans le but d'améliorer la reconstruction de la dérivée normale, des méthodes d'ordres supérieurs [75, 76] ont été introduites, en particulier pour traiter des géométries à bord non réguliers (présence de coins par exemple). Récemment une méthode de complétion harmonique discrète est proposée [77] pour résoudre des problèmes de Cauchy à nombre d'inconnues supérieur au nombre de données, l'idée est de chercher la solution dans un espace de fonction harmonique discrète pour lequel l'existence et l'unicité d'une continuité harmonique discrète est garantie.

On trouve également des travaux de complétion de données en théorie des plaques minces [82] dans lesquels l'auteur montre que les résultats établis pour l'opérateur Laplacien sont généralisables à l'opérateur bilaplacien.

La méthode de régularisation évanescence peut également être vue comme un préalable à l'identification. En effet, il est possible de combiner la méthode de complétion de données à la méthode de l'écart à la réciprocité [38, 66] pour identifier des fissures rectilignes lorsque le champ de température n'est pas accessible sur toute la frontière. La méthode de l'écart à la réciprocité [72] nécessitant de connaître les données surabondantes sur toute la frontière, la méthode de régularisation évanescence est utilisée pour fournir ces données sur tout le bord à partir de données de Cauchy. D'autres travaux d'identification [80] permettent d'identifier des paramètres comme le coefficient de frottement de la loi de Coulomb.

En plus d'être généralisable à tout opérateur elliptique, la méthode de régularisation évanescence peut être implémentée par différentes méthodes numériques, comme la méthode des éléments de frontière [79], la méthode des éléments finis [66, 78, 80] et la méthode des solutions fondamentales [148].

1.6 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons recensé, de façon non exhaustive, les principales méthodes utilisées pour la résolution des problèmes de complétion de données de type Cauchy.

Les méthodes de Tikhonov et de quasi-réversibilité sont des méthodes qui permettent de régulariser le problème continu. La solution est contrôlée via un terme de régularisation qui perturbe l'opérateur.

Nous pouvons utiliser des variantes de l'algorithme du gradient pour régulariser le problème continu. Elles reformulent le problème de Cauchy en un problème de contrôle optimal et elles diffèrent par leur direction de descente respective : les méthodes de Landweber-Fridman, du gradient conjugué et de l'erreur minimale. La méthode de Landweber-Fridman a le désavantage de dépendre d'un paramètre alors que les méthodes de gradient conjugué et de l'erreur minimale sont moins régulières.

D'autres méthodes proposent de résoudre le problème de Cauchy en utilisant une reformulation du problème qui permet de se ramener à des problèmes bien posés au sens d'Hadamard, parmi celles-ci on peut retenir un algorithme itératif alternatif, une méthode basée sur la minimisation d'une erreur en énergie et un algorithme de Steklov-Poincaré. L'algorithme itératif alternatif converge vers la solution du problème de Cauchy. La solution ne dépend donc pas d'un coefficient de régularisation. Des hypothèses de régularité sur les données sont nécessaires pour traiter des données bruitées. Les méthodes énergétique et de Steklov-Poincaré doivent faire appel a posteriori à des techniques de régularisation pour stabiliser la solution.

Le problème continu peut également être résolu par projection de la solution dans une base de solutions de l'opérateur, ces méthodes présentent l'avantage de ne pas perturber l'opérateur mais sont rapidement limitées à des opérateurs spécifiques ou des géométries simples.

Nous nous sommes également intéressés aux méthodes qui permettent de résoudre un système discret mal conditionné. La méthode de Tikhonov (et notamment sa version itérative) est largement utilisée pour régulariser les problèmes discrets, elle permet d'atténuer la contribution du bruit sur les données et de maintenir la norme de la solution à une taille raisonnable en ajoutant un terme régularisant. La méthode de décomposition en valeurs singulières est également destinée à cet usage, elle dépend d'un paramètre de régularisation pour traiter des données bruitées et n'est pas adaptée aux systèmes de grandes tailles. Plusieurs critères d'arrêt sont utilisés pour choisir le paramètre de régularisation, la plupart d'entre eux nécessitent des informations a priori sur la solution, en particulier l'estimation du niveau de bruit sur les données est nécessaire pour le critère de Morozov. Le critère de validation croisée et celui de la L-curve sont alors préférés dans le cas de mesures réelles.

Nous nous sommes attardés sur une méthode itérative à effet régularisant évanescent, elle repose sur l'idée de chercher parmi toutes les solutions satisfaisant l'équilibre celle qui s'approche au mieux des conditions aux limites surabondantes

disponibles sur une partie de la frontière. C'est une méthode qui diffère des autres par le fait qu'elle distingue les quantités fiables des quantités non fiables. La résolution du problème inverse est ramenée à une suite de problèmes d'optimisation sous contraintes (algorithme de point fixe) qui fait intervenir plusieurs termes dans la fonctionnelle. Un premier terme de relaxation représente l'écart entre les données et la solution optimale calculée. Un second terme de régularisation qui tend vers zéro au fur et à mesure des itérations, agit sur tout le domaine et exprime l'écart entre deux solutions optimales. La solution ainsi calculée ne dépend pas d'un coefficient de régularisation. Elle vérifie l'équation d'équilibre et est stable vis à vis du bruit sur les données puisque celles-ci sont recalculées afin d'être compatibles. La méthode est en particulier, capable de débruiter les données.

Nous résumons dans le Tableau 1.1 les principales caractéristiques des méthodes présentées. Dans un souci de simplicité et de présentation, nous choisissons de limiter la comparaison aux méthodes itérative alternée et de minimisation d'une erreur en énergie, aux méthodes de Tikhonov et de quasi-réversibilité et à la méthode de régularisation évanescence. Une comparaison des variantes de l'algorithme du gradient est proposée dans [144] et les méthodes de résolution par projection de la solution dans une base étant très particulières, nous faisons le choix de ne pas les intégrer dans le bilan.

Méthode	itérative alternée	énergétique	Tikhonov	quasi-réversibilité	évanescence
itérative	oui	oui	non	non	oui
généralisable à différents opérateurs	oui	oui	oui	oui	oui
perturbe l'opérateur	non	non	oui	oui	non
stable par construction vis à vis du bruit sur les données	non	non	oui	oui	oui
indépendante d'un paramètre de régularisation	pas de paramètre	pas de paramètre	non	non	oui
recalcule les données	non	non	non	non	oui

Tableau 1.1 – Synthèse des principales caractéristiques des méthodes présentées

Chapitre 2

Méthode de régularisation évanescente pour le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz

Sommaire

2.1	Le problème de Cauchy pour l'équation d'Helmholtz	40
2.2	Formulation continue de la méthode	41
2.3	Formulation discrète de l'algorithme itératif	41
2.3.1	Discrétisation par la méthode des solutions fondamentales	42
2.3.1.1	Approximation de l'espace des solutions $H(\Gamma)$	42
2.3.1.2	Description de l'algorithme itératif de régularisation évanescente	43
2.3.2	Critère d'arrêt et normes d'erreur	45
2.4	Exemples numériques bidimensionnels	47
2.4.1	Cas d'un domaine à bord régulier	47
2.4.1.1	Influence du coefficient de régularisation c	48
2.4.1.2	Reconstructions dans le cas de données bruitées	50
2.4.1.3	Influence du nombre de sources N	53
2.4.1.4	Influence de la distance d séparant les sources du bord du domaine	54
2.4.2	Cas d'un domaine présentant une frontière non régulière	55
2.4.2.1	Influence du coefficient de régularisation c	56
2.4.2.2	Reconstructions dans le cas de données bruitées	58
2.4.2.3	Influence du nombre de sources N	59
2.4.2.4	Influence de la distance d séparant les sources du domaine	60

2.5	Exemples numériques tridimensionnels	61
2.5.1	Cas d'une solution régulière sur un domaine cubique . .	62
2.5.2	Cas d'une solution à valeurs singulières	67
2.6	Bilan du chapitre	70

De nombreux problèmes physiques d'étude de la propagation des ondes [62, 98, 105] ou des phénomènes vibratoires [45] sont régis par l'équation d'Helmholtz. L'équation d'Helmholtz est aussi considérée pour modéliser des configurations de contrôle non destructif par méthode ultrasonore. Il s'agit de détecter la présence d'un défaut par transmission et réflexion d'une onde acoustique à l'intérieur d'une pièce. La connaissance des conditions aux limites sur toute la frontière du domaine étudié amène à la résolution de problèmes directs pour l'équation d'Helmholtz. Cependant, les conditions aux limites ne sont pas toujours accessibles sur toute la frontière, ce qui implique la résolution d'un problème mal posé au sens d'Hadamard [97]. Le problème de Cauchy, pour lequel la solution et la dérivée normale sont prescrites uniquement sur une partie Γ_d de la frontière du domaine alors qu'elles sont inaccessibles sur la partie complémentaire Γ_i , est un problème inverse classique pour l'équation d'Helmholtz.

Résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz consiste à reconstruire la solution et sa dérivée normale, à partir de données surabondantes sur la partie Γ_d de la frontière (voir Figure 2.1).

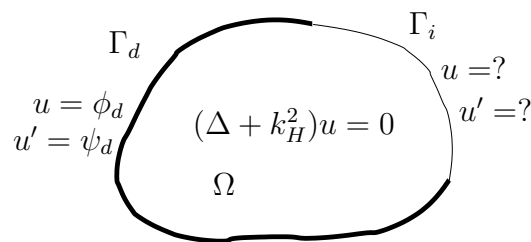


Figure 2.1 – Problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz

Plusieurs auteurs s'intéressent à la résolution de ce problème. Marin et al. combinent la méthode des éléments de frontière aux algorithmes itératifs alternatif [149], du gradient conjugué [151], de Landweber-Fridman [152] et de l'erreur minimale [144]. La méthode des solutions fondamentales permet, en utilisant la méthode de régularisation de Tikhonov, de résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz bidimensionnelle [161] et tridimensionnelle [140]. Qin et Wei [177] proposent une méthode de troncature et présentent des résultats de convergence et de stabilité obtenus pour un choix précis du paramètre de régularisation. Le problème a également été résolu dans un domaine de Lipschitz avec une méthode itérative alternée [43] alors que les mêmes auteurs [42] introduisent une solution numérique accélérée du problème en utilisant des méthodes de type gradient conjugué.

Dans ce chapitre nous présentons la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz en utilisant la méthode de régularisation évanescence [65, 67]. Nous rappelons l'énoncé du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz et la formulation continue de la méthode de résolution. Nous détaillons ensuite la caractérisation en dimension finie, par la méthode des solutions fondamentales, de l'espace des solutions de l'équation d'Helmholtz ainsi que l'algorithme itéra-

tif. Nous présentons des résultats numériques obtenus dans les cas bidimensionnels et tridimensionnels. Dans le cas bidimensionnel, nous considérons un domaine à frontière régulière ou à frontière présentant des points anguleux et nous étudions l'influence du paramètre de régularisation et des paramètres de la discrétisation. Des résultats numériques tridimensionnels sont ensuite présentés dans les cas d'une solution régulière et d'une solution qui caractérise la présence d'une singularité à proximité mais à l'extérieur du domaine.

2.1 Le problème de Cauchy pour l'équation d'Helmholtz

Nous considérons un domaine ouvert Ω de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , borné par sa frontière $\Gamma \equiv \partial\Omega$, telle que $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ avec $\Gamma_d, \Gamma_i \neq \emptyset$ et $\Gamma_d \cap \Gamma_i = \emptyset$ (Figure 2.1). Nous supposons que la fonction u est solution de l'équation d'Helmholtz dans le domaine Ω :

$$(\Delta + k_H^2)u = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.1)$$

où $k_H^2 \in \mathbb{R}_+^*$. On note u' la dérivée normale de la fonction u telle que $u' = \nabla u \cdot \underline{n}$ avec \underline{n} la normale unitaire extérieure définie pour tout point $\underline{x} \in \Gamma$.

Si la fonction u et sa dérivée normale u' sont uniquement connues sur la partie Γ_d de la frontière, on a le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz (2.1) suivant :

$$\begin{cases} (\Delta + k_H^2)u = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u = \phi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \\ u' = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (2.2)$$

avec ϕ_d et ψ_d des fonctions définies sur Γ_d .

La solution du problème de Cauchy (2.2) est unique si elle existe, contrairement aux problèmes directs de Dirichlet, Neumann ou mixtes associés à l'équation d'Helmholtz (2.1). En effet, ces derniers n'ont pas une solution unique pour tout nombre d'onde k , car le Laplacien possède des valeurs propres négatives dites valeurs de résonance [61] (on a unicité en dehors de ces valeurs). Le résultat d'unicité de la solution du problème de Cauchy est basé sur la propriété de prolongement analytique [125]. L'existence est, quant à elle, supposée vérifiée car en pratique on impose une des deux conditions aux limites et on mesure l'autre. En l'absence de défaut, les conditions aux limites sont alors compatibles. Cependant même si la solution existe, elle est instable vis à vis de petites perturbations sur les données accessibles sur Γ_d , ce qui fait du problème (2.2), un problème mal posé au sens d'Hadamard. Nous utilisons la méthode de régularisation évanescence présentée au paragraphe 1.5 du chapitre 1 pour résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz.

2.2 Formulation continue de la méthode

Avec les notations et définitions introduites à la section 1.5, on considère $H(\Omega)$ l'espace des solutions de l'équation d'Helmholtz (2.1) :

$$H(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) ; (\Delta + k_H^2)v = 0 \text{ dans } \Omega \right\}$$

On rappelle que $H(\Gamma)$ est l'espace des restrictions sur Γ des éléments $v \in H(\Omega)$ et de leurs dérivées normales correspondantes v' . Une formulation équivalente au problème (2.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{U} = (u, u') \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ \underline{U} = \underline{\Phi}_d \text{ sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $\underline{\Phi}_d = (\phi_d, \psi_d)$.

Ce problème est mal posé même s'il admet une unique solution et nous utilisons la méthode de régularisation évanescence [65, 67] pour le résoudre de manière stable. Soit $c > 0$ et $\underline{U}^0 \in H(\Gamma)$, l'algorithme itératif est donné par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{U}^{k+1} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\underline{V}), \quad \forall \underline{V} \in H(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{V}) = \|\underline{V}|_{\Gamma_d} - \underline{\Phi}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\underline{V} - \underline{U}^k\|_{\Gamma}^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

D'après le Lemme 1, à chaque itération, il existe un unique élément optimal \underline{U}^{k+1} caractérisé par

$$\left\langle \underline{U}^{k+1}|_{\Gamma_d} - \underline{\Phi}_d, \underline{V}|_{\Gamma_d} \right\rangle_{\Gamma_d} + c \left\langle \underline{U}^{k+1} - \underline{U}^k, \underline{V} \right\rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \underline{V} \in H(\Gamma) \quad (2.5)$$

À chaque étape de l'algorithme, l'élément optimal obtenu est une solution exacte de l'équation d'Helmholtz (2.1) et est proche des données surabondantes $\underline{\Phi}_d = (\phi_d, \psi_d)$ sur Γ_d .

La démonstration du résultat de convergence suivant (Théorème 3) est obtenue de manière immédiate, en retranscrivant la démonstration établie pour l'équation de Laplace [65] et en utilisant la propriété d'unicité du prolongement analytique [125] :

Théorème 3.

Soit $\underline{\Phi}_d$ un couple de données compatibles de $H(\Gamma_d)$ associé au couple \underline{U}_e solution de (2.3), alors la suite (\underline{U}^k) définie par l'algorithme itératif (2.4) converge fortement vers \underline{U}_e sur Γ_d et faiblement vers \underline{U}_e sur Γ .

2.3 Formulation discrète de l'algorithme itératif

Afin de trouver l'élément optimal \underline{U}^{k+1} caractérisé par (2.5), il est nécessaire de discrétiser l'espace des solutions $H(\Gamma)$. Dans cette section, nous présentons la mise en œuvre numérique de la méthode en utilisant la méthode des solutions fondamentales.

2.3.1 Discrétisation par la méthode des solutions fondamentales

La méthode des solutions fondamentales (MFS) est une méthode sans maillage utilisée pour approcher numériquement les solutions des équations aux dérivées partielles linéaires. Initialement proposée par Kupradze et Aleksidze [128] et introduite en tant que méthode numérique par Mathon et Johnston [162], elle a été largement appliquée à des problèmes directs et inverses en sciences et ingénierie [43, 83, 91, 120, 145, 179]. La méthode des solutions fondamentales est particulière puisqu'elle génère un système d'équations mal conditionné même dans le cas des problèmes directs. Le système mal conditionné généré par la MFS est résolu en employant par exemple, la méthode de Tikhonov [44, 159, 191, 201], la méthode de décomposition en valeurs singulières (TSVD) [114, 142] et plus récemment la méthode de régularisation évanescence [148]. Bien qu'elle soit limitée aux problèmes pour lesquels une solution fondamentale de l'opérateur associé est connue explicitement, la MFS est particulièrement utilisée pour sa facilité d'implémentation et son faible coût de calcul. La MFS partage les mêmes avantages [83] que la méthode des éléments de frontière par rapport aux méthodes qui discrétisent le domaine, telles que les méthodes des différences finies et des éléments finis. Elle nécessite toutefois moins de points de collocation et de singularités (points sources) que la méthode des éléments de frontière pour obtenir des résultats précis. De plus, la position des singularités n'est pas contrainte, ce qui permet d'éviter, en particulier, les difficultés liées aux coins du domaine, rencontrées avec les méthodes basées sur des éléments de frontière. L'erreur d'approximation est distribuée de manière uniforme sur le bord du domaine, quelle que soit sa forme. La MFS possède plus d'avantages que les méthodes des éléments de frontière. Par exemple, elle ne nécessite pas une discrétisation élaborée de la frontière, ni d'intégrations potentiellement coûteuses sur celle-ci. De plus, la détermination d'une approximation de la solution en un point à l'intérieur du domaine, ne nécessite qu'une évaluation de la solution approchée, alors que pour la méthode des éléments de frontière, une quadrature est nécessaire [141]. Les dérivées intervenant dans l'approximation MFS peuvent également être évaluées directement puisqu'elles sont connues de manière analytique.

Dans cette section, nous présentons, d'une part, comment l'utilisation des solutions fondamentales permet d'obtenir une approximation de l'espace $H(\Gamma)$ dans le cas bidimensionnel et, d'autre part, la mise en œuvre numérique de l'algorithme itératif.

2.3.1.1 Approximation de l'espace des solutions $H(\Gamma)$

L'idée principale de la MFS consiste à écrire l'approximation de la solution $u \in \Omega$ sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions fondamentales avec N

sources $\underline{y}^j \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, $j = \overline{1, N}$:

$$u(\underline{x}) \approx u^N(\underline{a}, \underline{Y}; \underline{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}^j), \quad \underline{x} \in \overline{\Omega}, \quad (2.6)$$

où $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ décrit les coordonnées d'un point du domaine, $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ représente les coordonnées d'un point source impérativement situé à l'extérieur du domaine, \underline{Y} est le vecteur de taille $2N$ contenant les coordonnées des points sources \underline{y}^j , $j = \overline{1, N}$ et le vecteur $\underline{a} = (a_1, \dots, a_N)$ représente les constantes (coefficients) à déterminer.

La solution fondamentale \mathcal{F} de l'équation d'Helmholtz (2.1) s'écrit dans le cas bidimensionnel [83] :

$$\mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_H r(\underline{x}, \underline{y})), \quad \underline{x} \in \overline{\Omega}, \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \quad (2.7)$$

avec $i^2 = -1$, $r(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ la distance entre le point $\underline{x} \in \overline{\Omega}$ et le point source $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ et $H_0^{(1)}$ la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre zéro.

On en déduit l'approximation de la dérivée normale u' sur le bord Γ :

$$u'(\underline{x}) \approx u'^N(\underline{a}, \underline{Y}, \underline{n}; \underline{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{G}(\underline{x}, \underline{y}^j; \underline{n}), \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad (2.8)$$

avec $\mathcal{G}(\underline{x}, \underline{y}; \underline{n}) = \nabla_{\underline{x}} \mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$ et dans le cas de l'équation d'Helmholtz, \mathcal{G} est donnée par :

$$\mathcal{G}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{((\underline{x} - \underline{y})\underline{n}(\underline{x}))k_H i}{4r(\underline{x}, \underline{y})} H_1^{(1)}(k_H r(\underline{x}, \underline{y})), \quad \underline{x} \in \overline{\Omega}, \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \quad (2.9)$$

avec $H_1^{(1)}$ la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre un.

Les approximations (2.6) et (2.8) peuvent également être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} u(\underline{x}) &\approx \underline{A}^T(\underline{x})\underline{a}, \quad \underline{x} \in \overline{\Omega}, \\ u'(\underline{x}) &\approx \underline{B}^T(\underline{x})\underline{a}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \end{aligned}$$

où $\underline{A}(\underline{x})$ et $\underline{B}(\underline{x})$ sont les vecteurs contenant les solutions fondamentales et leurs dérivées normales associées, respectivement.

2.3.1.2 Description de l'algorithme itératif de régularisation évanescence

À chaque étape $k \geq 0$ de l'algorithme de régularisation évanescence (1.31) décrit dans la section 1.5, les données ϕ_d et ψ_d sont recalculées sur Γ_d et la solution u

ainsi que sa dérivée normale u' sont inconnues et recherchées sur le reste de la frontière Γ_i . Pour écrire l'approximation de ces quantités, nous considérons M points de collocation sur Γ dont M_{Γ_d} points localisés sur la partie Γ_d du bord.

On rappelle que, par souci de simplicité, nous notons de la même manière, \underline{U}^k , la solution continue et le vecteur composé des valeurs discrètes sur le bord. La discrétisation de la formulation continue (2.4) permet d'écrire le $k^{\text{ème}}$ terme de la suite $\{\underline{U}^k\}_{k \geq 0}$ comme le vecteur $\underline{U}^k = (U_1^k, \dots, U_M^k, U_1'^k, \dots, U_M'^k)$ composé des valeurs discrètes de la fonction et de sa dérivée normale aux M points de collocation du bord. De la même manière, les données discrètes aux M_{Γ_d} points de collocation de Γ_d sont notées $\underline{U}^d = (U_1^d, \dots, U_{M_{\Gamma_d}}^d, U_1'^d, \dots, U_{M_{\Gamma_d}}'^d)$.

En initialisant avec $(U_i^0, U_i'^0) = (0, 0)$, pour éviter d'avoir une composante dans le noyau (Théorème 2 du paragraphe 1.5.3), l'algorithme de régularisation évanescence revient à minimiser une suite de problèmes d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{U}^{k+1} \in H(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\underline{V}), \quad \forall \underline{V} \in H(\Gamma) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{V}) = \|\underline{V} - \underline{\Phi}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\underline{V} - \underline{U}^k\|_{\Gamma}^2 \end{array} \right. \quad (1.31)$$

qui peut s'écrire de manière discrète :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\underline{U}} J_c^{k+1}(\underline{U}) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{U}) = \sum_{i=1}^{M_{\Gamma_d}} (U_i - U_i^d)^2 + (U_i' - U_i'^d)^2 \\ \quad + c \sum_{i=1}^M (U_i - U_i^k)^2 + (U_i' - U_i'^k)^2 \\ \text{et } U_i = \sum_{j=1}^N A_j^T(x_i) a_j, \\ \quad U_i' = \sum_{j=1}^N B_j^T(x_i) a_j. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Note :

- L'utilisation de la méthode des solutions fondamentales implique des approximations régulières $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ de la dérivée normale et nous permet de remplacer la norme $\|\cdot\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ par la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$,
- Grâce à l'équivalence des normes en dimension finie, les différentes normes sont remplacées par des normes L^2 .

Nous présentons l'écriture de la fonctionnelle J_c^{k+1} lorsque des normes L^2 sont employées.

L'algorithme itératif (1.31) est alors réduit à une suite de problèmes de minimisation linéaires par rapport aux N constantes inconnues de la MFS $\underline{a} = (a_1, \dots, a_N)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\underline{a}} J_c^{k+1}(\underline{a}) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{M_{\Gamma_d}} \left[\sum_{j=1}^N (A_j^T(x_i)a_j - U_i^d)^2 + (B_j^T(x_i)a_j - U_i'^d)^2 \right] \\ \quad + c \sum_{i=1}^M \left[\sum_{j=1}^N (A_j^T(x_i)a_j - U_i^k)^2 + (B_j^T(x_i)a_j - U_i'^k)^2 \right] \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Remarquons que U_i^k et $U_i'^k$ s'écrivent également :

$$U_i^k = \sum_{j=1}^N A_j^T(x_i)a_j^k,$$

$$U_i'^k = \sum_{j=1}^N B_j^T(x_i)a_j^k,$$

avec a_j^k la $j^{\text{ème}}$ constante MFS déterminée à l'itération k .

Par conséquent, minimiser, à l'itération k , la fonctionnelle J_c^{k+1} par rapport à \underline{a} revient à résoudre le système linéaire :

$$(\underline{K}^d + c \underline{K})\underline{a}^{k+1} = \underline{M}^T \underline{U}^d + c \underline{K} \underline{a}^k \quad (2.12)$$

avec :

$$(\underline{M}^T \underline{U}^d)_j = \sum_{i=1}^{M_{\Gamma_d}} A_j^T(x_i)U_i^d + B_j^T(x_i)U_i'^d,$$

$$K_{lm}^d = \sum_{i=1}^{M_{\Gamma_d}} A_l^T(x_i)A_m^T(x_i) + B_l^T(x_i)B_m^T(x_i),$$

$$K_{lm} = \sum_{i=1}^M A_l^T(x_i)A_m^T(x_i) + B_l^T(x_i)B_m^T(x_i).$$

2.3.2 Critère d'arrêt et normes d'erreur

Dans le but d'évaluer la précision de l'algorithme proposé et la convergence du processus itératif, nous introduisons les quantités de contrôle suivantes :

— Le terme de relaxation des données intervenant dans la fonctionnelle (2.4) :

$$J_{\Gamma_d}(\underline{U}, \underline{U}') = \sum_{i=1}^{M_{\Gamma_d}} (U_i - \phi_i^d)^2 + \sum_{i=1}^{M_{\Gamma_d}} (U_i' - \psi_i^d)^2 \quad (2.13)$$

— Le terme de contrôle par rapport à la solution précédente intervenant dans la fonctionnelle (2.4) :

$$J_{\Gamma}^{k+1}(\underline{U}, \underline{U}') = c \sum_{i=1}^M (U_i - U_i^k)^2 + c \sum_{i=1}^M (U_i' - U_i'^k)^2 \quad (2.14)$$

— La valeur de la fonctionnelle (2.4) pour l'élément optimal $(\underline{U}, \underline{U}')$:

$$J^{k+1}(\underline{U}, \underline{U}') = J_{\Gamma_d}(\underline{U}, \underline{U}') + J_{\Gamma}^{k+1}(\underline{U}, \underline{U}') \quad (2.15)$$

On peut établir qu'au cours du processus itératif les termes (2.13), (2.14) et (2.15) vérifient les trois propriétés suivantes :

(a) $J_{\Gamma_d}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1})$ diminue de manière monotone :

$$J_{\Gamma_d}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) \leq J_{\Gamma_d}(\underline{U}^k, \underline{U}'^k), \forall k \geq 0. \quad (2.16)$$

(b) $J_{\Gamma}^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1})$ diminue de manière monotone si $c > 0$:

$$J_{\Gamma}^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) \leq J_{\Gamma}^k(\underline{U}^k, \underline{U}'^k), \forall k \geq 0. \quad (2.17)$$

(c) La suite caractérisée par les valeurs des fonctionnelles J^{k+1} pour chaque élément optimal $(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1})$ diminue également de manière monotone si $c > 0$:

$$J^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) \leq J^k(\underline{U}^k, \underline{U}'^k), \forall k \geq 0. \quad (2.18)$$

Nous définissons un critère d'arrêt basé sur la violation de la propriété (2.17) : Le processus itératif s'arrête à l'itération $k = k_{opt}$ pour laquelle le terme de régularisation J_{Γ}^{k+1} augmente, c'est à dire $J_{\Gamma}^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) > J_{\Gamma}^k(\underline{U}^k, \underline{U}'^k)$. Ce critère d'arrêt ne nécessite pas de connaissance a priori sur la qualité des données puisqu'il est basé sur la comparaison de deux éléments optimaux successifs.

Nous définissons également deux normes d'erreur pour évaluer la qualité de la solution :

— L'erreur L^2 relative commise pour \underline{U} sur le bord Γ :

$$u_{\text{erreur}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (U_i - U_i^{an})^2}{\sum_{i=1}^M (U_i^{an})^2}}; \quad (2.19)$$

— L'erreur L^2 relative commise pour \underline{U}' sur Γ :

$$u'_{\text{erreur}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (U'_i - U'^{an}_i)^2}{\sum_{i=1}^M (U'^{an}_i)^2}}, \quad (2.20)$$

où $\underline{U}^{an} = (U_1^{an}, \dots, U_M^{an})$ et $\underline{U}'^{an} = (U'_1{}^{an}, \dots, U'_M{}^{an})$ représentent les vecteurs contenant les valeurs discrètes des solutions analytiques, u^{an} et de leurs dérivées normales, u'^{an} , respectivement, aux points de collocation.

2.4 Exemples numériques bidimensionnels

Nous considérons deux exemples pour lesquels une solution analytique u^{an} est connue :

$$u^{an} = \cos\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right), \quad k_H^2 = 1, \quad \forall \underline{x} = (x_1, x_2) \in \Omega \quad (2.21)$$

Nous étudions les cas où le domaine est à bord régulier (Figure 2.2) et à bord non régulier (Figure 2.11) afin d'étudier l'influence de points anguleux sur les différentes reconstructions. Nous présentons des résultats obtenus en utilisant la méthode des solutions fondamentales (MFS) pour caractériser l'espace des solutions de l'équation d'Helmholtz.

2.4.1 Cas d'un domaine à bord régulier

Nous considérons le disque $\Omega = \{\underline{x} = (x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de rayon $R = 1$ et centré en $(0, 0)$ (Figure 2.2). La partie Γ_d du bord où les données sont accessibles correspond à la moitié de Γ , telle que $\Gamma_d = \{\underline{x} \in \Gamma | 0 \leq \theta(\underline{x}) \leq \pi\}$ où $\theta(\underline{x})$ représente l'angle polaire de \underline{x} . De la même manière, on définit la partie complémentaire de la frontière $\Gamma_i = \{\underline{x} \in \Gamma | \pi \leq \theta(\underline{x}) \leq 2\pi\}$, où les informations sont inaccessibles.

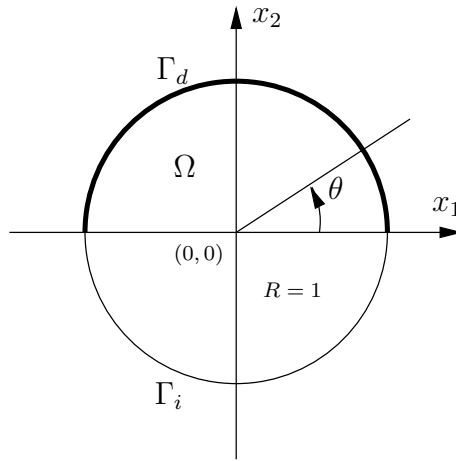


Figure 2.2 – Disque

Les reconstructions sont obtenues en utilisant le critère d'arrêt introduit au paragraphe 2.3.2. En accord avec les notations introduites au paragraphe 2.3.1, les parties Γ_d et Γ_i du bord sont respectivement approximées par $M_{\Gamma_d} = 150$ et $M_{\Gamma_i} = 150$ points de collocation.

On considère $N = 10$ sources sur le cercle $\tilde{\Gamma}$ de rayon $d = 10$, tel que $\tilde{\Gamma} = \left\{ \underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = d^2 \right\}$.

On s'intéresse dans un premier temps au cas où les données (ϕ_d, ψ_d) ne sont pas bruitées. La Figure 2.3 représente les quantités de contrôle J_{Γ_d} , J_{Γ}^k et J^k en fonction du nombre d'itérations k pour un paramètre de régularisation c fixé à 10^{-2} . On remarque que ces trois quantités deviennent constantes à partir de la 86^{ème} itération. Le terme de régularisation J_{Γ}^k décroît tant que $k < 86$ et devient constant avec seulement quelques petites oscillations dues à l'approximation numérique au delà de cette valeur. Cherchant l'itération à partir de laquelle le terme J_{Γ}^k augmente, le processus itératif est alors arrêté à l'itération optimale $k_{opt} = 86$. On observe que le terme de régularisation J_{Γ}^k devient négligeable comparé à J_{Γ_d} et tend vers zéro, ce qui prouve que l'algorithme converge. Après convergence le terme de relaxation J_{Γ_d} devient constant et correspond à la distance sur Γ_d entre la reconstruction et les données. Les quantités $\|u - u^{an}\|_{L^2(\Gamma)}^2$ et $\|u' - u'^{an}\|_{L^2(\Gamma)}^2$ sont également représentées sur la Figure 2.3. Elles ont les mêmes évolutions que les termes de relaxation et de régularisation, ce qui confirme que le critère d'arrêt est fiable. Nous observons que la reconstruction de la solution est plus précise que celle obtenue pour la dérivée normale.

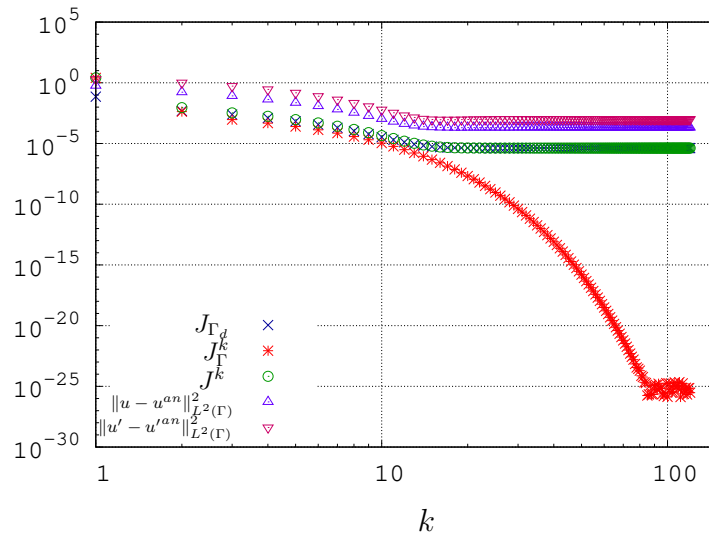


Figure 2.3 – Évolution des quantités de contrôle en fonction du nombre d'itérations k pour $c = 10^{-2}$.

2.4.1.1 Influence du coefficient de régularisation c

Le coefficient de régularisation c intervient dans l'expression de la fonctionnelle J^k , il pondère l'influence du terme de régularisation par rapport au terme de relaxation. Nous étudions son influence sur la précision des solutions numériques et le nombre d'itérations requis pour converger. Les Figures 2.4(a) et 2.4(b) représentent les reconstructions de la solution u et de sa dérivée normale u' , respectivement, sur Γ pour différentes valeurs de c . Les reconstructions ne semblent pas affectées par le choix de c , ce qui est confirmé par le Tableau 2.1 qui liste les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur}

et le nombre d'itérations k requis pour converger pour différentes valeurs de c . En effet, les erreurs commises pour u et u' sont identiques pour les différentes valeurs de c , ce qui confirme que l'algorithme converge vers la même solution quelle que soit la valeur de c . D'après le Tableau 2.1, le choix de c affecte uniquement le nombre d'itérations k nécessaire pour obtenir la convergence. Plus la valeur de c est petite, plus l'algorithme converge rapidement. Il est toutefois judicieux de ne pas choisir un coefficient de régularisation trop petit car l'influence du terme de régularisation pourrait devenir négligeable.

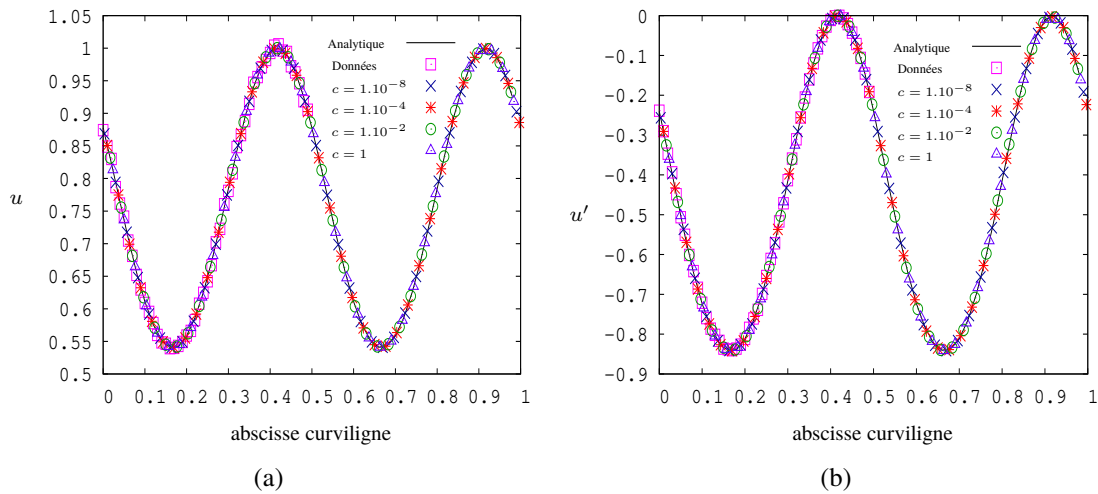


Figure 2.4 – (a) Les solutions analytiques, u^{an} et numériques, u et (b) les dérivées normales analytiques, u'^{an} et numériques, u' , reconstruites sur Γ pour différentes valeurs de c .

c	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
10^{-8}	3	9.87×10^{-2}	0.33
10^{-6}	4	9.87×10^{-2}	0.33
10^{-5}	6	9.87×10^{-2}	0.33
10^{-4}	10	9.87×10^{-2}	0.33
10^{-3}	19	9.87×10^{-2}	0.33
10^{-2}	88	9.87×10^{-2}	0.33
10^{-1}	631	9.87×10^{-2}	0.33
1	5265	9.87×10^{-2}	0.33
10	38888	9.87×10^{-2}	0.33

Tableau 2.1 – Influence du coefficient de régularisation c sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} .

En complément de la Figure 2.4 et du Tableau 2.1, la Figure 2.5 montre les évo-

lutions des termes de contrôle (2.13) et (2.14) et des erreurs relatives $(u_{\text{erreur}})^2$ et $(u'_{\text{erreur}})^2$ en fonction du rapport $\frac{k}{c}$ pour trois valeurs de c . Le terme de relaxation J_{Γ_d} devient constant dès que l'itération optimale k_{opt} est atteinte et ce pour les trois valeurs de c étudiées. Le terme de régularisation tend vers zéro quant à lui. Chaque erreur relative tend vers la même valeur pour les différents choix de c .

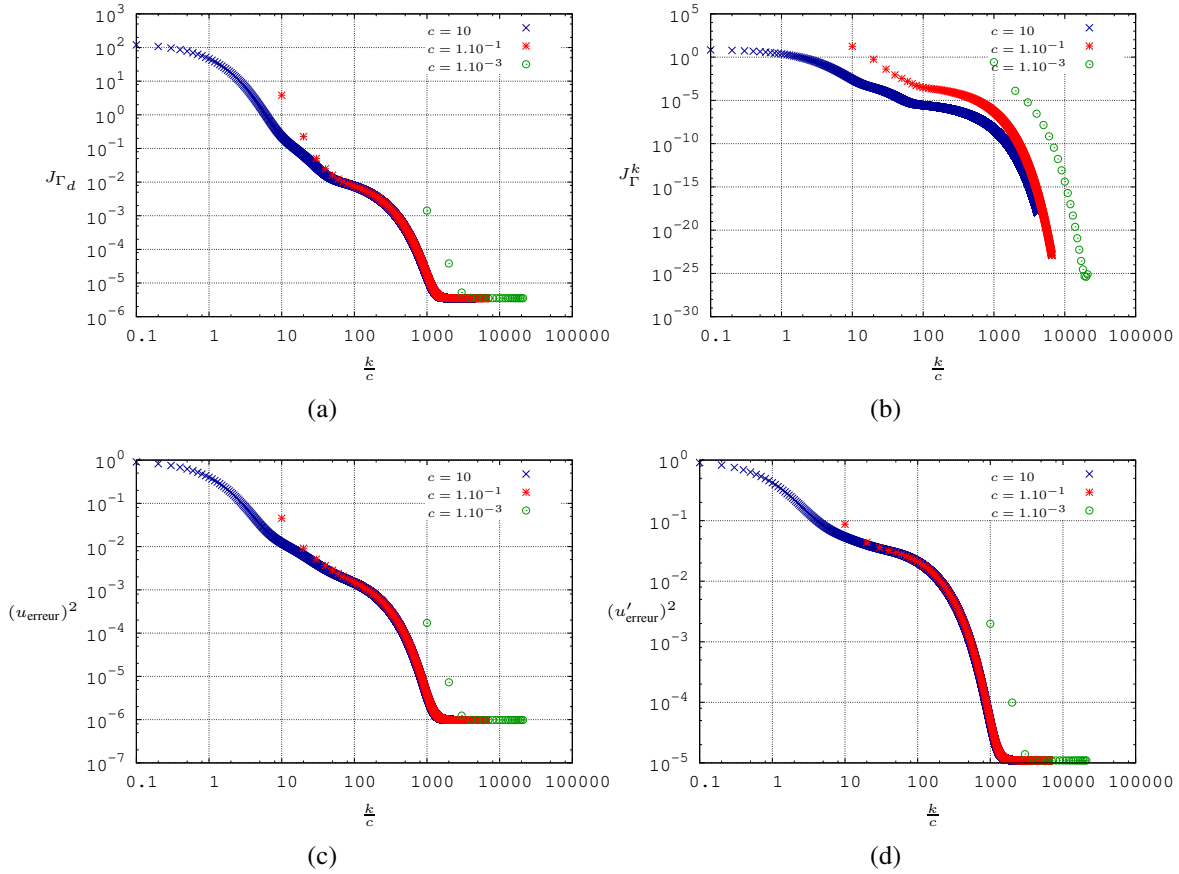


Figure 2.5 – Évolution des normes (a) J_{Γ_d} et (b) $J_{\Gamma^k}^k$ et des erreurs relatives (c) $(u_{\text{erreur}})^2$ et (d) $(u'_{\text{erreur}})^2$ en fonction de $\frac{k}{c}$ pour différentes valeurs de c .

2.4.1.2 Reconstructions dans le cas de données bruitées

Nous nous intéressons maintenant à la stabilité de l'algorithme itératif par rapport à des données bruitées. Nous considérons le cas où les données ϕ_d et ψ_d sont bruitées et définies par :

$$\begin{aligned} \phi_d &= u^{an}(\underline{x}) + \delta u^{an}(\underline{x}) \cdot \rho, & \underline{x} \in \Gamma_d, \\ \psi_d &= u'^{an}(\underline{x}) + \delta u'^{an}(\underline{x}) \cdot \rho, & \underline{x} \in \Gamma_d, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où δ est le niveau de bruit et $-1 \leq \rho \leq 1$ est une variable aléatoire.

La Figure 2.6 représente l'évolution des termes de la fonctionnelle et des normes d'erreur pour un niveau de bruit δ fixé à 10% et différentes valeurs de c . On remarque que l'indépendance à c observée dans le cas de données non bruitées reste valable. Le Tableau 2.2 liste le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} pour différents niveaux de bruit et valeurs du coefficient de régularisation.

On remarque que le niveau d'erreur est proportionnel et linéaire par rapport au niveau de bruit initial. Ce qui montre la stabilité de la méthode par rapport au bruit. La qualité des reconstructions à partir de données bruitées n'est pas affectée par le choix de c , qui a un rôle d'accélérateur de convergence, nous présentons donc par la suite des résultats pour un coefficient de régularisation fixé.

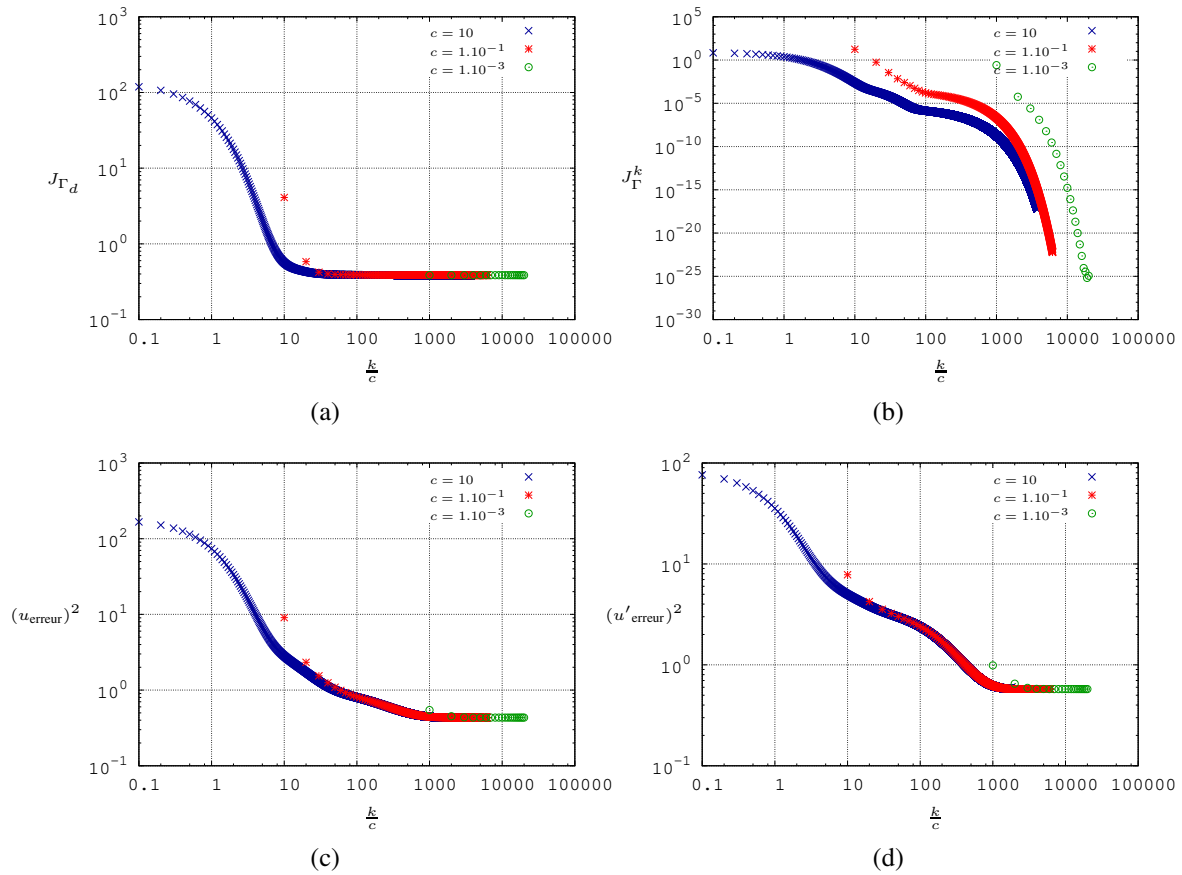


Figure 2.6 – Évolution des normes (a) J_{Γ_d} et (b) J_{Γ}^k et des erreurs relatives (c) $(u_{\text{erreur}})^2$ et (d) $(u'_{\text{erreur}})^2$ en fonction de $\frac{k}{c}$ pour $\delta = 10\%$ et différentes valeurs de c .

δ	c	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
1%	10^{-3}	20	0.49	0.86
	10^{-1}	628	0.49	0.86
	10	39088	0.49	0.86
3%	10^{-3}	21	1.46	2.47
	10^{-1}	648	1.46	2.47
	10	38709	1.46	2.47
5%	10^{-3}	20	2.42	4.15
	10^{-1}	622	2.42	4.15
	10	38751	2.42	4.15
10%	10^{-3}	20	4.87	8.24
	10^{-1}	619	4.87	8.24
	10	37822	4.87	8.24

Tableau 2.2 – Influence du niveau de bruit δ et du coefficient de régularisation c sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} .

Les reconstructions de u et u' sur Γ_d , obtenues avec des niveaux de bruit de 1%, 3%, 5% et 10% sont représentées sur les Figures 2.7(a) et 2.7(b), respectivement. Les reconstructions sur Γ_d sont très précises et montrent que l'algorithme est capable de débruiter les données.

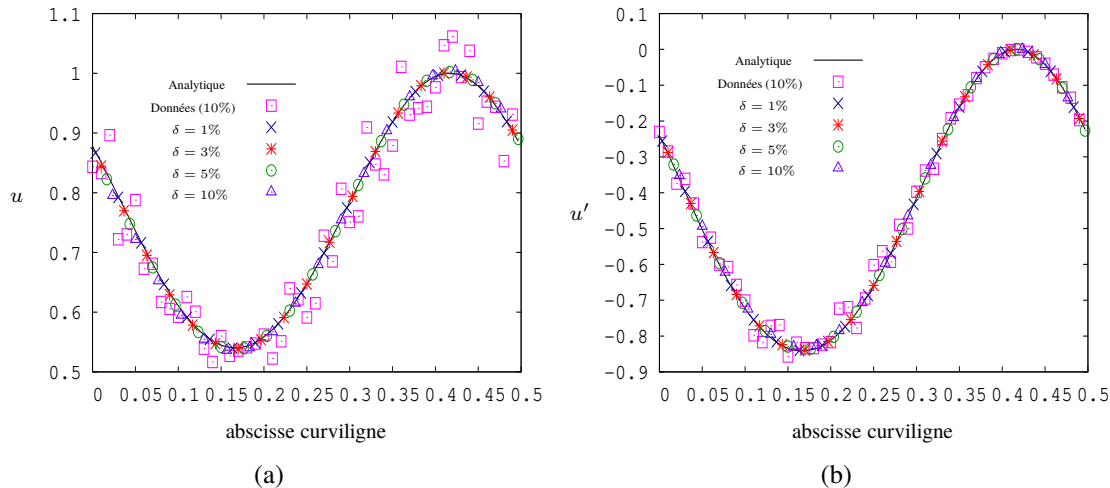


Figure 2.7 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur Γ_d pour différentes valeurs de δ et $c = 10^{-1}$.

Les Figures 2.8(a) et 2.8(b) montrent les reconstructions de la fonction et de sa dérivée normale, respectivement sur Γ_i pour différents niveaux de bruit. Elles

sont moins précises que celles obtenues sur Γ_d mais restent proches de la solution analytique. Les solutions numériques obtenues pour la fonction sont plus précises que les reconstructions de la dérivée normale.

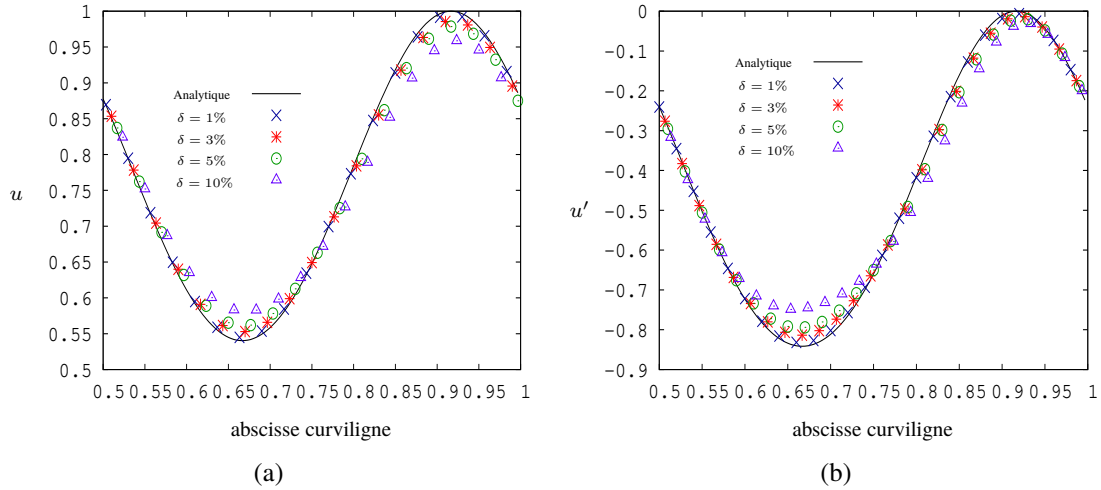


Figure 2.8 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur Γ_i pour différentes valeurs de δ et $c = 10^{-1}$.

2.4.1.3 Influence du nombre de sources N

L'influence du nombre de sources N sur les reconstructions de u et u' est étudiée. Les sources décrivent toujours le cercle $\tilde{\Gamma}$ de rayon $d = 10$ centré en $(0, 0)$. La Figure 2.9 montre les reconstructions pour des données entachées d'un bruit de 3%, $c = 10^{-1}$ et plusieurs valeurs de N . Les solutions numériques sont affectées par le nombre de sources, les meilleurs résultats sont obtenus pour $N = 10$ sources (voir également le Tableau 2.3).

N	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
5	47	8.64	20.45
10	648	1.46	2.47
20	128	3.89	15.30
40	139	3.89	15.36
80	148	3.87	15.30
150	462	2.77	10.54
300	242	3.27	12.21

Tableau 2.3 – Influence du nombre de sources N sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} pour $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-1}$.

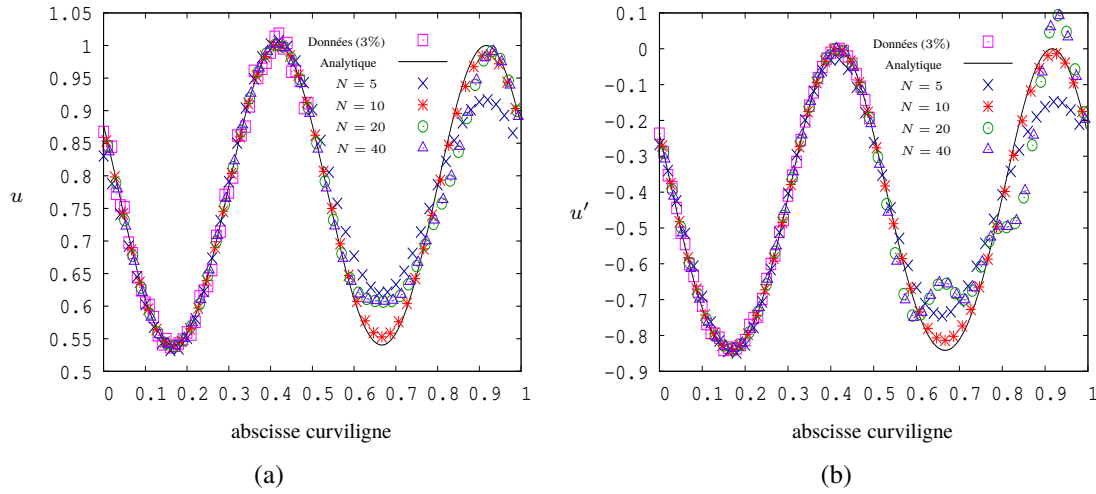


Figure 2.9 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur Γ pour différentes valeurs de N , $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-1}$.

2.4.1.4 Influence de la distance d séparant les sources du bord du domaine

Nous examinons aussi la sensibilité des reconstructions numériques par rapport à la distance d qui sépare les sources et les points du bord du domaine Γ . Le nombre de sources N est fixé à 10. Les Figures 2.10(a) et 2.10(b) représentent les reconstructions sur Γ de la fonction et de sa dérivée normale, respectivement pour $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-1}$.

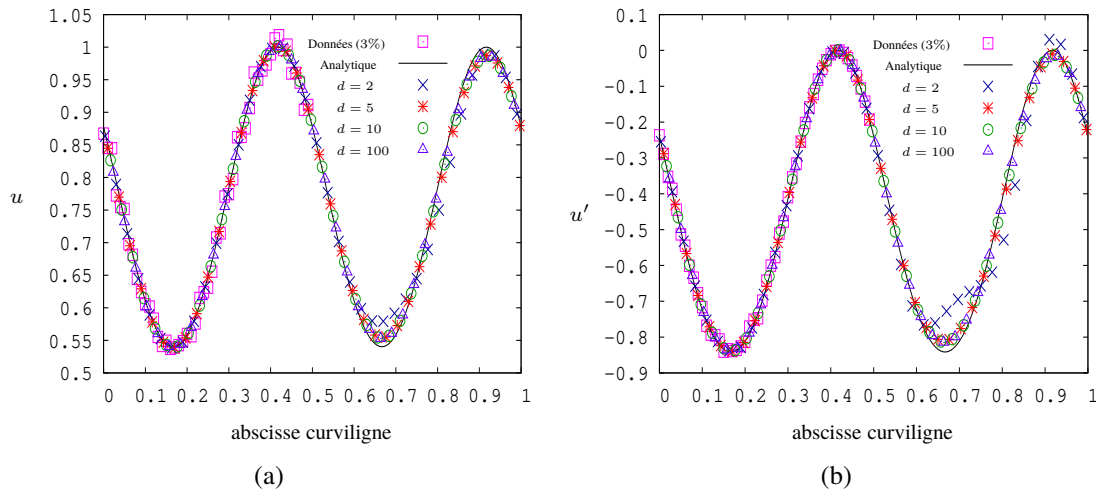


Figure 2.10 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur Γ pour différentes valeurs de d , $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-1}$.

On remarque que les résultats numériques sont peu affectés par la distance d , tant que les sources sont suffisamment loin du bord du domaine. Les meilleures reconstructions numériques sont obtenues pour $d \geq 5$, avec un niveau d'erreur inférieur à $\delta = 3\%$ (Tableau 2.4). Le Tableau 2.4, qui liste le nombre d'itérations k et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} pour un choix plus large de d , montre que les résultats numériques sont affectés par la position des sources si $1.5 \leq d < 5$ et quand $d \geq 5$ les erreurs sont quasiment identiques. On remarque qu'à partir de $d \geq 40$, le nombre d'itérations k varie peu et les erreurs deviennent constantes.

d	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
1.5	35185	19.39	95.5
2	3405	2.51	9.10
4	842	1.52	9.24
5	727	1.49	2.69
8	660	1.46	2.50
10	648	1.46	2.47
40	629	1.45	2.42
100	623	1.45	2.41
150	628	1.45	2.41

Tableau 2.4 – Influence de la distance d sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} , pour $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-1}$.

2.4.2 Cas d'un domaine présentant une frontière non régulière

On considère désormais le domaine carré $\Omega = (0, 1)^2$ (Figure 2.11) afin d'étudier l'influence d'un bord non régulier sur les résultats numériques.

La partie Γ_d du bord correspond à la moitié de Γ et est composée des segments d'équation $x_2 = 0$ et $x_1 = 1$. La partie Γ_i , composée des côtés définis par $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, présente donc un point anguleux en $(x_1, x_2) = (0, 1)$ (Figure 2.11).

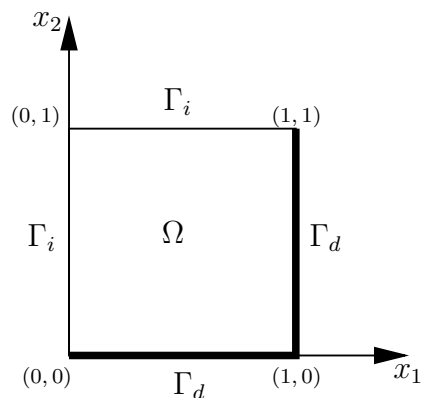


Figure 2.11 – Carré

En accord avec les notations introduites au paragraphe 2.3.1, les parties Γ_d et Γ_i du bord sont respectivement discrétisées par $M_{\Gamma_d} = 100$ et $M_{\Gamma_i} = 100$ points de collocation. On considère $N = 10$ sources sur le cercle $\tilde{\Gamma}$ de rayon $d = 10$, tel que $\tilde{\Gamma} = \left\{ \underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = d^2 \right\}$.

On s'intéresse dans un premier temps au cas où les données ϕ_d et ψ_d ne sont pas bruitées.

2.4.2.1 Influence du coefficient de régularisation c

De manière similaire à l'étude précédente pour un domaine à bord régulier, on s'intéresse à l'éventuelle sensibilité du processus itératif par rapport au coefficient de régularisation c .

On observe sur la Figure 2.12 que l'évolution des termes J_{Γ_d} et J_{Γ}^k et des erreurs $(u_{\text{erreur}})^2$ et $(u'_{\text{erreur}})^2$ en fonction de $\frac{k}{c}$ est similaire à celle observée dans le cas d'un domaine à bord régulier.

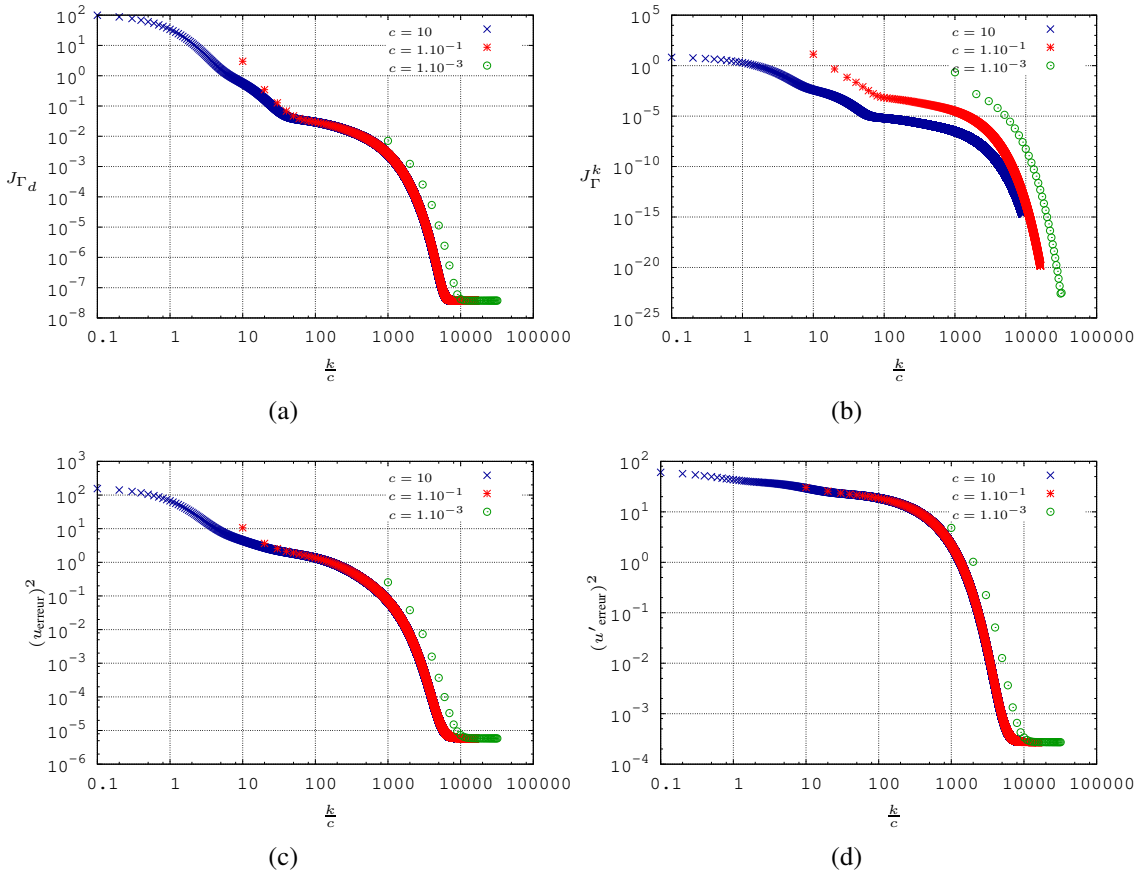


Figure 2.12 – Évolution des normes (a) J_{Γ_d} et (b) J_{Γ} et des erreurs relatives (c) $(u_{\text{erreur}})^2$ et (d) $(u'_{\text{erreur}})^2$ en fonction de $\frac{k}{c}$ pour différentes valeurs de c .

Quelle que soit la valeur de c , le terme de relaxation J_{Γ_d} devient constant, le

terme de régularisation J_{Γ}^k tend vers zéro et chaque erreur relative tend vers la même valeur. En ce qui concerne l'influence du coefficient de régularisation sur le nombre d'itérations k (Tableau 2.5), on peut aussi conclure que c joue un rôle d'accélérateur de convergence.

c	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
10^{-6}	2	0.24	1.65
10^{-5}	4	0.24	1.65
10^{-4}	7	0.24	1.65
10^{-3}	25	0.24	1.65
10^{-2}	182	0.24	1.65
10^{-1}	1507	0.24	1.65
1	12937	0.24	1.65
10	90020	0.24	1.66

Tableau 2.5 – Influence du paramètre de régularisation c sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} .

Les Figures 2.13(a) et 2.13(b) montrent la précision des reconstructions de la fonction et de sa dérivée normale, respectivement sur Γ pour différentes valeurs de c . Les résultats sont toutefois moins précis que pour le domaine régulier.

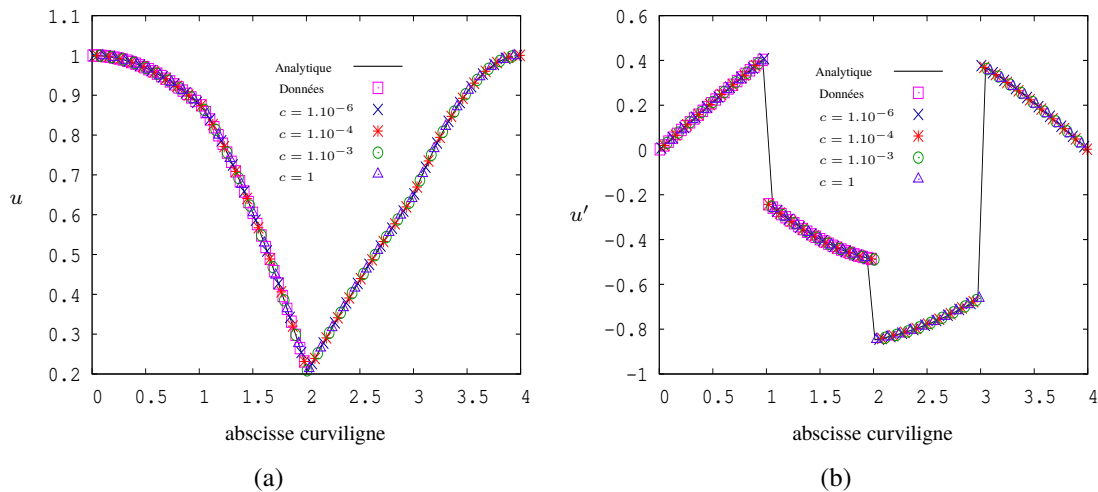


Figure 2.13 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur Γ pour différentes valeurs de c .

2.4.2.2 Reconstructions dans le cas de données bruitées

Nous nous intéressons également au cas où les données ϕ_d et ψ_d sont bruitées afin d'étudier l'influence de points anguleux sur la stabilité de l'algorithme.

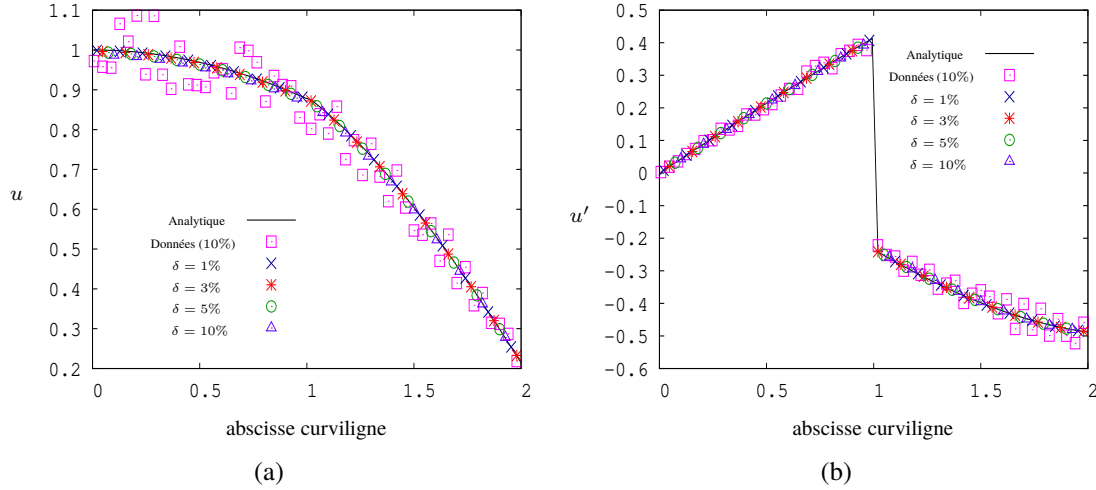


Figure 2.14 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur Γ_d pour différentes valeurs de δ et $c = 10^{-2}$.

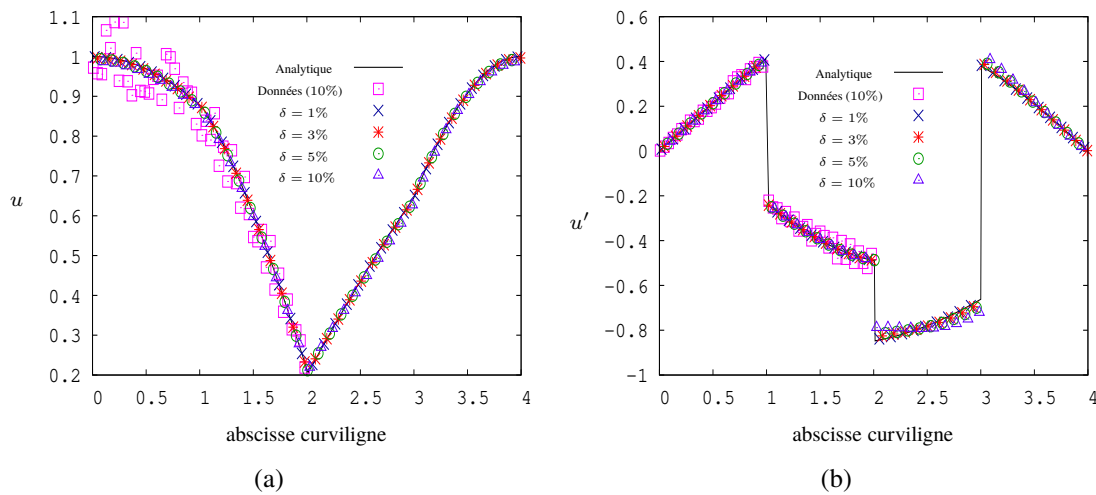


Figure 2.15 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur Γ pour différentes valeurs de δ et $c = 10^{-2}$.

Les Figures 2.14(a) et 2.14(b), qui représentent les reconstructions numériques de u et u' , respectivement sur Γ_d pour $\delta = 1, 3, 5, 10\%$ prouvent que l'algorithme

permet de débruiter les données. Les reconstructions sur Γ sont représentées sur la Figure 2.15, on remarque que les résultats obtenus pour les différents niveaux de bruit sont précis. On observe cependant quelques imprécisions pour la dérivée normale près des sommets de Γ_i (Figure 2.15(b)).

Le Tableau 2.6 liste les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} pour différents niveaux de bruit et valeurs de c . Comme dans le cas d'un domaine à bord régulier, les erreurs sont constantes pour chaque niveau de bruit δ quelle que soit la valeur de c et elles sont proportionnelles et linéaires par rapport au niveau de bruit. Les niveaux d'erreurs sont toujours inférieurs au niveau de bruit, ce qui prouve la stabilité de l'algorithme et sa capacité à débruiter les données.

δ	c	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
1%	10^{-3}	33	0.45	0.48
	10^{-2}	202	0.45	0.48
	10^{-1}	1591	0.45	0.48
	1	12926	0.45	0.48
3%	10^{-3}	34	1.35	1.72
	10^{-2}	200	1.35	1.72
	10^{-1}	1582	1.35	1.72
	1	12768	1.35	1.72
5%	10^{-3}	34	2.26	2.98
	10^{-2}	202	2.26	2.98
	10^{-1}	1582	2.26	2.98
	1	12561	2.26	2.98
10%	10^{-3}	38	4.54	6.11
	10^{-2}	201	4.54	6.11
	10^{-1}	1622	4.54	6.11
	1	12138	4.54	6.11

Tableau 2.6 – Influence du niveau de bruit δ et du coefficient de régularisation c sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} .

2.4.2.3 Influence du nombre de sources N

Les Figures 2.16(a) et 2.16(b) représentent les reconstructions de la fonction et de sa dérivée normale, respectivement sur Γ pour des nombres de sources N différents, $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-2}$. On remarque que les solutions numériques sont de très mauvaises approximations des valeurs analytiques correspondantes pour $N = 30$ et $N = 100$. L'erreur u'_{erreur} , commise pour la dérivée normale, est plus importante que u_{erreur} , ce qui est dû à la discontinuité de la normale unitaire extérieure au passage des coins du carré. Le Tableau 2.7 confirme qu'à partir de $N = 15$ sources les reconstructions sont de mauvaise qualité et l'erreur u'_{erreur} est cinq fois plus grande que

l'erreur u_{erreur} .

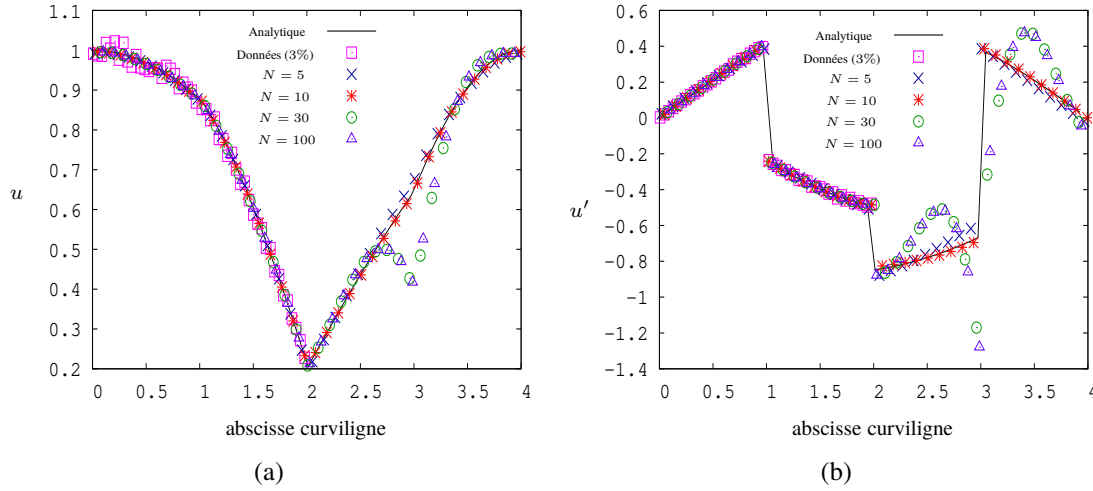


Figure 2.16 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur Γ_d pour différentes valeurs de N , $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-2}$.

N	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
5	7	2.65	8.78
10	200	1.35	1.72
15	1560	7.45	39
30	1999	7.61	39
50	1870	7.64	38.6
100	1687	7.45	38.2
200	2032	7.66	39.26

Tableau 2.7 – Influence du nombre de sources N sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} , pour $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-2}$.

2.4.2.4 Influence de la distance d séparant les sources du domaine

On fixe le nombre de sources à $N = 10$ pour étudier l'influence de la distance d sur les reconstructions numériques. La Figure 2.17 montre que les résultats sont peu sensibles à la distance d . En effet, d'après le Tableau 2.8, pour des données entachées d'un niveau de bruit de 3% la précision des reconstructions est acceptable et quasi-constante si $d > 2$.

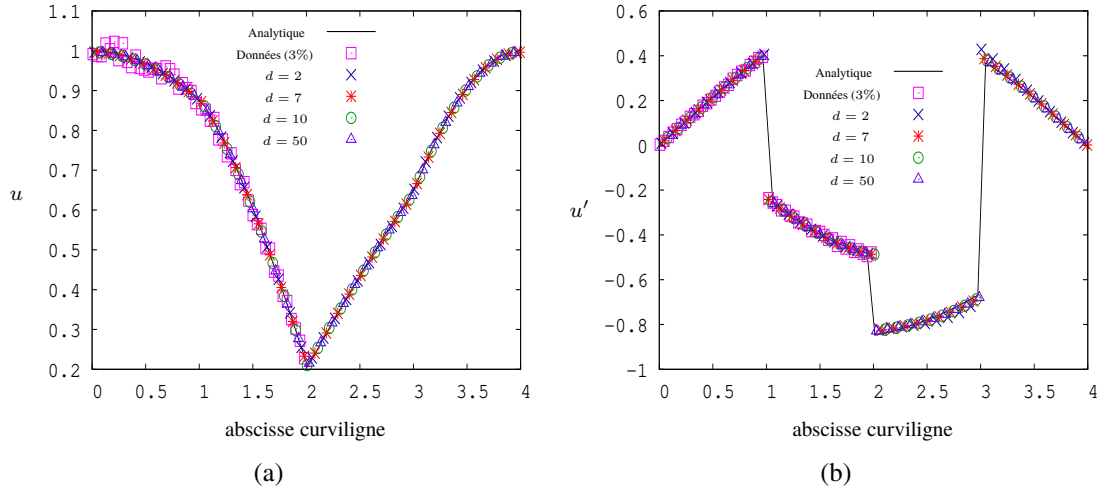


Figure 2.17 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur Γ_d pour différentes valeurs de d , $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-2}$.

d	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
2	512	1.37	3.29
4	240	1.35	1.92
7	193	1.35	1.76
10	200	1.35	1.72
20	192	1.35	1.71
50	198	1.35	1.70
100	194	1.35	1.70

Tableau 2.8 – Influence de la distance d sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} pour $\delta = 3\%$ et $c = 10^{-2}$.

2.5 Exemples numériques tridimensionnels

Grâce à sa facilité d'implémentation, la méthode des solutions fondamentales peut être utilisée sans difficulté pour discrétiser des problèmes tridimensionnels. Il suffit de connaître de manière explicite la solution fondamentale de l'opérateur. En accord avec les notations introduites au paragraphe 2.3.1, la solution fondamentale \mathcal{F} de l'équation d'Helmholtz (2.1) s'écrit dans le cas tridimensionnel [83] :

$$\mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{4\pi r(\underline{x}, \underline{y})} \exp(-ik_H r(\underline{x}, \underline{y})), \quad \underline{x} \in \bar{\Omega}, \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (2.23)$$

où $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $r(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(\underline{x} - \underline{y})^2}$ et $i^2 = -1$.

On en déduit $\mathcal{G}(\underline{x}, \underline{y}; \underline{n}) = \nabla_x \mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$ qui s'exprime, dans le cas tridimensionnel par :

$$\mathcal{G}(\underline{x}, \underline{y}; \underline{n}) = -\frac{(\underline{x} - \underline{y})\underline{n}(\underline{x})}{r(\underline{x}, \underline{y})} \left(ik_H + \frac{1}{r(\underline{x}, \underline{y})} \right) \mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}), \quad \underline{x} \in \overline{\Omega}, \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}. \quad (2.24)$$

Dans cette section, nous étudions les résultats numériques obtenus pour une solution régulière sur un domaine cubique et pour une fonction représentant une source à l'extérieur du domaine (couronne sphérique). Des résultats complémentaires, similaires à ceux présentés dans la Section 2.4 pour des cas bidimensionnels, sont disponibles en annexe (Annexe A).

2.5.1 Cas d'une solution régulière sur un domaine cubique

On considère la solution analytique suivante :

$$u^{an}(\underline{x}) = \cos(x_1 + 2x_2 + 2x_3), \quad k_H^2 = 9, \quad \forall \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad (2.25)$$

où Ω est le cube unité tel que $\Omega = (-0.5, 0.5)^3$ (Figure 2.18).

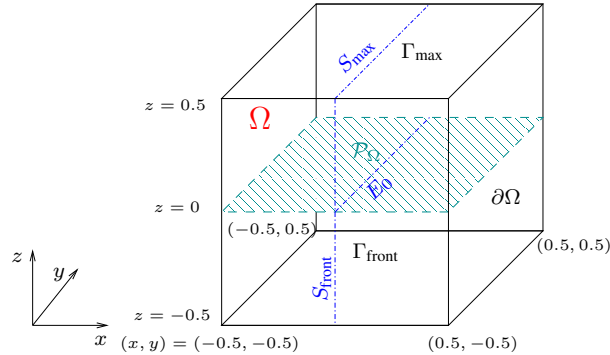


Figure 2.18 – Cube

On note $\Gamma_{\max} \subset \Gamma$ la face supérieure, définie par $\Gamma_{\max} = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5) \times \{0.5\}$, $\Gamma_{\text{front}} \subset \Gamma$ la face avant, définie par $\Gamma_{\text{front}} = (-0.5, 0.5) \times \{-0.5\} \times (-0.5, 0.5)$ et $\mathcal{P}_\Omega \subset \Omega$ le plan défini par $\mathcal{P}_\Omega = (-0.5, 0.5) \times (-0.5, 0.5) \times \{0\}$. Afin de faciliter la comparaison entre les solutions analytiques et numériques, on définit trois segments sur lesquels seront tracées les reconstructions : $S_{\max} = \{0.05\} \times (-0.5, 0.5) \times \{0.5\} \subset \Gamma_{\max}$, $S_{\text{front}} = \{0.05\} \times \{-0.5\} \times (-0.5, 0.5) \subset \Gamma_{\text{front}}$ et $E_0 = \{0.05\} \times (-0.5, 0.5) \times \{0\} \subset \mathcal{P}_\Omega$.

On considère le cas où la partie Γ_d du bord, où les données sont accessibles, correspond à la moitié de Γ , c'est à dire que la fonction et sa dérivée normale sont données sur trois faces du cube, incluant Γ_{front} et elles sont recherchées sur les trois faces du bord restantes Γ_i , incluant Γ_{\max} . On se limitera à présenter les résultats numériques sur les faces Γ_{front} et Γ_{\max} .

En accord avec les notations introduites au paragraphe 2.3.1, le bord Γ est approximé par $M = 600$ points de collocation uniformément distribués sur les six faces qui le constituent. On compte $N = 150$ points sources uniformément distribués sur le bord $\tilde{\Gamma}$ du cube $\tilde{\Omega} = (-d, d)^3$ (5×5 sources sur chaque face de $\tilde{\Omega}$). On fixe $d = 5$ la distance entre les sources décrivant $\tilde{\Gamma}$ et le bord du domaine Γ .

L'algorithme se comportant de la même manière que pour le cas bidimensionnel, nous pouvons tirer les mêmes conclusions sur les résultats (voir Annexe A). Nous faisons alors le choix de présenter dans cette section uniquement les solutions analytiques et numériques sur les faces Γ_{front} et Γ_{max} et le plan \mathcal{P}_{Ω} , ainsi que les résultats de débruitage sur la face Γ_{front} .

Les résultats sont obtenus en utilisant le critère d'arrêt introduit au paragraphe 2.3.2 et on s'intéresse tout d'abord au cas où les données ϕ_d et ψ_d ne sont pas bruitées.

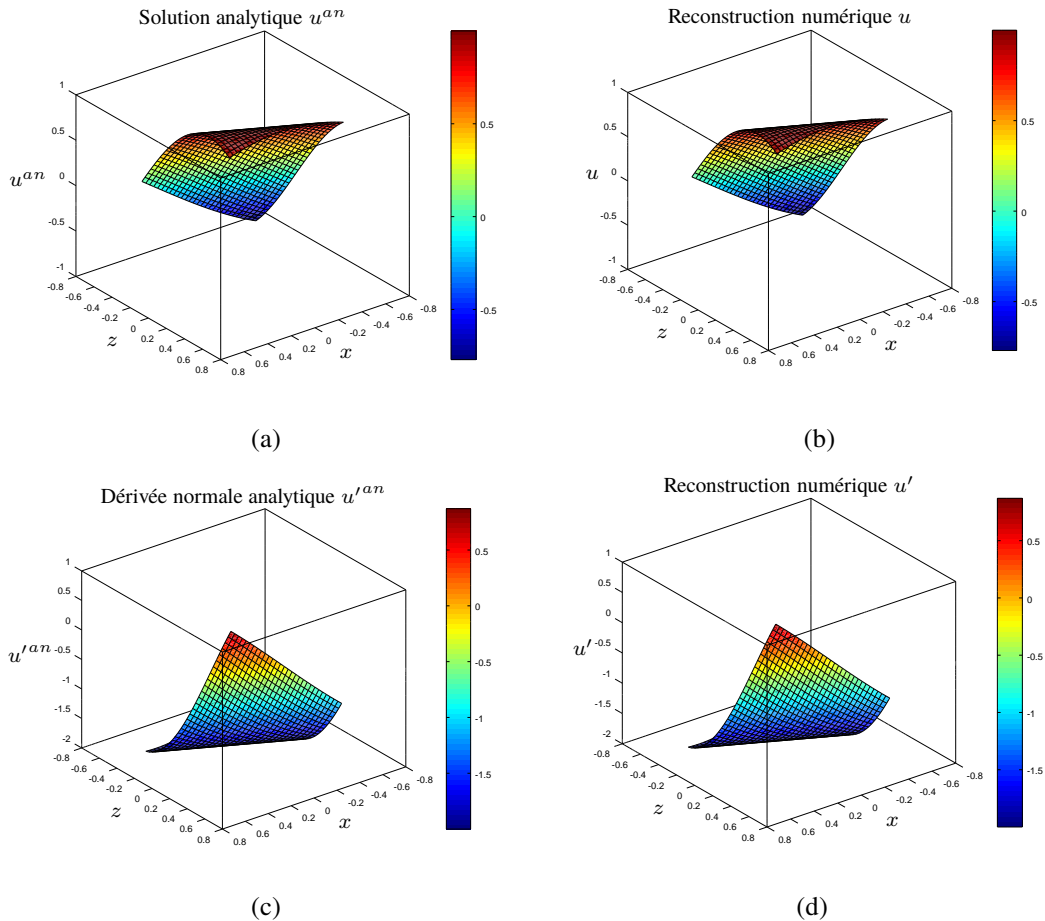


Figure 2.19 – Les solutions analytique, u^{an} (a) et numérique, u (b) et les dérivées normales analytique, u'^{an} (c) et numérique, u' (d), reconstruites sur la face avant Γ_{front} pour $c = 10^{-6}$.

On observe sur les Figures 2.19(a), (b), (c) et (d) les cartographies des solutions analytique, u^{an} et numérique, u et des dérivées normales analytique, u'^{an} et

numérique, u' , respectivement sur la face avant Γ_{front} du cube pour $c = 10^{-6}$. La Figure 2.20 représente les mêmes quantités sur la face supérieure Γ_{max} du cube. On remarque une bonne concordance des résultats entre les solutions analytique et numérique.

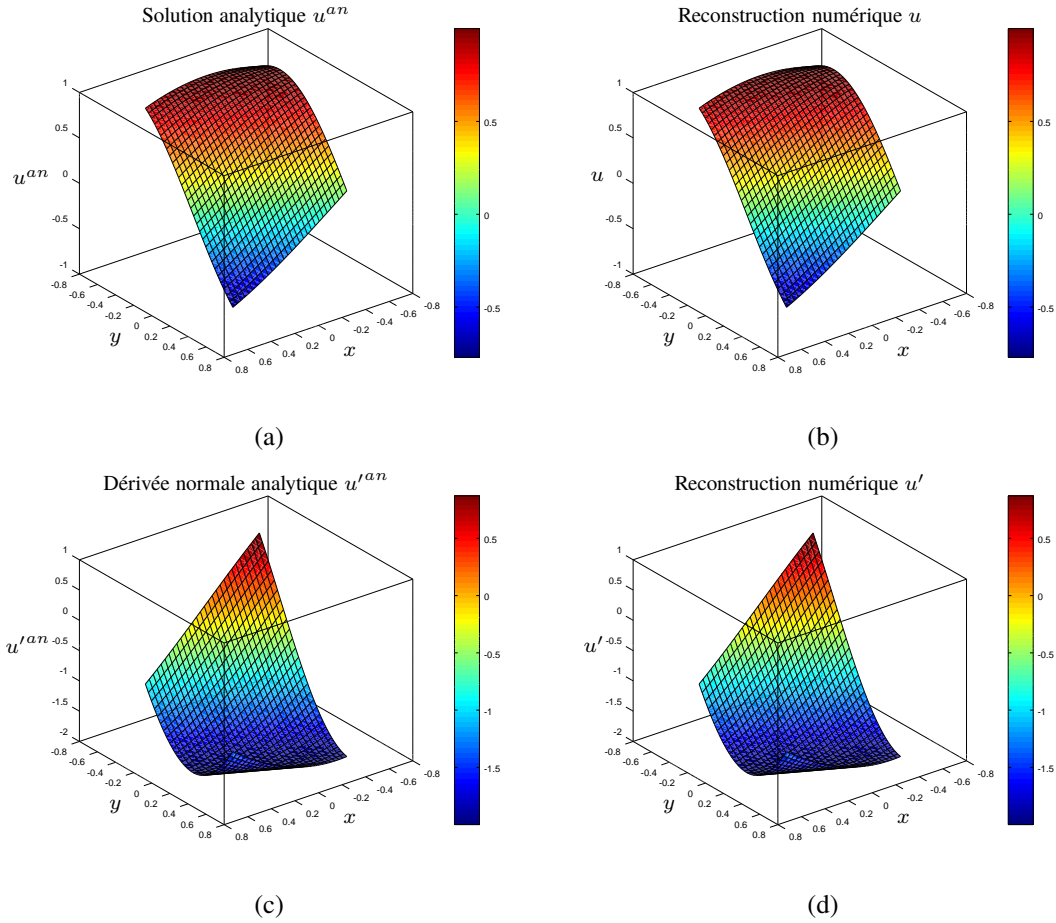


Figure 2.20 – Les solutions analytique, u^{an} (a) et numérique, u (b) et les dérivées normales analytique, u'^{an} (c) et numérique, u' (d), reconstruites sur la face supérieure Γ_{max} pour $c = 10^{-6}$.

Nous considérons désormais le cas où les données ϕ_d et ψ_d sont bruitées et définies par la relation (2.22). Le nombre de sources N doit être ajusté à $N = 54$ sources, c'est à dire que l'on utilise moins de sources que dans le cas de données exactes. Elles sont distribuées uniformément sur les faces du cube $\tilde{\Omega}$, de manière à ce que chacune d'entre elles supportent 3×3 sources.

Afin de confirmer la capacité de l'algorithme à débruiter les données accessibles sur Γ_d dans le cas tridimensionnel, on présente les cartographies sur Γ_{front} des résidus relatifs pour la solution, $\frac{|u-u^d|}{\max |u^{an}|}$ et pour sa dérivée normale, $\frac{|u'-u'^d|}{\max |u'^{an}|}$, ainsi que celles des erreurs relatives commises sur la solution, $\frac{|u-u^{an}|}{\max |u^{an}|}$ et sa dérivée normale,

$\frac{|u' - u'^{an}|}{\max |u'^{an}|}$. La Figure 2.21 représente ces quatre cartographies sur la face avant Γ_{front} pour des données entachées d'un bruit de niveau $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-2}$. On observe sur les Figures 2.21(a) et 2.21(c) que les résidus correspondent bien au bruit ajouté aux données exactes. Les erreurs relatives, observables sur les Figures 2.21(b) et 2.21(d), sont plus faibles que les résidus relatifs. De plus, elles sont localisées près des arêtes du cube, ce qui était prévisible par analogie aux résultats obtenus dans le cas du domaine carré. Ces observations confirment que l'algorithme permet de débruiter les données.

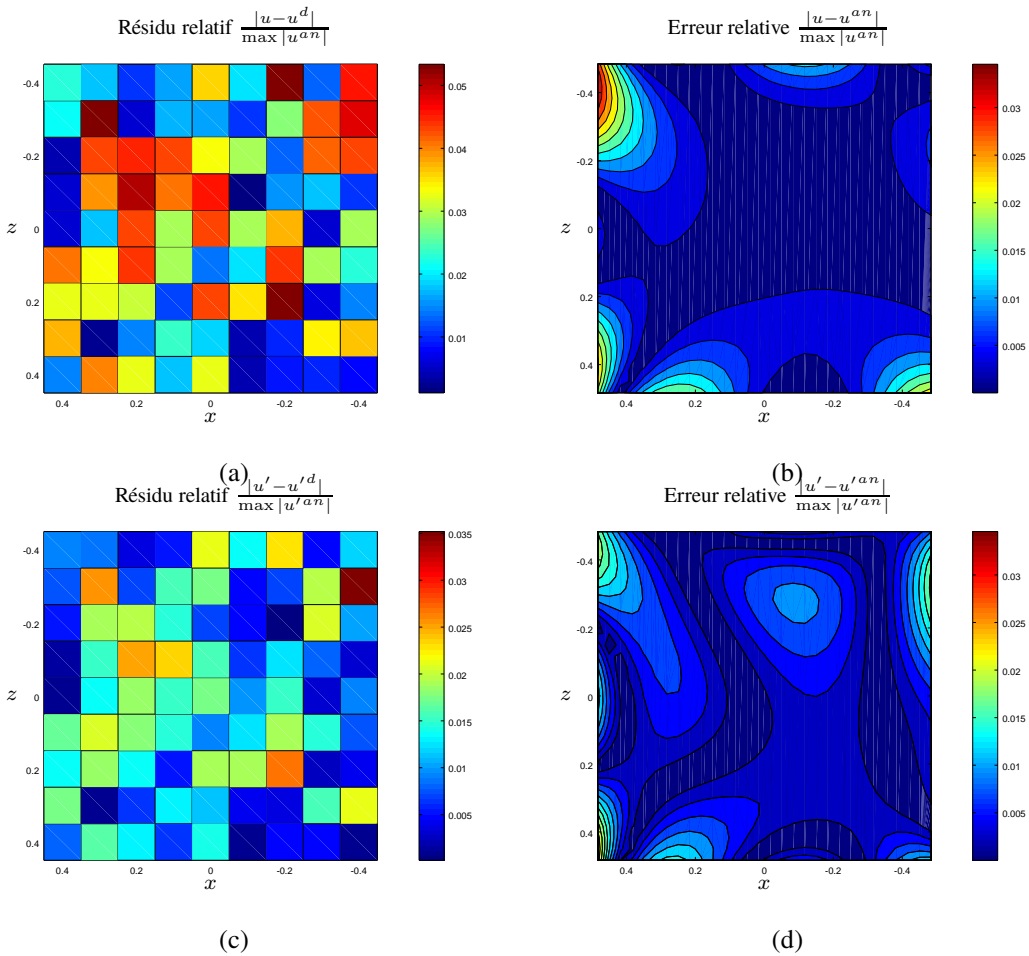


Figure 2.21 – Les résidus relatifs, $\frac{|u - u^d|}{\max |u^{an}|}$ (a) et $\frac{|u' - u'^d|}{\max |u'^{an}|}$ (c) et les erreurs relatives, $\frac{|u - u^{an}|}{\max |u^{an}|}$ (b) et $\frac{|u' - u'^{an}|}{\max |u'^{an}|}$ (d), calculés sur la face avant Γ_{front} pour $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-2}$.

Les erreurs relatives pour la fonction u et sa dérivée normale u' peuvent également être calculées sur la face supérieure Γ_{max} . Elles sont représentées sur les Figures 2.22(b) et 2.22(d) et on observe que l'erreur commise pour la reconstruction de u' sur une face de Γ_i est supérieure à celle calculée pour la solution u . On constate une fois de plus que les erreurs sont essentiellement localisées près des arêtes du cube. Les erreurs sont inférieures au niveau de bruit $\delta = 5\%$, hormis près des coins

du domaine pour l'erreur commise sur la dérivée normale. Les Figures 2.22(a) et 2.22(c) représentent respectivement la solution numérique, u et la dérivée normale numérique, u' , calculées sur Γ_{\max} pour $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-2}$.

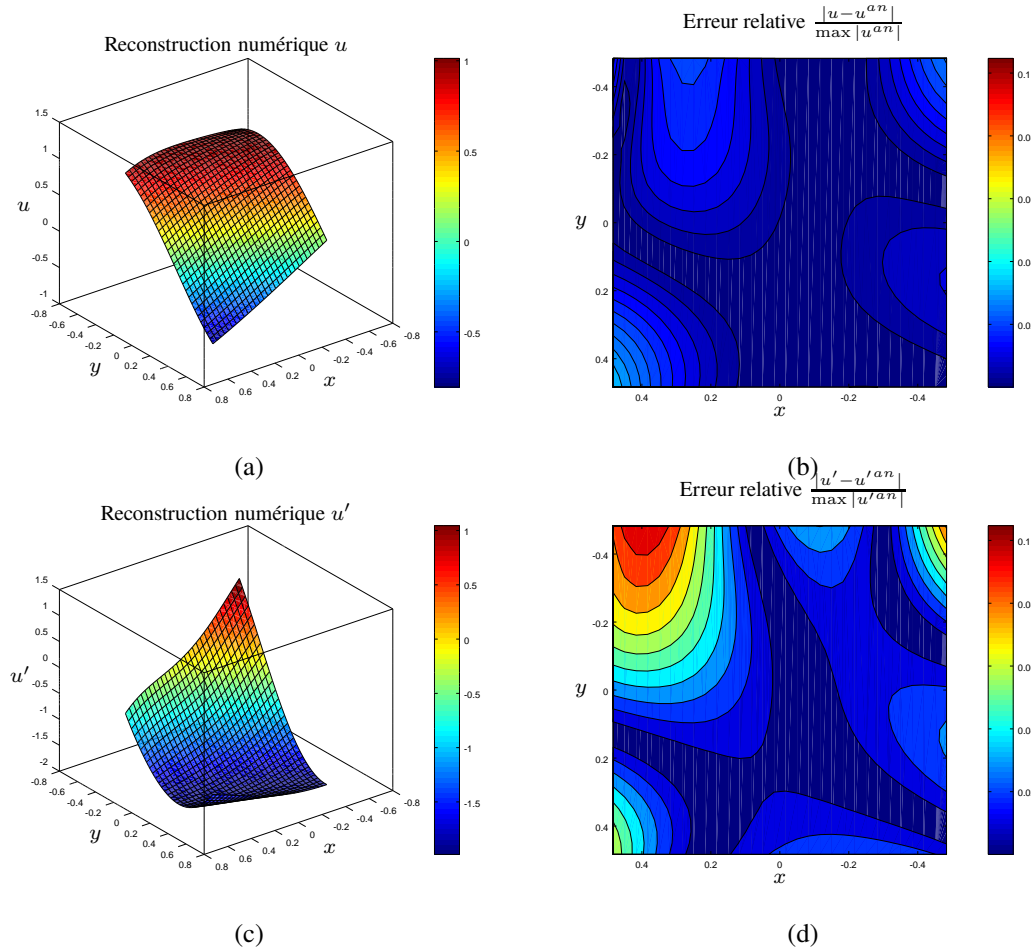


Figure 2.22 – Les reconstructions numériques, u (a) et u' (c) et les erreurs relatives, $\frac{|u - u^{an}|}{\max |u^{an}|}$ (b) et $\frac{|u' - u'^{an}|}{\max |u'^{an}|}$ (d), calculées sur la face supérieure Γ_{\max} pour $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-2}$.

La discrétisation par la méthode des solutions fondamentales nous permet également de calculer a posteriori la solution à l'intérieur du domaine Ω après que les constantes \underline{a} aient été déterminées par l'algorithme itératif. Nous présentons ces résultats sur le plan \mathcal{P}_Ω discrétisé par 100 points de collocation et sur l'arête $E_0 \subset \mathcal{P}_\Omega$. On observe sur la Figure 2.23(a) des reconstructions précises de la solution numérique u sur E_0 pour tous les niveaux de bruit. Les cartographies des solutions analytique, u^{an} (Figure 2.23(b)) et numérique, u (Figure 2.23(c)), obtenues pour $\delta = 5\%$, semblent identiques sur le plan \mathcal{P}_Ω , ce qui est confirmé par une très petite erreur relative, $\frac{|u - u^{an}|}{\max |u^{an}|}$, représentée sur la Figure 2.23(d).

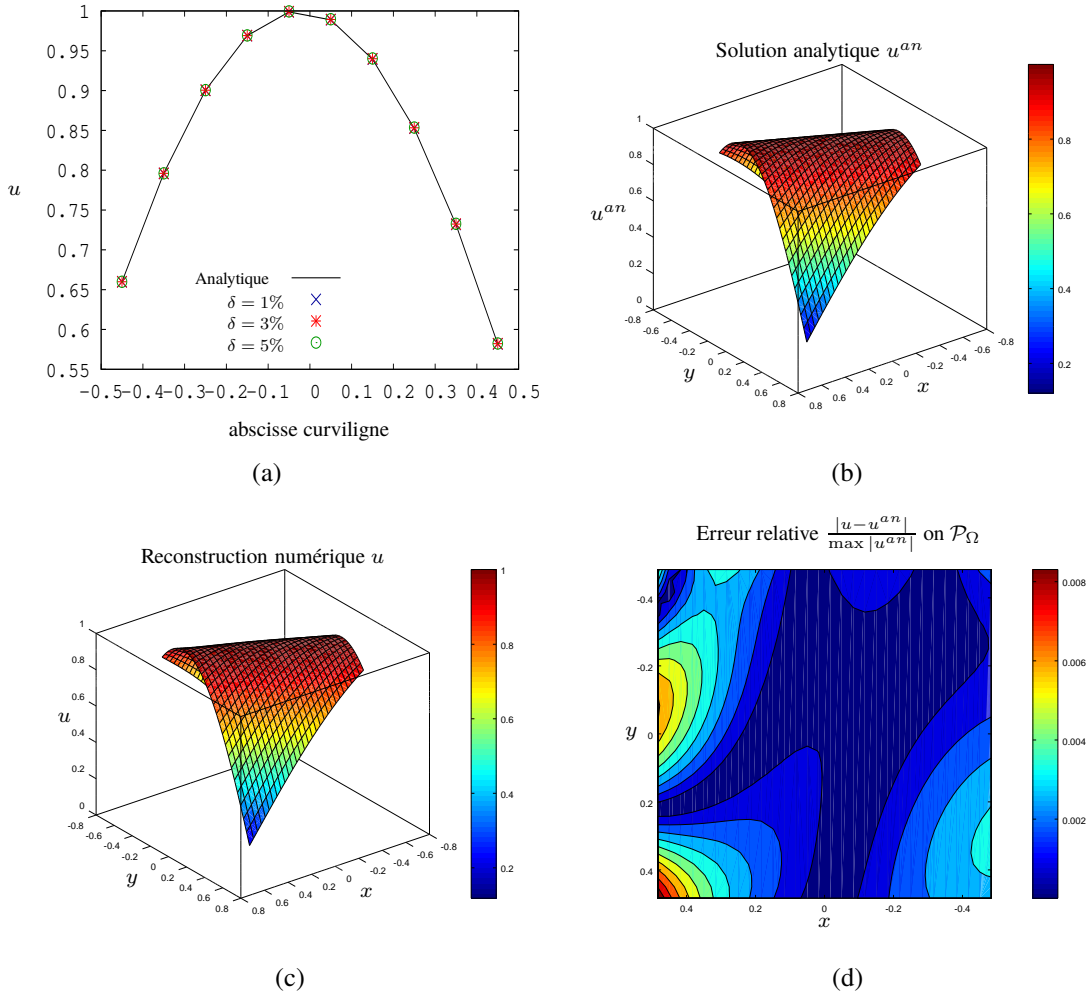


Figure 2.23 – Solution numérique, u (a) reconstruite sur le segment E_0 pour plusieurs niveaux de bruit et $c = 10^{-2}$ et la solution analytique, u^{an} (b), la reconstruction numérique, u (c) et l’erreur relative, $\frac{|u-u^{an}|}{\max |u^{an}|}$ (d), calculées sur le plan \mathcal{P}_Ω pour $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-2}$.

2.5.2 Cas d’une solution à valeurs singulières

On considère le domaine sphérique $\Omega = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid R_{int} < \|\underline{x}\| < R_{ext} \right\}$, borné par sa frontière intérieure $\Gamma_i = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{x}\| = R_{int} \right\}$ et sa frontière extérieure $\Gamma_d = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\underline{x}\| = R_{ext} \right\}$, avec $R_{int} = 1.0$ et $R_{ext} = 2.0$ (Figure 2.24).

Nous utilisons la solution analytique u^{an} :

$$u^{an}(\underline{x}) = \frac{\cos(k_H r(\underline{x}, \underline{z}))}{4\pi r(\underline{x}, \underline{z})}, \quad k_H^2 = 9, \quad \forall \underline{x} \in \overline{\Omega}, \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (2.26)$$

avec $r(\underline{x}, \underline{z}) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2}$ la distance entre les points

du domaine et $\underline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ la position de la singularité où $z_1 = 0.02$, $z_2 = -0.5$ et $z_3 = -0.2$.

Les données ϕ_d et ψ_d sont accessibles sur le bord extérieur Γ_d et recherchées sur le bord intérieur Γ_i . Afin de représenter les résultats sur une partie des bords extérieur et intérieur du domaine, on introduit les cercles \mathcal{C}_{Γ_d} et \mathcal{C}_{Γ_i} , définis par $\mathcal{C}_{\Gamma_d} = \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = R_{ext}^2 \text{ et } x_3 = 0 \right\}$ et $\mathcal{C}_{\Gamma_i} = \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = R_{int}^2 \text{ et } x_3 = 0 \right\}$, respectivement.

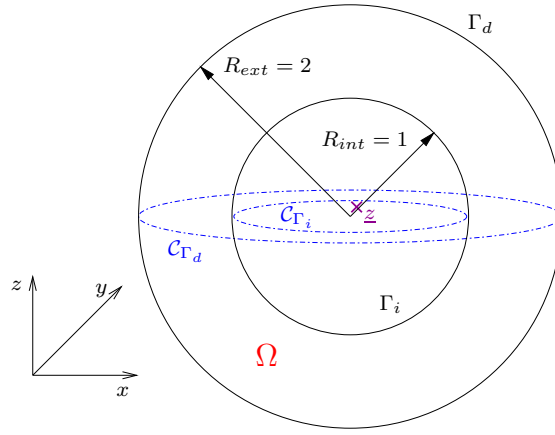


Figure 2.24 – Sphère

En accord avec les notations du paragraphe 2.3.1, les reconstructions numériques sont obtenues en utilisant $N = N_{int} + N_{ext}$ sources avec $N_{ext} = 100$ sources positionnées sur l'enveloppe sphérique $\tilde{\Gamma}_{ext} = \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = d_1^2 \right\}$ où $d_1 = 5$ et $N_{int} = 200$ sources sur l'enveloppe sphérique $\tilde{\Gamma}_{int} = \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = d_2^2 \right\}$ où $d_2 = 0.4$. On considère également $M = M_{\Gamma_d} + M_{\Gamma_i}$ points de collocation, tels que $M_{\Gamma_d} = 1000$ points approximent le bord extérieur Γ_d et $M_{\Gamma_i} = 1000$ points discrétisent le bord intérieur Γ_i .

Les Figures 2.25(a) et 2.25(b) présentent les reconstructions numériques de u et u' , respectivement sur \mathcal{C}_{Γ_d} obtenues pour des données bruitées ($\delta = 5\%$) et $c = 10^{-2}$.

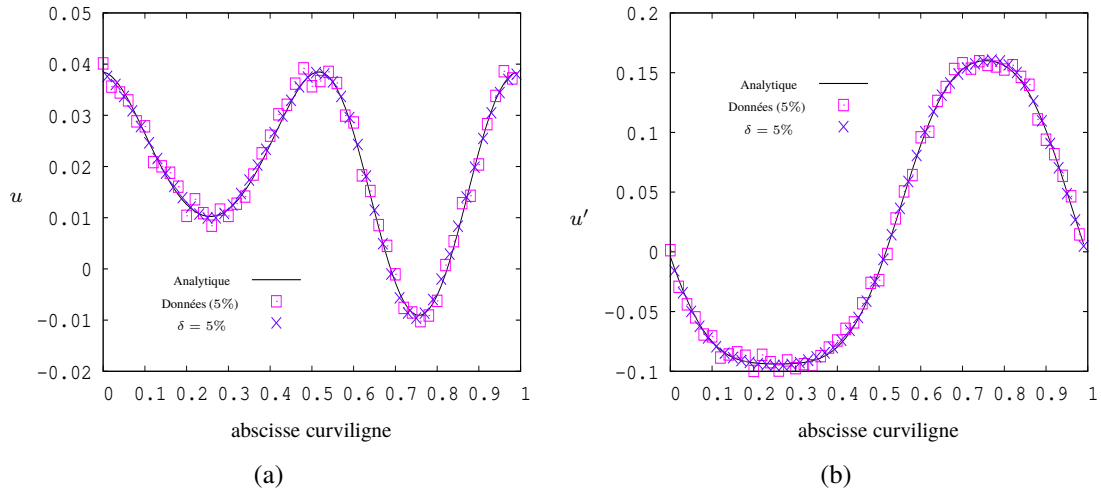


Figure 2.25 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur \mathcal{C}_{Γ_d} pour $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-2}$.

Les reconstructions numériques de u et u' sur \mathcal{C}_{Γ_i} pour différents niveaux de bruit δ sont représentées sur les Figures 2.26(a) et 2.26(b), respectivement.

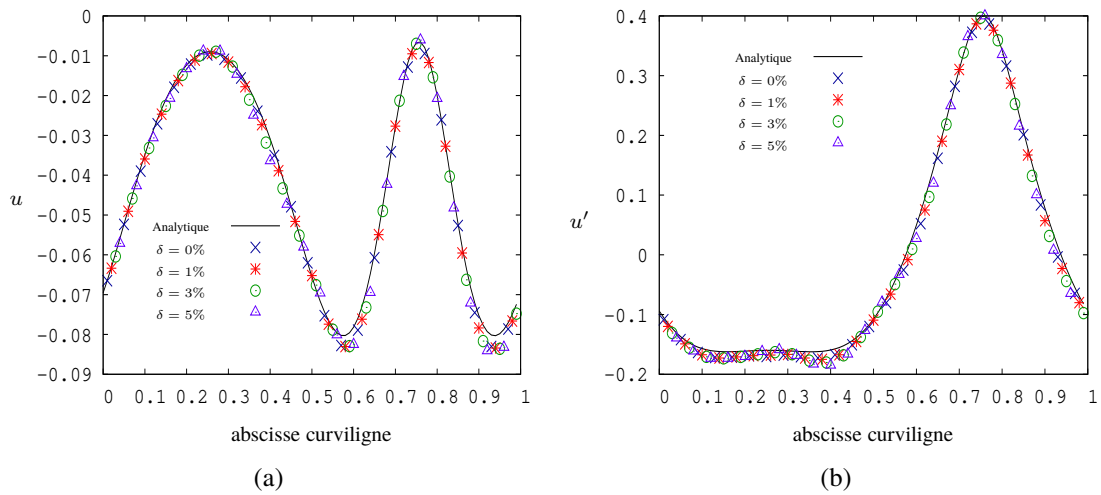


Figure 2.26 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur \mathcal{C}_{Γ_i} pour différentes valeurs de δ et $c = 10^{-2}$.

Les reconstructions numériques sont très précises, on remarque que l'algorithme est stable dans le cas d'une solution à valeurs singulières et qu'il permet le débruitage des données.

2.6 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la résolution du problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz. Nous avons présenté des résultats numériques obtenus avec la méthode de régularisation évanescence pour des problèmes bidimensionnels et tridimensionnels. La mise en œuvre numérique de la méthode a été réalisée en utilisant la méthode des solutions fondamentales, qui permet de rechercher la solution de notre problème dans une base de solutions exactes de l'équation d'Helmholtz.

Des exemples numériques pour des domaines à frontières régulières ou présentant des points anguleux et pour des solutions régulières ou à valeurs singulières montrent la robustesse de l'algorithme itératif. Pour toutes les situations analysées, nous retrouvons des reconstructions précises de la solution et de sa dérivée normale sur toute la frontière, avec toutefois, des erreurs commises lors de la reconstruction de la dérivée normale supérieures à celles commises sur la solution. Les discontinuités de la dérivée normale dans le cas d'un domaine présentant des points anguleux ne permettent pas d'obtenir des reconstructions d'aussi bonne qualité que celles obtenues dans le cas d'un domaine à frontière régulière.

Nous avons remarqué la stabilité de l'algorithme vis à vis de petites perturbations sur les données et, en particulier, sa capacité à débruiter les données puisque celles-ci sont recalculées. Le niveau d'erreur est proportionnel et linéaire par rapport au niveau de bruit, ce qui confirme la stabilité de la méthode par rapport au bruit. De plus, les reconstructions obtenues sont indépendantes du coefficient de régularisation c , qui joue un rôle d'accélérateur de convergence. Cependant, la qualité des reconstructions est influencée par le choix du nombre de sources utilisées pour la discrétisation avec la méthode des solutions fondamentales. La position des sources, quant à elle, n'influence pas les résultats, à condition que les sources soient positionnées suffisamment loin du domaine. La méthode des solutions fondamentales nous a toutefois permis de discrétiser facilement des problèmes tridimensionnels et de calculer a posteriori la solution à l'intérieur du domaine. Lorsque les paramètres de la discrétisation sont fixés de manière optimale, le niveau d'erreur des reconstructions est inférieur au niveau de bruit entachant les données.

Conclusion de la partie I

Nous avons étudié les problèmes de complétion de données de type Cauchy et plus particulièrement, celui associé à l'équation d'Helmholtz. Le caractère mal posé du problème de Cauchy rend indispensable l'utilisation d'une méthode de résolution stable par rapport à de petites perturbations sur les données. Les méthodes de régularisation de type Tikhonov, la méthode de quasi-réversibilité et les méthodes de régularisation par commande optimale permettent de contrôler la solution grâce à un opérateur régularisant. L'opérateur du problème est perturbé par l'ajout d'un terme régularisant dépendant d'un paramètre de régularisation. Les solutions approchées obtenues sont alors dépendantes de ce paramètre. La méthode itérative alternée, la méthode basée sur la minimisation d'une erreur en énergie et la méthode de Steklov-Poincaré remplacent le problème de Cauchy par une suite de problèmes mixtes bien posés.

Le point commun à toutes ces méthodes (Tableau 1.1) est qu'elles considèrent les données comme des quantités exactes (elles ne sont pas recalculées). Elles expriment ainsi les inconnues du problème directement en fonction des données, alors que celles-ci peuvent être entachées d'erreurs. Nous avons alors présenté la méthode de régularisation évanescence, adaptée à la résolution des problèmes de Cauchy, bien connus pour être instables vis à vis de faibles perturbations sur les données. Cette méthode, initialement introduite pour résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace, est différente par le fait qu'elle distingue les quantités fiables des quantités non fiables. L'idée de base de la méthode est de rechercher parmi toutes les solutions de l'équilibre celle qui s'approche au mieux des données. Le problème de Cauchy est remplacé par une suite de problèmes d'optimisation et la solution ainsi calculée ne dépend pas d'un coefficient de régularisation. Elle vérifie l'équation d'équilibre et est stable vis à vis du bruit sur les données puisque celles-ci sont recalculées afin d'être compatibles.

Nous avons étendu le champ d'application de la méthode de régularisation évanescence à la résolution de problèmes de Cauchy associés à l'équation d'Helmholtz. La méthode des solutions fondamentales est la méthode numérique utilisée pour discrétiser l'espace des solutions de l'équation d'Helmholtz. Des simulations numériques permettent de reconstruire de manière précise la solution et sa dérivée normale sur toute la frontière du domaine, pour des domaines à frontières régulières

ou présentant des points anguleux et pour des solutions régulières ou à valeurs singulières. Les résultats obtenus dans le cas d'un domaine présentant des points anguleux sont toutefois moins précis que ceux obtenus dans le cas d'une frontière régulière à cause des discontinuités de la dérivée normale.

Nous avons également étendu la méthode de régularisation évanescence à des problèmes tridimensionnels pour lesquels le comportement de l'algorithme itératif et les résultats obtenus amènent aux mêmes conclusions que celles faites sur les simulations numériques bidimensionnelles. L'algorithme est très stable vis à vis du bruit sur les données, qui sont recalculées, ce qui permet de les débruiter. Les reconstructions sont indépendantes du coefficient de régularisation, qui n'influence que la vitesse de convergence.

Nous avons montré la robustesse de la méthode par rapport à de petites perturbations sur des données numériques, ce qui est prometteur pour l'analyse de données expérimentales. L'accessibilité, par exemple, à des mesures acoustiques stationnaires nous permettrait d'évaluer les performances et en particulier, la stabilité de la méthode pour des mesures réelles. L'exemple numérique tridimensionnel pour une solution à valeurs singulières est un préliminaire à l'application de la méthode au contrôle non destructif, nous pensons à des problèmes réels d'identification de sources comme un microphone, un point chaud, en thermique, ou une inclusion, en élasticité.

Partie II

Méthode de régularisation évanescente pour l'identification de conditions aux limites à partir de mesures de champs partielles

Introduction

La connaissance des conditions aux limites est nécessaire à de nombreuses applications de différentes branches de l'ingénierie, telles que la thermique, la mécanique, l'acoustique... En général, la mesure directe de ces données se heurte à l'impossibilité de placer l'instrumentation adéquate. Par exemple, les forces agissant sur une structure mécanique ne sont pas facilement mesurables avec des capteurs, à cause de l'impossibilité de les placer entre les sources d'excitation et la structure étudiée. La détermination de la donnée n'est alors possible que grâce à des informations complémentaires, telles que des mesures surabondantes sur la partie restante de la frontière, on parle de problème de complétion de données. Dans certains cas, des mesures directes sur la frontière sont irréalisables, par exemple, en thermique, lorsqu'il s'agit de mesures de température d'une surface très chaude ou en acoustique, lorsque les sources sont mobiles ou non localisées. Afin de pallier ce problème, des mesures de quantités aisément observables, comme des champs de températures, de déplacements ou de vitesses, peuvent être réalisées. L'objectif principal de nos travaux est de proposer une approche numérique qui permet d'identifier les conditions aux limites à partir de mesures de champs.

Dans cette partie, nous présentons l'intérêt de la méthode de régularisation évanescence pour interpréter des mesures de champs de déplacements. Dans le cadre d'une collaboration avec le laboratoire LaMé de l'INSA-Centre Val de Loire, des essais de compression (Figures 2.27 et 2.28) ont été réalisés à Bourges. Les mesures de champs de déplacements ont été obtenues à l'aide d'une caméra et d'une méthode numérique de corrélation d'images.



Figure 2.27 – Essai de compression

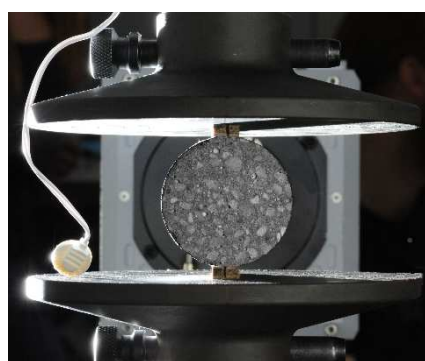


Figure 2.28 – Essai Brésilien

Afin d'observer des phénomènes localisés et d'avoir une définition suffisante des images enregistrées, seule la zone centrale des éprouvettes est filmée. Nous ne disposons donc que d'une mesure partielle du champ de déplacements, qui de plus est entachée de bruit de mesure et perturbée par un mouvement de solide rigide, provoqué par la mise en place des essais et le dispositif expérimental. Ce déplacement rigide peut être prépondérant par rapport à celui engendré par la déformation de la structure. Nous n'avons pas d'informations concernant les conditions aux limites, hormis des informations de bord libre. En effet, elles ne peuvent pas être mesurées de manière directe près des zones de contact, elles ne sont connues que de manière globale et émettre des hypothèses sur leur répartition pourrait engendrer des erreurs de modélisation.

La Figure 2.29 représente la modélisation du problème modèle d'identification de conditions aux limites à partir de mesures de champs partielles.

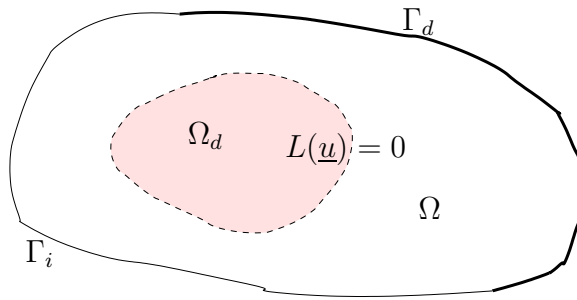


Figure 2.29 – Modélisation du problème modèle

Nous considérons que le domaine Ω ainsi que sa frontière Γ sont parfaitement connus. La frontière Γ est composée de deux parties, Γ_d et Γ_i . Γ_d est la partie du bord sur laquelle nous avons éventuellement des informations sur les conditions aux limites en terme de vecteur contraintes \underline{u}' :

$$\underline{u}' = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \tilde{\underline{u}}' \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_d \quad (2.27)$$

avec $\tilde{\underline{u}}'$ les conditions aux limites accessibles et \underline{n} la normale unitaire extérieure.

La partie Γ_i est une partie inaccessible à la mesure, sur laquelle nous n'avons aucune information. Le sous-domaine Ω_d décrit la zone centrale sur laquelle nous avons les mesures \underline{u}^d de champs de déplacements :

$$\underline{u} = \underline{u}^d \quad \forall \underline{x} \in \Omega_d \quad (2.28)$$

L'équation d'équilibre est donnée par :

$$\text{div} \underline{\sigma} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.29)$$

avec $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Cauchy. On suppose une loi de comportement de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.30)$$

où \mathbb{A} est le tenseur de Hooke et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est le tenseur de déformations infinitésimales qui s'exprime en fonction du déplacement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}} \underline{u} + \underline{\underline{\nabla}}^T \underline{u}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.31)$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, les équations (2.29), (2.30) et (2.31) conduisent à :

$$L(\underline{u}) = 0 \quad (2.32)$$

où L désigne l'opérateur de Lamé.

Le problème modèle de complétion de données à partir de mesures de champs partielles est un problème mal posé puisqu'il manque les conditions aux limites sur la partie Γ_i de la frontière. Ce problème est mal posé au sens d'Hadamard [97] car si les données sont compatibles, nous avons existence et unicité de la solution mais celle-ci est instable. Une petite altération des données (2.27) et (2.28) peut fortement perturber la solution sur Γ_i . Nous proposons de généraliser la méthode de régularisation évanescence à ce type de problème afin d'identifier les conditions aux limites sur tout le bord Γ et de compléter et débruiter les données partielles du champ de déplacements (2.28).

Dans un premier chapitre bibliographique, nous rappelons quelques techniques expérimentales qui permettent d'obtenir des mesures de champs et comment ces mesures peuvent être utilisées dans le cadre de l'identification de paramètres matériau. Un second chapitre présente la généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles. La mise en œuvre numérique avec la méthode des éléments finis et la méthode des solutions fondamentales est détaillée et afin de valider les algorithmes, des résultats obtenus pour un exemple numérique sont présentés. Pour finir, nous présentons l'application de nos travaux à des mesures réelles issues d'expérimentations réalisées à Bourges.

Chapitre 3

Mesures de champs et méthodes d'identification de paramètres

Sommaire

3.1	Mesures de champs et techniques expérimentales	81
3.2	Quelques techniques d'identification à partir de mesures de champs	83
3.2.1	La méthode des champs virtuels (VFM)	83
3.2.2	La méthode de l'écart à l'équilibre (EGM)	85
3.2.3	La méthode de recalage par éléments finis (FEMU)	86
3.2.4	La méthode de l'écart à la réciprocité (RGM)	88
3.2.5	La méthode de l'erreur en relation de comportement (CEGM)	89
3.2.6	Résumé	90
3.3	Bilan du chapitre	92

Le nombre grandissant de nouveaux matériaux et la difficulté à identifier les lois de comportement associées amènent à remettre en question les techniques standards d'identification de propriétés matérielles. Les techniques conventionnelles, qui emploient par exemple des jauges, permettent d'identifier les propriétés matérielles en utilisant une relation entre le chargement global appliqué et des mesures locales du champ de déformations. Limités à l'étude des comportements homogènes avec ces techniques, les expérimentateurs portent un intérêt grandissant aux techniques de mesures de champs.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques méthodes expérimentales qui permettent d'obtenir des mesures de champs. Ces mesures étant actuellement très exploitées dans le cadre de l'identification de paramètres matériau, plusieurs méthodes d'identification à partir de mesures de champs sont présentées.

3.1 Mesures de champs et techniques expérimentales

Les techniques de mesures de champs sont de plus en plus utilisées par la communauté de la mécanique expérimentale [181, 193]. Elles sont une bonne alternative aux méthodes standards, qui ne permettent d'obtenir qu'une information moyennée sur une petite surface proche du point où la mesure est relevée. L'utilisation de jauges extensométriques est un exemple de procédé de mesure classique qui présente certaines limites. Les jauges de déformations permettent des mesures précises de déformations mais ces informations demeurent locales. Par conséquent les jauges contribuent principalement aux dépouillements d'essais homogènes en terme de sollicitation et de champ observé. Dans le cadre des problèmes d'identification, plus d'un test est requis pour obtenir une quantité suffisante de mesures point par point, ce qui augmente le coût des essais et le risque d'erreurs de mesure.

Depuis la fin du XX^{ème} siècle, les techniques de mesures optiques sans contact ne cessent de se développer. L'essor de ces méthodes s'accorde avec le développement récent des caméras numériques et du traitement d'images, les rendant ainsi de plus en plus attrayantes. Elles permettent d'obtenir des données expérimentales très riches et de prendre en considération des essais hétérogènes en termes de déformations/contraintes. Il est ainsi possible d'extraire une grande quantité d'informations plus fiables à partir d'un petit nombre de tests. Les principales techniques de mesures de champs sont la photo-élasticimétrie [180], le moiré interférométrique [175], l'interférométrie holographique et de speckle [116], la méthode de la grille [190] et la corrélation d'images numériques (CIN) [194].

Parmi ces techniques, la corrélation d'images numériques est probablement la plus utilisée dans les communautés académique et industrielle de part sa simplicité apparente. Initiée au début des années 1980 pour déterminer les déplacements plans et les déformations d'un solide à partir d'images numériques d'ultrasons [173], de nombreuses améliorations lui ont ensuite été apportées, notamment sur l'algorithme

de détection sub-pixel basé sur l'interpolation du déplacement [194]. Sa mise en place est moins coûteuse que celle des méthodes interférométriques puisqu'elle ne nécessite pas l'utilisation de laser ou de matériel optique spécifique et la préparation de la surface de l'échantillon est simple à réaliser. De plus, l'acquisition et l'analyse des données font appel à des procédures bien établies, ce qui a pour effet de réduire le temps de calcul.

Le principe de la CIN est de comparer deux images pour estimer les déplacements des points d'une image déformée par rapport à une image de référence. Les données d'entrée des algorithmes de corrélation sont les matrices de niveaux de gris des images. Un mouchetis aléatoire est alors appliqué, selon le type de matériau, sur la surface à observer sous l'hypothèse que la texture de surface suit passivement le déplacement du solide sollicité. L'étape de corrélation consiste alors à rechercher dans l'image déformée, le même mouchetis que dans l'image de référence. On distingue deux variantes de corrélation, les méthodes de corrélation dites "locales" et "globales". L'approche locale, largement utilisée par les codes actuellement commercialisés et universitaires, consiste à utiliser la corrélation croisée : la région d'intérêt sélectionnée est découpée en série d'images et le champ cinématique recherché est décomposé en une multitude de transformations locales indépendantes définies sur les images. Les choix de l'ordre d'interpolation de la transformation, de la taille des images et du pas d'échantillonnage de la zone d'intérêt ne doivent pas être anodins puisqu'ils influencent la qualité du champ cinématique ainsi mesuré [50]. Pour les méthodes dites "globales", la région d'intérêt n'est pas divisée en images mais traitée en une seule fois et la corrélation est enrichie d'informations a priori propres à chaque problème traité. On peut citer l'outil CORRELI^{Q4} [108] qui permet d'obtenir un champ de déplacements de même nature que ceux provenant de la simulation numérique (éléments finis). Cet outil repose en particulier sur l'hypothèse de continuité du champ de déplacements mesuré.

Les mesures de champs cinématiques obtenues peuvent être exploitées de nombreuses manières [107]. Elles permettent aux expérimentateurs de contrôler, avant de réaliser l'essai mécanique étudié, si les conditions aux limites correspondent à celles désirées [59]. Elles peuvent être confrontées aux mesures des jauges extensométriques pour contrôler une expérience [85]. Ces techniques de mesures sans contact sont une solution pratique dans le cas de solides mous ou d'environnements spéciaux (chauds, corrosifs,...) pour lesquels les jauges ne sont pas adaptées. Enfin, on leur trouve une utilité considérable pour les essais où les champs sont hétérogènes, pour lesquels la mesure obtenue par les techniques extensométriques standards ne suffit pas à mener à bien l'expérience et plus particulièrement quand la localisation de l'hétérogénéité n'est pas connue a priori (contraintes localisées, localisation de défauts, initiation et propagation de fissures). Couplées à des méthodes d'identification, les techniques de mesures de champs rendent possible l'identification de propriétés matérielles éventuellement hétérogènes.

3.2 Quelques techniques d'identification à partir de mesures de champs

Plusieurs stratégies d'identification à partir de mesures de champs ont récemment été développées. Ces approches inverses font toutes appel à des principes de la mécanique bien connus, tels que les équations d'équilibre et de comportement et peuvent être dissociées en deux groupes : les méthodes itératives et les méthodes non-itératives. Parmi les méthodes itératives, nous pouvons citer la méthode de recalage par éléments finis (FEMU), la méthode de l'écart à la réciprocité (RGM) et la méthode de l'erreur en relation de comportement (CEGM). Ces dernières permettent d'identifier les paramètres constitutifs d'un modèle de comportement à partir de leur estimation initiale nécessaire au calcul numérique, faisant essentiellement appel à des analyses éléments finis, des champs de déplacements et/ou de contraintes. Les paramètres sont identifiés en minimisant une fonction coût dans laquelle les mesures sont comparées à leurs homologues calculés. Les méthodes non-itératives sont représentées par la méthode de l'écart à l'équilibre (EGM) et la méthode des champs virtuels (VFM). Les champs de déplacements mesurés sont introduits dans une loi de comportement postulée, dont les paramètres sont à identifier, afin d'évaluer les champs de contraintes associés. Les paramètres recherchés sont donc identifiés grâce aux relations fournies par les équations d'équilibre.

Le principe de chacune de ces méthodes d'identification est énoncé ci-dessous, leurs avantages et limites respectifs sont également discutés.

3.2.1 La méthode des champs virtuels (VFM)

Grédiac [94] introduit la méthode des champs virtuels dans le cadre de l'élasticité statique anisotrope. Les paramètres θ d'une loi de comportement (2.30) postulée a priori sont recherchés à partir de données surabondantes : le champ de déformations $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}$ est accessible à la mesure dans tout le domaine (il peut être obtenu par dérivation du champ de déplacements mesuré) et les conditions de chargement $\underline{u}' = \underline{\tilde{u}}'$ sont connues.

L'idée est d'exploiter le Principe des Travaux Virtuels (PTV) pour des choix particuliers de champs virtuels adaptés au problème d'identification étudié. En l'absence de forces volumiques et en supposant que les conditions aux limites en terme de déplacements et de contraintes (2.27) sont accessibles sur Γ_d , la forme faible des équations d'équilibre locales (PTV) s'écrit [95] :

$$-\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}^*) dV + \int_{\Gamma_d} \underline{u}' \cdot \underline{u}^* dS = \int_{\Omega} \rho \underline{\underline{\gamma}} \cdot \underline{u}^* dV \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{C}_A \quad (3.1)$$

avec \underline{u}^* un champ de déplacement virtuel, ρ la masse volumique, $\underline{\underline{\gamma}}$ le vecteur accélération et \mathcal{C}_A l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles

satisfaisant les conditions aux limites en terme de déplacements sur Γ_d . On suppose que les champs virtuels cinématiquement admissibles sont des fonctions \mathcal{C}^0 .

Il est nécessaire d'écrire le PTV pour au moins autant de champs virtuels indépendants que de paramètres constitutifs recherchés. Chaque choix de champs virtuels amène à une équation scalaire qui doit être vérifiée par la loi de comportement (2.30) [49]. Il existe plusieurs manières de choisir les champs virtuels [16] : par construction analytique au moyen de fonctions polynomiales, par construction automatique grâce à une procédure applicable dans le cas d'une paramétrisation linéaire [96], ou par définition par morceaux sur plusieurs sous-domaines définis a priori. Les deux dernières approches sont les moins faciles à mettre en oeuvre mais elles permettent une identification moins sensible au bruit. Dans le cas de la construction automatique des champs virtuels, il y a une infinité de champs dits "spéciaux" [96], ils sont alors choisis de manière à ce que le système ait le meilleur conditionnement possible et que les paramètres recherchés soient moins sensibles au bruit [17]. La définition des champs par morceaux sur plusieurs sous-domaines est préférée, pour sa flexibilité, à une expression unique de la fonctionnelle sur tout le domaine. Chaque fonction de forme peut être définie par un polynôme de plus bas degré sur chaque sous-domaine, ce qui rend l'identification moins sensible au bruit qu'avec un polynôme unique de plus haut degré. Cette dernière approche est la plus utilisée [95] et en plus de ses fonctions d'identification, la méthode des champs virtuels permet de générer des outils utiles à la prédiction de la sensibilité au bruit des paramètres recherchés.

Le caractère direct de la méthode des champs virtuels est l'un de ses principaux avantages, dans de nombreux cas les paramètres recherchés peuvent être identifiés directement à partir de mesures, sans calcul numérique (par la méthode des éléments finis [204] par exemple) du champ de contraintes [95]. Le champ de déformations est obtenu par mesures de champs ou par dérivation approximative de mesures du champ de déplacements [16] mais la distribution de chargement est bien souvent difficile à mesurer. Pour faire face à cette limite, le champ de déplacements virtuel est restreint à être uniforme dans la direction du chargement sur la partie du bord où ce dernier est prescrit [96]. Subramanian et Nigamaa proposent de relaxer cette contrainte afin d'obtenir une version plus flexible de la méthode des champs virtuels (EVFM) [93, 167].

La méthode des champs virtuels est basée sur la configuration de référence, définie dans le système de coordonnées global contrairement au champ de déplacements virtuel défini de manière locale. La méthode néglige alors les mouvements de corps rigides, ce qui peut engendrer une identification peu précise des paramètres constitutifs de la loi de comportement. Zhang et Pan [202] proposent une version modifiée de la méthode afin de prendre en compte les translations et rotations des points de mesures, l'effet d'éventuels mouvements de corps rigides sur l'identification est analysé. Dans le cas de mesures expérimentales, de petits mouvements hors

plan peuvent également perturber l'essai et amener à une identification de mauvaise qualité, une corrélation d'images stéréo-numériques spéciale est implémentée [203] pour améliorer la précision de la méthode des champs virtuels.

3.2.2 La méthode de l'écart à l'équilibre (EGM)

La méthode de l'écart à l'équilibre a été introduite par Claire et al. [68] en tant que procédure d'identification d'une loi d'endommagement à partir de données de champs de déplacements. L'idée de cette méthode est de chercher le champ de propriétés mécaniques qui répond au mieux aux équations d'équilibre (2.29), à partir de données de champs de déplacements supposées connues et fixées sur toute la surface du domaine considéré. Les erreurs de modèle ou de mesures ne permettent pas de satisfaire exactement les équations d'équilibre donc ces dernières sont satisfaites au moyen d'une minimisation. La connaissance du champ de déplacements \underline{u} sur toute la surface étudiée permet de calculer le champ de contraintes $\underline{\sigma}$ en tout point du domaine à partir d'une loi de comportement (2.30) prédite.

Le tenseur de Hooke \mathbb{A} , représentant la distribution spatiale des propriétés mécaniques associées au modèle choisi, peut ainsi être déterminé en minimisant une fonctionnelle de la forme :

$$J(\mathbb{A}) = \alpha S_{\Omega} \left\| \text{div}(\mathbb{A} : \underline{\nabla} \underline{u}) \right\|_{\Omega}^2 + \beta L_{\Gamma_d} \left\| \mathbb{A} : \underline{\nabla} \underline{u} \cdot \underline{n} - \tilde{\underline{u}}' \right\|_{\Gamma_d}^2 + \gamma \sum_i \left\| \int_{\mathcal{C}_i} \mathbb{A} : \underline{\nabla} \underline{u} \cdot \underline{n} dx - P_i \right\|^2 \quad (3.2)$$

avec S_{Ω} l'aire du domaine, L_{Γ_d} la longueur de la partie Γ_d de la frontière, α, β et γ des coefficients sans dimensions qui pondèrent la contribution du champ de déplacements mesuré et du chargement imposé en fonction de leurs incertitudes respectives. La distribution des efforts étant difficilement accessible comparé au champ de déplacements, le dernier terme de la fonctionnelle (3.2) permet de prendre en compte la condition de Neumann sur Γ_d au sens faible en imposant un effort résultant P_i sur une partie \mathcal{C}_i du bord.

Le champ de déplacements est accessible, au moyen d'un calcul éléments finis ou par corrélation d'images numériques, sur une grille dont les nœuds coïncident avec le maillage éléments finis [16]. Les déplacements nodaux connus et les propriétés élastiques inconnues sont supposés uniformes sur chaque élément mais variables d'un élément à un autre. Lorsque l'on considère des éléments quadratiques et que l'on ne traite que des nœuds milieux communs à deux éléments, on obtient un système linéaire dans lequel les inconnues sont écrites sous forme logarithmique [70].

Claire et al. [69] introduisent un indicateur d'erreur afin d'améliorer la qualité de l'identification. En effet, le bruit de mesure initialement présent est amplifié car la procédure d'identification utilise la dérivée seconde du champ de déplacements. Deux stratégies d'amélioration sont discutées dans [4], l'une utilisant une formu-

lation reconditionnée de la méthode et l'autre prenant en compte explicitement la matrice de covariance des mesures de déplacement. La combinaison de ces deux dernières permet de réduire de manière significative le bruit de mesure. Des approches avec préconditionnement sont également bienvenues dans le cadre d'une implémentation aux différences finies [49] afin de limiter l'amplification du bruit de mesures induite par la dérivation numérique. Une approche en deux étapes est proposée [2] pour obtenir une procédure d'identification plus robuste. Il est également possible d'améliorer la robustesse au bruit en reconditionnant le problème d'identification [189]. Il est proposé d'identifier, en plus du champ de propriétés élastiques, le chargement à partir de mesures cinématiques réalisées lors d'un essai à chargement sans contact [3].

La méthode de l'écart à l'équilibre présente l'avantage d'être directement applicable à des mesures de champs de déplacements, cependant les mesures sont nécessaires sur tout le domaine étudié. Cette dernière peut être considérée comme un cas particulier de la méthode des champs virtuels en considérant plusieurs champs particuliers par morceaux, chacun d'eux étant défini par un déplacement virtuel non nul d'un des nœuds milieux commun à deux éléments adjacents du maillage [16].

3.2.3 La méthode de recalage par éléments finis (FEMU)

La méthode de recalage par éléments finis [122] consiste à mettre à jour les paramètres d'un modèle éléments finis dans le but de minimiser la différence entre un champ mesuré et un champ simulé. Fondamentalement on distingue deux approches [16], basées sur la minimisation de l'écart entre les efforts prédits par un calcul éléments finis et accessibles à la mesure (FEMU-F) ou entre les champs de déplacements calculé et mesuré (FEMU-U). La méthode FEMU-F [172] nécessite l'accessibilité du champ de déplacements sur tout le domaine ainsi que des efforts prescrits tandis que l'approche FEMU-U [172] autorise la connaissance partielle du champ de déplacements et amène à minimiser une fonctionnelle exprimée en terme de déplacements sous la contrainte des efforts résultants si les efforts prescrits sont partiellement connus.

L'approche FEMU-U consiste à minimiser une fonction coût $J(\theta, \omega)$ qui dépend des paramètres θ recherchés et des conditions aux limites accessibles ω . La fonctionnelle s'exprime en fonction de la différence entre le champ $\underline{u}(\theta, \omega)$ issu du calcul éléments finis et le champ mesuré \underline{u}^d :

$$J_u(\theta, \omega) = \frac{1}{2} \left(\underline{u}^d - \underline{u}(\theta, \omega) \right)^T \underline{\underline{W}}_u \left(\underline{u}^d - \underline{u}(\theta, \omega) \right), \quad (3.3)$$

avec $\underline{\underline{W}}_u$ une matrice de pondération symétrique, définie et positive.

Le calcul éléments finis est réalisé avec un premier jeu de paramètres θ supposé et tant que la fonction coût (3.3) évolue de manière significative ou est supérieure

à un seuil prédéfini, une nouvelle itération est engagée avec un nouveau calcul éléments finis faisant intervenir les paramètres calculés à l'itération précédente.

Pagnacco propose une variante de FEMU-U [171] en appliquant un chargement connu sur tout le bord du domaine, elle permet une meilleure gestion des mouvements de corps rigides mais les paramètres identifiés sont cependant moins sensibles aux déplacements imparfaitement connus sur tout le bord. L'effort résultant appliqué sur l'échantillon étudié est également utile à une procédure d'identification [168] où les conditions aux limites et les paramètres élastiques sont identifiés simultanément à partir de mesures du champ de déplacements et de l'effort résultant.

La simulation numérique doit être effectuée avec une initialisation des paramètres à identifier, des mesures du champ de déplacements et les conditions aux limites appropriées. La sensibilité à ces données incomplètes et/ou entachées d'erreurs de mesure, de discrétisation et de modélisation a fait l'objet de nombreuses investigations dans le cadre des méthodes d'identification basées sur le recalage par éléments finis. Le choix des paramètres initiaux n'affecte généralement pas la valeur de ceux identifiés [170], ceci est certainement dû à la connaissance a priori de la plage dans laquelle les paramètres sont recherchés. Genovèse et al. [89] montrent que les résultats sont insensibles au choix a priori de ces plages, ce qui est certainement la conséquence de la grande quantité de données expérimentales issues de mesures de champs. La technique du filtre de Kalman [48] est une alternative utilisée pour filtrer les mesures et améliorer progressivement les estimations des paramètres recherchés par leurs valeurs moyennes.

Le champ de déplacements mesuré et les conditions aux limites étant des quantités non fiables, plusieurs auteurs [18, 183, 184] ont étudié la sensibilité au bruit pour des méthodes d'identification basées sur le recalage par éléments finis. Réthoré et al. [185] mettent en place un filtre qui efface les composantes non physiques du déplacement, telles que le bruit, en introduisant l'équation de la quantité de mouvement à la première étape de la procédure d'identification. Une procédure associant la méthode FEMU et la corrélation d'images numériques (FEMU-R) [135] est exposée, elle permet une robustesse optimale [183] en pondérant la contribution de chaque degré de liberté en fonction de leur niveau de confiance. L'approche couplée se résume à un problème de corrélation avec pour seules inconnues : les déplacements aux bords non libres et les propriétés matérielles. La corrélation d'image mécanique (MIC) présente également une faible sensibilité au bruit, cette dernière est plus directe puisqu'elle implique le résidu de niveau de gris plutôt que le résidu de déplacement [183]. Les deux dernières stratégies mentionnées fonctionnent dans le cas où les conditions aux limites ne sont pas bruitées. Réthoré [183] propose de contourner le besoin de conditions aux limites en extrayant simultanément des images, le champ de déplacements et les paramètres (Integrated-MIC) grâce à un filtre mécanique [185].

3.2.4 La méthode de l'écart à la réciprocité (RGM)

La méthode de l'écart à la réciprocité concerne en premier lieu les situations où des mesures de champ mécanique sont disponibles sur l'intégralité du bord du domaine étudié. Elle doit son nom à la propriété de réciprocité sur laquelle elle repose : si un solide est soumis à deux chargements distincts T_1 et T_2 qui impliquent deux réponses distinctes R_1 et R_2 , respectivement alors le "travail" des sollicitations liées au chargement T_1 dans la réponse R_2 est égal à celui de la sollicitation liée à T_2 dans la réponse R_1 . L'idée de la méthode d'écart à la réciprocité est d'écrire la relation de réciprocité entre le champ mesuré dans le solide réel et tout champ à l'équilibre dans un solide fictif ne présentant aucun des éléments recherchés (fissures, inclusions, sources,...) [15]. En comparant ces deux champs, la propriété de réciprocité n'est évidemment pas vérifiée mais la valeur scalaire de cet écart permet d'identifier la présence d'éléments inconnus puisqu'elle exprime la "différence" entre le domaine réel et le domaine fictif sain.

La fonctionnelle d'écart à la réciprocité, définie à partir du principe des travaux virtuels, s'écrit :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) : (\mathbb{A} - \mathbb{A}^*) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^*) dV = \int_{\partial\Omega} (\tilde{\underline{u}}' \cdot \underline{u}^* - \underline{u}'^* \cdot \underline{u}^d) dS \equiv R(\mathbb{A}^*, \underline{u}, \underline{u}^*), \quad (3.4)$$

où $(\underline{u}^*, \underline{u}'^*, \mathbb{A}^*)$ représente l'état adjoint.

Pour tout choix d'état adjoint \underline{u}^* , la fonctionnelle (3.4) est une fonction des données expérimentales $(\underline{u}^d, \tilde{\underline{u}}')$ connue. On cherche à annuler la fonctionnelle (3.4) pour tout état adjoint \underline{u}^* , ce qui donne, pour chaque état adjoint \underline{u}^* , une relation scalaire indépendante de la distribution des propriétés matérielles \mathbb{A}^* inconnue. Le champ de déplacements réel \underline{u} , n'étant a priori pas connu, est reconstruit en même temps que la distribution des propriétés \mathbb{A} au moyen d'une procédure itérative. Cette approche permet d'obtenir des résultats théoriques d'identifiabilité, il s'agit de montrer, pour des données de bord surabondantes, qu'il existe un unique ensemble d'éléments inconnus pour lequel la réponse de la structure coïncide avec les données de bord mesurées. Des méthodes constructives d'identification en résultent également, elles fournissent des méthodologies qui permettent de caractériser concrètement les inclusions, fissures, sources, etc. présentes dans le domaine [72].

La méthode de l'écart à la réciprocité a été introduite par Bui [56] et utilisée par Andrieux et Ben Abda [10, 11] pour localiser et identifier des fissures planes à partir de données de déplacement sur tout le bord du domaine. Un procédé direct pour localiser une ou plusieurs fissures planes à partir de données aux limites surabondantes sur le bord entier du domaine est ensuite exposé [13]. De nouveaux résultats sur l'identifiabilité de fissures 3D en élasticité sont également énoncés. Dans le cas de l'élasticité, Ben Abda et al. [35] proposent un algorithme rapide permettant de retrouver des fissures de type segment, ce dernier est basé sur la recherche du zéro de la fonctionnelle d'écart à la réciprocité.

L'efficacité de ces algorithmes a largement été prouvée [11, 14, 23, 35, 37], leur fonctionnement nécessite cependant l'accessibilité à des conditions aux limites surabondantes sur tout le bord, ce qui est limitant dans le cas de situations réelles. Cimentière et al. [64] présentent un algorithme en deux étapes pour retrouver des fissures de type segment à partir de données aux bords incomplètes. La première étape consiste à reconstruire les conditions aux limites sur tout le bord du domaine avec la méthode de régularisation évanescence et la seconde utilise l'écart à la réciprocité causé par la présence de la fissure pour la localiser.

La méthode de l'écart à la réciprocité peut être considérée comme une variante de la méthode des champs virtuels, présentée précédemment, dans le cas où les champs cinématiques ne sont connus que sur le bord et qu'aucune stratégie ne permet d'extrapoler ces mesures à l'intérieur du domaine [16].

3.2.5 La méthode de l'erreur en relation de comportement (CEGM)

Introduite en tant qu'estimateur d'erreur pour la méthode éléments finis par Lavdevze [129], la méthode d'erreur en relation de comportement mesure la distance entre un champ de contraintes donné $\underline{\tilde{\sigma}}$ et un autre champ de contraintes résultant de l'application d'une loi de comportement (2.30) à un champ de déplacement \underline{u}^d donné (2.28). L'idée de base est de considérer la relation de comportement comme non fiable, dans le sens où elle peut être erronée ou peu précise, d'où le nom de méthode d'erreur en relation de comportement. La méthode est en principe applicable à tout problème d'identification pour lequel on a accès à des données surabondantes [169] et s'accommode de manière naturelle aux mesures de champs [16]. Dans le cadre de l'identification de tenseurs élastiques hétérogènes \mathbb{A} à partir de mesures du déplacement \underline{u}^d , il existe deux variantes : soit on prend en compte de manière exacte des mesures cinématiques ou soit on applique ces dernières par un terme de pénalité. Si les données de déplacements sont exactes, la première variante permet de les introduire directement dans la fonctionnelle, qui s'exprime :

$$E(\underline{u}^d, \underline{\tilde{\sigma}}, \mathbb{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\tilde{\sigma}} - \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^d)) : \mathbb{A}^{-1} : (\underline{\tilde{\sigma}} - \mathbb{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^d)) dV \quad (3.5)$$

Les données sont en revanche introduites avec un terme de pénalité dans le cas où elles sont bruitées [58]. La fonctionnelle (3.5) exprime la distance entre une contrainte admissible et un déplacement admissible [87], elle est quantifiée par une norme énergétique qui est par la suite minimisée par une procédure d'identification.

La minimisation est réalisée au moyen d'une procédure itérative. Babaniyi et al. [22] présentent une approche directe moins coûteuse, basée également sur la minimisation de l'erreur en relation de comportement. Elle permet de reconstruire des propriétés matérielles, éventuellement discontinues, à partir du champ de déplacements mesurable sur tout le domaine. Les mesures de champ peuvent être accessibles dans tout le domaine et/ou sur son bord, Constantinescu [71] s'intéresse à l'identi-

cation du module d'Young à partir de conditions aux limites complètes, c'est à dire que le déplacement et les contraintes normales sont accessibles sur tout le bord du domaine. Une application originale de l'erreur en relation de comportement concernant les problèmes de complétion de données est proposée [5, 9]. Il s'agit de la méthode basée sur la minimisation d'une norme énergétique présentée dans le chapitre 1, elle permet de reconstruire les données sur le bord, connaissant des conditions aux limites de type Cauchy : le déplacement et les contraintes normales sont connus sur une partie de la frontière et aucune information n'est accessible sur la partie complémentaire.

La méthode est également appliquée à des mesures expérimentales pour identifier des paramètres matériau. Les résultats d'identification de paramètres matériau à partir de mesures expérimentales du champ de déplacements sont satisfaisants [90] malgré la nécessité de dériver les mesures bruitées pour calculer le champ de déformations impliqué dans la fonctionnelle. La méthode de l'erreur en relation de comportement modifiée est proposée comme une alternative plus robuste vis à vis du bruit de mesure et elle permet d'identifier les propriétés élastiques sur tout le domaine tout en gérant le manque de conditions aux limites. Le champ de déplacements n'est pas toujours mesurable sur toute la surface et les conditions aux limites sont souvent incomplètes. De plus, les informations accessibles ne sont pas toutes fiables, il faut considérer les erreurs de mesure pour les données expérimentales et les erreurs de modèle pour les simulations numériques. La méthode modifiée prend en compte toutes les informations théoriques et expérimentales et distinguent celles que l'on peut considérer fiables et non fiables [86]. Son application à des mesures réelles de champ de déplacements est proposée par Calloch et al. [58]. Azzouna et al. [41] propose une formulation de l'approche modifiée permettant de prendre en compte des conditions aux limites incomplètes (accès à une information de bord libre uniquement) et une zone de mesure pouvant être un sous-domaine du domaine étudié. Récemment, Huang et al. [111] propose une étude similaire, ces derniers travaux complètent ceux de Azzouna et al. [41] avec un premier pas vers l'identification de propriétés hétérogènes. La fonctionnelle à minimiser est une somme de termes faisant intervenir les quantités non fiables et des coefficients de pondération desquels la qualité des résultats d'identification dépend. L'approche d'identification s'avère être plus robuste que les méthodes utilisant le recalage par éléments finis, cependant la gestion de la fiabilité des conditions aux limites en terme d'efforts n'est pas optimale.

3.2.6 Résumé

Les méthodes d'identification présentées peuvent être divisées en deux groupes. Le premier est constitué des méthodes utilisant le recalage par éléments finis, la famille FEMU. Il s'agit certainement de l'approche la plus intuitive. Elle consiste à réaliser de manière itérative des simulations éléments finis d'un essai jusqu'à ce

que les paramètres constitutifs de la loi de comportement (2.30) qui établissent la meilleure correspondance entre le champ calculé et les mesures réelles soient trouvés. Le champ de déplacements résultant de cette technique satisfait les conditions de compatibilité (2.31) tandis que le champ de contraintes identifié n'est statiquement admissible qu'au sens faible. Le second groupe rassemble les méthodes d'identification qui extraient les paramètres constitutifs directement à partir de mesures de champs de déplacements. Les paramètres sont recherchés en tant que minimum de fonctions coût variées, telles que l'écart à l'équilibre, l'écart à la réciprocité et l'écart à la loi de comportement. Pour la méthode de l'écart à l'équilibre, l'erreur dans les équations d'équilibre (2.29) prescrites entre les éléments d'un domaine discrétisé est minimisée et pour la méthode de l'écart à la réciprocité, les estimations des paramètres sont obtenues en minimisant l'écart à la réciprocité entre un état adjoint et l'état expérimental. Contrairement aux autres méthodes, la méthode de l'erreur en relation de comportement considère la loi de comportement (2.30) comme une quantité non fiable [165]. Ces méthodes peuvent être considérées comme des applications de la méthode des champs virtuels en utilisant des champs particuliers [16, 18]. Cette dernière peut d'ailleurs également faire partie de ce groupe puisque l'identification est réalisée directement à partir de mesures de champs de déformations.

	VFM	EGM	FEMU	RGM	CEGM
Méthode itérative			•	•	•
Données de champs partielles			•	•	•
Conditions aux limites incomplètes	•	•		◦ [64]	•
Solution exacte de l'équation d'équilibre au sens faible	•		•	•	•
Faible sensibilité au bruit de mesures			◦ [135, 183]	◦ [64]	◦ [86]

Tableau 3.1 – Principales caractéristiques des méthodes • ou de leurs variantes ◦ [.] présentées

Le Tableau 3.1 résume les principales caractéristiques des méthodes (ou de leurs extensions). Certaines méthodes sont plus difficiles que d'autres à appliquer à des situations expérimentales puisqu'elles nécessitent des mesures de champs sur tout le domaine et/ou les conditions aux limites en tout point de la frontière. La gestion du bruit de mesures est également un challenge pour les méthodes d'identification. En ce qui concerne les méthodes du second groupe, mise à part la méthode des champs virtuels, elles font toutes appel à une fonctionnelle quadratique du gradient

de déplacement mesuré [183]. La dérivation de mesures bruitées implique une forte sensibilité au bruit des paramètres identifiés. Il n'y a pas de traitement particulier du bruit de mesures pour les méthodes standards de type FEMU, Azzouna et al. [40] discutent les résultats obtenus à partir de mesures de champs de déplacements filtrées. Le recours à un filtre a priori peut en effet s'avérer utile à l'analyse de données expérimentales en dépit de la perte d'informations qui en découle. Certains auteurs proposent des alternatives régularisantes [64, 86, 183] qui permettent une meilleure gestion du bruit. Cependant, certaines techniques de régularisation nécessitent des informations a priori sur les perturbations pour choisir le paramètre de régularisation dont la solution dépend.

3.3 Bilan du chapitre

L'utilisation de mesures de champs pour l'identification de paramètres mécaniques, le plus souvent associés aux propriétés matérielles du solide, est devenue un domaine très actif et prometteur de la mécanique expérimentale. Plusieurs stratégies d'identification à partir de mesures de champs ont été introduites, seulement, leur application à des données expérimentales n'est pas toujours optimale. L'instrumentation actuelle connaît certaines limites, de ce fait les mesures de champs, potentiellement partielles, sont généralement entachées d'un bruit et les conditions aux limites sont souvent mal connues. La gestion des conditions aux limites est un challenge pour les méthodes d'identification puisque le déplacement et la répartition des contraintes sont rarement connus sur toute la frontière. Dans certains cas, nous connaissons soit les conditions aux limites en terme de déplacement, soit en terme de contrainte, en tout point de la frontière. Dans d'autres cas, seules des conditions aux limites de type Cauchy sont accessibles, il s'agit d'informations sur le déplacement et les contraintes, connues uniquement sur une même partie de la frontière, l'autre partie de la frontière étant inaccessible à la mesure.

Chapitre 4

Méthode de régularisation évanescente pour les problèmes de complétion de données partielles

Sommaire

4.1	Le problème modèle	95
4.2	Formulation continue de la méthode	96
4.2.1	Définitions et notations	96
4.2.2	Formulation équivalente du problème modèle	97
4.2.3	La solution du problème physique qui s'approche au mieux des données	98
4.2.4	Un contrôle itératif de la solution	98
4.2.5	Convergence de l'algorithme	100
4.3	Formulations discrètes de l'algorithme itératif	103
4.3.1	Discrétisation par la méthode des solutions fondamentales	103
4.3.1.1	Approximation de l'espace des solutions $\mathbf{H}(\Gamma)$	103
4.3.1.2	Description de l'algorithme itératif	104
4.3.1.3	Critère d'arrêt et normes d'erreurs	106
4.3.2	Discrétisation en utilisant la méthode des éléments finis .	107
4.3.2.1	Approximation de l'espace des solutions $\mathbf{H}(\Gamma)$	107
4.3.2.2	Description de l'algorithme itératif	108
4.4	Validation de la méthode sur un exemple numérique	109
4.4.1	Simulations numériques avec la méthode des solutions fondamentales	111
4.4.1.1	Influence du coefficient de régularisation c . .	112
4.4.1.2	Reconstructions à partir de données bruitées .	114
4.4.1.3	Reconstructions à partir d'un champ de dépla- cements perturbé par un mouvement de solide rigide	118

4.4.1.4	Influence de la taille de la grille de données . . .	120
4.4.2	Simulations numériques par la méthode des éléments finis	123
4.4.2.1	Influence de la discrétisation du domaine . . .	124
4.4.2.2	Influence du coefficient de régularisation c . . .	128
4.4.2.3	Reconstructions à partir de données bruitées . . .	130
4.4.2.4	Influence de la taille de la grille de données . . .	135
4.4.3	Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes numériques	137
4.5	Applications à des situations réelles	139
4.5.1	Contribution à l'analyse d'essais de compression diamétrale	140
4.5.1.1	Essai de compression d'un cylindre en polyéthylène	140
4.5.1.2	Essai de traction indirecte sur un matériau quasi-fragile	149
4.5.2	Conclusions sur l'application de la méthode à des situations réelles	156
4.6	Bilan du chapitre	157

Ce chapitre présente la généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles. L'approche proposée consiste à rechercher parmi toutes les solutions d'une équation elliptique celle qui s'approche au mieux des mesures de champs partielles. Les mesures de champs sont accessibles sur une zone centrale du domaine étudié et nous nous intéressons à la reconstruction numérique des données manquantes et des conditions aux limites. La discrétisation de l'algorithme de résolution avec deux méthodes numériques est détaillée. Nous appliquons l'algorithme, en élasticité linéaire, à un exemple numérique de compression uniforme d'un solide, ce qui permet de montrer la précision et la robustesse de la méthode et de comparer les deux méthodes numériques utilisées. En complément nous ajoutons, dans l'Annexe C, des reconstructions obtenues pour un exemple numérique de compression à chargement non uniforme. L'approche proposée est ensuite appliquée à des situations réelles, en analysant des essais de compression diamétrale sur des éprouvettes en polyéthylène et en béton. Les mesures de champs de déplacements sont obtenues par CIN et nous cherchons, en utilisant l'algorithme implémenté grâce à la méthode des solutions fondamentales, à compléter et débruiter ces champs partiels et identifier les conditions aux limites.

4.1 Le problème modèle

Nous considérons un domaine ouvert Ω de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 , borné par sa frontière $\Gamma \equiv \partial\Omega$, telle que $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$, voir Figure 4.1. Γ_d est une partie de la frontière où des informations sur les conditions aux limites sont accessibles. Γ_i décrit la partie complémentaire de la frontière où aucune information sur les conditions aux limites n'est accessible. Nous définissons également le sous-domaine $\Omega_d \subset \Omega$, où des mesures de champs sont disponibles.

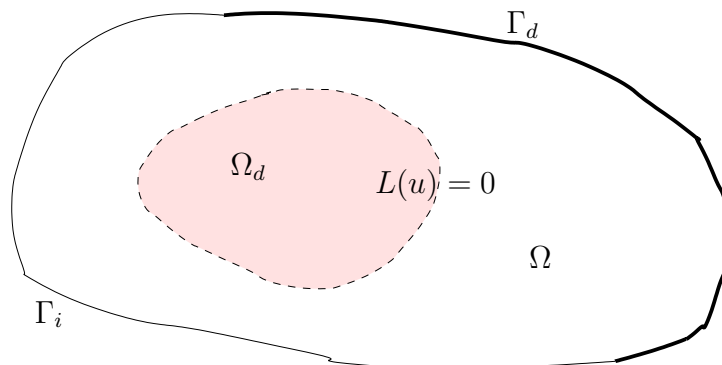


Figure 4.1 – Domaine

Nous supposons que la solution recherchée u est solution d'une équation ellip-

tique L dans le domaine Ω :

$$L(u) = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (4.1)$$

S'il est possible de mesurer le champ u sur une partition Ω_d de Ω et d'obtenir des informations fiables sur les conditions aux limites en terme de dérivée normale ou de contraintes u' sur Γ_d , alors la formulation du problème de complétion de données est donnée par l'équation (4.1) et les données incomplètes :

$$u = \phi_d, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_d \quad (4.2a)$$

$$u' = \psi_d, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_d \quad (4.2b)$$

Remarque : Lorsque u' représente la dérivée normale en tout point $\underline{x} \in \Gamma$, on considère $u' = \frac{\partial}{\partial \underline{n}}$ avec $\underline{n}(\underline{x})$ le vecteur normal unitaire extérieur et lorsque u' représente le vecteur contraintes en tout point $\underline{x} \in \Gamma$, on a $u' = \underline{\sigma} \underline{n}$ avec $\underline{\sigma}$ le tenseur des contraintes.

Si les données (4.2a) et (4.2b) sont compatibles, le problème (4.3) admet une unique solution. Néanmoins, la solution obtenue peut être instable, c'est à dire qu'elle serait sensible à de petites perturbations des données incomplètes.

$$\begin{cases} L(u) = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \\ u = \phi_d, & \forall \underline{x} \in \Omega_d \\ u' = \psi_d, & \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce problème, de ce fait, devient difficile à résoudre par son caractère mal posé. Les approches classiques utilisées pour le résoudre ne peuvent pas être utilisées. Nous faisons donc le choix de proposer une extension de la méthode de régularisation évanescence, initialement introduite pour résoudre des problèmes de type Cauchy [65, 67], pour régulariser le problème.

4.2 Formulation continue de la méthode

4.2.1 Définitions et notations

Considérons $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions à valeurs réelles dans Ω . Nous notons $H(\Omega_d)$ l'espace des restrictions dans Ω_d des éléments v de l'espace $H(\Omega)$. L'espace des fonctions traces de $H^1(\Omega)$ à Γ est noté par $H^{1/2}(\Gamma)$ et les restrictions des fonctions de l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ à $\Gamma_d \subset \Gamma$ définissent l'espace $H^{1/2}(\Gamma_d)$.

Par la suite, nous noterons par $\mathbf{H}^1(\Omega)$ l'espace $H^1(\Omega)^n$, avec n un entier strictement positif qui dépend de la dimension du problème et de sa nature (scalaire ou

vectorielle) et de la même manière pour les autres espaces de fonctions employés : $\mathbf{H}^1(\Omega_d) := \mathbf{H}^1(\Omega_d)^n$, $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) := \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)^n$ and $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d) := \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d)^n$. Finalement, $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ définit l'espace dual de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ et $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_d)$ l'espace dual de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d)$.

La solution du problème est recherchée dans l'espace $\mathbf{H}(\Omega)$ des solutions de l'équation (4.1) :

$$\mathbf{H}(\Omega) = \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad / \quad L(v) = 0 \text{ dans } \Omega \right\}$$

L'espace $\mathbf{H}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Il s'agit d'un espace de Hilbert lorsqu'il est équipé du produit scalaire usuel de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Nous définissons $\mathbf{H}(\Omega_d)$ l'espace des restrictions dans Ω_d de l'espace $\mathbf{H}(\Omega)$ des solutions de l'équation. Il est muni du produit scalaire usuel de $H^1(\Omega)$ et de sa norme associée $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}$.

Nous définissons $u|_{\Gamma}$ les traces des éléments de $\mathbf{H}(\Omega)$ sur Γ ainsi que leur dérivée normale (vecteur contrainte) associée $u'|_{\Gamma}$ définie sur Γ .

Il est ainsi possible de définir l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$ des fonctions solutions :

$$\mathbf{H}(\Gamma) = \left\{ U = (v, u, u') \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \right. \\ \left. \left| \begin{array}{l} v \in \mathbf{H}(\Omega), \quad v|_{\Gamma} = u, \quad v'|_{\Gamma} = u' \end{array} \right. \right\} \quad (4.4)$$

L'espace des fonctions solutions $\mathbf{H}(\Gamma)$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Nous définissons le produit scalaire associé $\langle U, V \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)}$ (4.5) et sa norme associée $\|\cdot\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}$.

$$\langle U, V \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v \cdot f \, d\Omega + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} u \cdot g \, ds \\ + \frac{l_0^2}{|\Gamma|} \frac{1}{E^2} \int_{\Gamma} u' \cdot g' \, ds, \quad (4.5)$$

$$\forall (U = (v, u, u'), V = (f, g, g')) \in \mathbf{H}(\Gamma) \times \mathbf{H}(\Gamma).$$

l_0 est une longueur caractéristique du domaine Ω et E est une constante propre au problème physique considéré (le module d'Young dans le cas de l'élasticité linéaire).

4.2.2 Formulation équivalente du problème modèle

Soit (ϕ_d, ψ_d) un couple de données compatibles, c'est à dire appartenant à $H(\Omega_d) \times H^{-1/2}(\Gamma_d)$, respectivement. Une formulation équivalente au problème (4.3) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U = (v, u, u') \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ v = \phi_d, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_d \\ u' = \psi_d, \quad \forall \underline{x} \in \Gamma_d \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Ce problème est mal posé au sens d'Hadamard [97] car même s'il admet une unique solution qui correspond à la solution du problème (4.3), cette solution ne dépend pas continûment des données (ϕ_d, ψ_d) . Difficile à résoudre par les techniques usuelles employées pour la résolution de problèmes directs, il est proposé de rechercher la solution comme la solution d'un problème d'optimisation.

4.2.3 La solution du problème physique qui s'approche au mieux des données

Une idée pour résoudre le problème (4.3) est de rechercher, parmi toutes les solutions de l'équation d'équilibre, celle qui est la plus proche des données. En effet, les données sont souvent issues de mesures expérimentales et ne peuvent pas être considérées comme parfaites. La compatibilité des données ne peut être vérifiée qu'aux erreurs de mesure près, les données sont alors considérées comme des quantités non fiables. En revanche, les équations d'équilibre et les conditions aux limites accessibles sur Γ_d doivent être vérifiées exactement car elles sont considérées comme des quantités fiables.

La solution du problème (4.3) est alors définie en tant qu'élément proximal, solution du problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } (\phi_d, \psi_d) \in H(\Omega_d) \times H^{-1/2}(\Gamma_d), \text{ trouver } U = (v, u, u') \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J(U) \leq J(V), \quad \forall V = (f, g, g') \in \mathbf{H}(\Gamma) \\ \text{sous la contrainte égalité : } u'|_{\Gamma_d} = \psi_d \\ \text{avec } J(\cdot) : \mathbf{H}(\Gamma) \longrightarrow [0, \infty[, \quad J(V) = \|f|_{\Omega_d} - \phi_d\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

4.2.4 Un contrôle itératif de la solution

Le problème (4.7) reste mal posé. Même s'il admet une unique solution, dans le cas de données compatibles, il est toujours possible, lorsque les données sont bruitées, de trouver une solution $U = (v, u, u')$ dans l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$, dont la restriction $v|_{\Omega_d}$ est aussi proche que l'on veut de la donnée ϕ_d , entraînant une solution instable sur le reste du domaine et sa frontière.

Il est donc nécessaire d'ajouter un terme de contrôle à la fonctionnelle et le problème d'optimisation (4.7) devient :

Soit $c > 0$ et $\Phi \in \mathbf{H}(\Gamma)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U = (v, u, u') \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c(U) \leq J_c(V), \quad \forall V = (f, g, g') \in \mathbf{H}(\Gamma) \\ \text{sous la contrainte égalité : } u'|_{\Gamma_d} = \psi_d \\ \text{avec } J_c(V) = \|f|_{\Omega_d} - \phi_d\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 + c\|V - \Phi\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

avec c un coefficient strictement positif et $\Phi \in \mathbf{H}(\Gamma)$.

Lemme 2.

Le problème (4.8) admet une unique solution $U = (v, u, u') \in \mathbf{H}(\Gamma)$ caractérisée par :

$$\left\langle v|_{\Omega_d} - \phi_d, f \right\rangle_{\mathbf{H}(\Omega_d)} + c \left\langle U - \Phi, V \right\rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} = 0 \quad \forall V = (f, g, g') \in \mathbf{H}(\Gamma) \quad (4.9)$$

Démonstration.

La fonctionnelle J_c est continue et strictement convexe sur $\mathbf{H}(\Gamma)$ et

$\lim_{\|V\|_{\mathbf{H}(\Gamma)} \rightarrow +\infty} J_c(V) = +\infty$. Elle admet donc un unique minimum U caractérisé par l'équation d'optimalité (4.9). \square

Ce problème d'optimisation est bien posé au sens d'Hadamard, en partie grâce au terme de contrôle qui agit sur l'ensemble du domaine. Ce terme peut être considéré comme un terme de régularisation, au sens de Tikhonov, et a pour effet de contrôler les problèmes de stabilité. La solution dépend ainsi continûment de la donnée ϕ_d mais elle dépend aussi des choix de c et de Φ .

Pour éviter la dépendance par rapport à c et Φ , la solution peut être considérée comme la limite d'une suite de problèmes bien posés. On considère alors l'algorithme itératif suivant :

Étant donnés $c > 0$ et $U^0 \in \mathbf{H}(\Gamma)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U^{k+1} = (v^{k+1}, u^{k+1}, u'^{k+1}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(U^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(V), \quad \forall V = (f, g, g') \in \mathbf{H}(\Gamma) \\ \text{sous la contrainte égalité : } u'|_{\Gamma_d} = \psi_d \\ \text{avec } J_c^{k+1}(V) = \|f|_{\Omega_d} - \phi_d\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 + c\|V - U^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

D'après le Lemme 2, à chaque itération, il existe un unique élément optimal U^{k+1} caractérisé par

$$\left\langle v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d, f \right\rangle_{\mathbf{H}(\Omega_d)} + c \left\langle U^{k+1} - U^k, V \right\rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} = 0 \quad \forall V = (f, g, g') \in \mathbf{H}(\Gamma) \quad (4.11)$$

Dans ce processus itératif, l'équation d'équilibre (4.1) est prise en compte de manière exacte puisqu'à chaque itération l'élément optimal est recherché dans l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$. La suite de fonctionnelles qui intervient dans (4.10) est composée de deux termes qui jouent des rôles différents. Le premier terme représente l'écart entre le champ optimal v^{k+1} et la donnée ϕ_d . Il est calculé seulement dans le sous-domaine Ω_d et permet de relaxer la donnée ϕ_d éventuellement entachée d'erreurs de mesure. Le second terme intervient sur l'ensemble du domaine Ω et de sa frontière Γ et non

seulement où les informations doivent être complétées, il s'agit d'un terme de régularisation qui contrôle la distance entre deux éléments optimaux successifs. Ce dernier tend vers zéro au fur et à mesure des itérations, ce qui permet d'obtenir une solution indépendante du choix de c .

On obtient ainsi, à chaque itération de l'algorithme (4.10), une solution exacte du problème physique (4.1) qui satisfait les conditions aux limites (4.2b) et qui s'accorde au mieux à la donnée ϕ_d du champ partiel (4.2a).

4.2.5 Convergence de l'algorithme

Théorème 4.

Soit ϕ_d des données compatibles de $\mathbf{H}(\Omega_d)$ associées à v de $\mathbf{H}(\Omega)$ telles que $\phi_d = v_e|_{\Omega_d}$, alors la suite de champs (v^k) , première composante de (U^k) , définie par l'algorithme itératif (4.10) converge fortement vers ϕ_d sur Ω_d et faiblement vers v_e sur Ω .

La démonstration de ce théorème est fortement inspirée de la démonstration présentée dans [65]. Elle s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 3.

La suite (U^k) formée des éléments optimaux vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|U^{n+1} - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 + \sum_{k=0}^n \|U^{k+1} - U^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|v^{k+1} - \phi_d\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 = \|U^0 - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 \quad (4.12)$$

où $U_e = (v_e, u_e, u'_e)$ est la solution du problème et $\phi_d = v_e|_{\Omega_d}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|U^{k+1} - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 &= \langle U^{k+1} - U^k + U^k - U_e, U^{k+1} - U^k + U^k - U_e \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} \\ &= \|U^{k+1} - U^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 + \|U^k - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 \\ &\quad + 2 \langle U^{k+1} - U^k, U^k - U_e \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \langle U^{k+1} - U^k, U^k - U_e \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} &= \langle U^{k+1} - U^k, U^k - U^{k+1} + U^{k+1} - U_e \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} \\ &= -\|U^{k+1} - U^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 + \langle U^{k+1} - U^k, U^{k+1} - U_e \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} \end{aligned}$$

D'où

$$\|U^{k+1} - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 = \|U^k - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 - \|U^{k+1} - U^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 + 2 \langle U^{k+1} - U^k, U^{k+1} - U_e \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} \quad (4.13)$$

Écrivons la caractérisation (4.11) de l'élément optimal de l'itération $(k+1)$ en utilisant la fonction test $W = U^{k+1} - U_e$, cette fonction appartient bien entendu à $\mathbf{H}(\Gamma)$:

$$\left\langle v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d, v^{k+1}|_{\Omega_d} - v_e|_{\Omega_d} \right\rangle_{\mathbf{H}(\Omega_d)} + c \langle U^{k+1} - U^k, U^{k+1} - U_e \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} = 0$$

or $\phi_d = v_e|_{\Omega_d}$ donc

$$\begin{aligned} \langle U^{k+1} - U^k, U^k - U_e \rangle_{\mathbf{H}(\Gamma)} &= -\frac{1}{c} \langle v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d, v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d \rangle_{\mathbf{H}(\Omega_d)} \\ &= -\frac{1}{c} \left\| v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d \right\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 \end{aligned}$$

En reportant dans (4.13), on obtient

$$\|U^{k+1} - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 = \|U^k - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 - \|U^{k+1} - U^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 - \frac{2}{c} \left\| v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d \right\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2$$

ou encore

$$\|U^{k+1} - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 + \|U^{k+1} - U^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 + \frac{2}{c} \left\| v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d \right\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 = \|U^k - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 \quad (4.14)$$

valable pour tout $k \geq 0$ et en sommant membre à membre les relations (4.14) établies pour $0 \leq k \leq n$, on obtient

$$\|U^{n+1} - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 + \sum_{k=0}^n \|U^{k+1} - U^k\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \left\| v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d \right\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2 = \|U^0 - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2$$

□

Démonstration du Théorème 4.

1) Convergence forte de $(v^k|_{\Omega_d})$ vers ϕ_d sur Ω_d

De la relation (4.12), on tire que la série

$$\sum_{k=0}^n \left\| v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d \right\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2$$

est bornée. Son terme général $\left\| v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d \right\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)}^2$ tend donc vers zéro lorsque k tend vers l'infini, on en déduit donc que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| v^{k+1}|_{\Omega_d} - \phi_d \right\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)} = 0$$

donc $(v^k|_{\Omega_d})$ tend vers ϕ_d sur Ω_d .

2) Existence d'une sous-suite (v^s) de (v^k) qui converge faiblement vers v_e sur Ω

De (4.12), on déduit que la suite $\|U^k - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2$ est bornée. Par ailleurs

$$\|U^k - U_e\|_{\mathbf{H}(\Gamma)}^2 = \|v^k - v_e\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|u^k - u_e\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|u'^k - u'_e\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2$$

donc la suite $\|v^k - v_e\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2$ est une suite bornée de $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

L'espace $\mathbf{H}^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On peut donc extraire de (v^k) une sous-suite (v^s) qui converge faiblement dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. On notera v_L la limite de cette sous-suite. L'objectif est de montrer que $v_L = v_e$ sur Ω .

D'après le point 1), on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| v^k \Big|_{\Omega_d} - \phi_d \right\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)} = 0$$

donc par conséquent

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\| v^s \Big|_{\Omega_d} - \phi_d \right\|_{\mathbf{H}(\Omega_d)} = 0$$

et

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v^s \Big|_{\Omega_d} = \phi_d \text{ sur } \Omega_d.$$

Or $\lim_{s \rightarrow \infty} v^s = v_L$ sur Ω et par unicité de la limite sur Ω_d , on en déduit que

$$v_L \Big|_{\Omega_d} = \phi_d \text{ sur } \Omega_d$$

et par unicité de la solution que

$$v_L = v_e \text{ sur } \Omega.$$

En conclusion, il existe donc une sous-suite (v^s) de (v^k) qui converge vers v_e sur Ω .

3) Convergence faible de toute la suite (v^k) vers v_e sur Ω

En procédant par contradiction, on suppose qu'il existe alors $w \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall V \in \mathbb{N}, \exists n = n(N) > N$ tel que $|\langle v^n - v_e, w \rangle_{H^1(\Omega)}| \geq \varepsilon$.

Il existe donc une sous-suite (v^p) telle que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \langle v^p - v_e, w \rangle_{H^1(\Omega)} \right| \geq \varepsilon. \quad (4.15)$$

(v^p) est une suite bornée puisqu'elle est extraite de la suite bornée (v^k) . On peut donc extraire de (v^p) une sous suite (v^q) qui converge faiblement sur Ω . Grâce aux arguments déjà utilisés au point 2), on montre que nécessairement la limite de cette sous-suite est v_e , contredisant ainsi (4.15).

En conclusion des points 2) et 3), on en déduit que la suite (v^k) converge faiblement vers v_e sur Ω . \square

4.3 Formulations discrètes de l'algorithme itératif

Afin de trouver l'élément optimal U^{k+1} caractérisé par (4.10), il est nécessaire de discrétiser l'espace des solutions $\mathbf{H}(\Gamma)$. Dans cette partie nous présentons la mise en œuvre numérique de l'algorithme basé sur la méthode de régularisation évanescence avec deux méthodes numériques différentes : la méthode des solutions fondamentales et la méthode des éléments finis. Nous nous limitons ici, pour des raisons de simplicité, à la présentation des discrétisations dans le cadre de problèmes elliptiques bidimensionnels à un degré de liberté.

4.3.1 Discrétisation par la méthode des solutions fondamentales

La méthode des solutions fondamentales (MFS) est une méthode sans maillage utilisée pour approcher numériquement les solutions des équations aux dérivées partielles linéaires. Elle est applicable à tout opérateur pour lequel une solution fondamentale est connue explicitement. Nous présentons comment l'utilisation des solutions fondamentales permet d'obtenir une approximation de l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$, la mise en œuvre numérique d'une itération de l'algorithme et le critère d'arrêt ainsi que les normes d'erreurs considérées.

4.3.1.1 Approximation de l'espace des solutions $\mathbf{H}(\Gamma)$

L'idée principale de la MFS consiste à écrire l'approximation du champ solution $u \in \Omega$ sous la forme d'une combinaison linéaire des solutions fondamentales de l'opérateur L (4.1) avec N sources $\underline{y}^j \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, $j = \overline{1, N}$:

$$u(\underline{x}) \approx u^N(\underline{a}, \underline{Y}; \underline{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}^j), \quad \underline{x} \in \overline{\Omega}, \quad (4.16)$$

où $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$ décrit les coordonnées d'un point du domaine, $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ représente les coordonnées d'un point source impérativement situé à l'extérieur du domaine, \underline{Y} est le vecteur de taille $2N$ contenant les coordonnées des points sources \underline{y}^j , $j = \overline{1, N}$, \mathcal{F} est la solution fondamentale de l'opérateur L considéré et le vecteur $\underline{a} = (a_1, \dots, a_N)$ représente les constantes à déterminer.

De la même manière, l'approximation de la dérivée normale u' sur le bord Γ s'écrit :

$$u'(\underline{x}) \approx u'^N(\underline{a}, \underline{Y}, \underline{n}; \underline{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{G}(\underline{x}, \underline{y}^j; \underline{n}), \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad (4.17)$$

avec $\mathcal{G}(\underline{x}, \underline{y}; \underline{n}) = \nabla_{\underline{x}} \mathcal{F}(\underline{x}, \underline{y}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$ et $\underline{n}(\underline{x})$ la normale unitaire extérieure à un point $\underline{x} \in \Gamma$.

Les approximations (4.16) et (4.17) peuvent également être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} u(\underline{x}) &\approx \underline{A}^T(\underline{x})\underline{a}, & \underline{x} \in \overline{\Omega}, \\ u'(\underline{x}) &\approx \underline{B}^T(\underline{x})\underline{a}, & \underline{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

où $A(\underline{x})$ et $B(\underline{x})$ sont des vecteurs (ou des matrices) contenant les solutions fondamentales et leurs dérivées normales associées, respectivement.

4.3.1.2 Description de l'algorithme itératif

À chaque étape $k \geq 0$ de l'algorithme de régularisation évanescence (4.10), le champ ϕ_d mesuré sur Ω_d (4.2a) est recalculé. La solution u est recherchée sur le reste du domaine $\Omega \setminus \Omega_d$, ainsi que la dérivée normale u' sur la frontière Γ et en particulier sur la partie inaccessible Γ_i du bord. Pour écrire l'approximation de ces quantités, nous considérons M points de collocation de coordonnées $\underline{x}^i = (x_1, x_2)$, $i = \overline{1, M}$: M_Ω points à l'intérieur du domaine et M_Γ points sur le bord et parmi ces points, nous notons M_{Ω_d} points appartenant à Ω_d et M_{Γ_d} points localisés sur la partie Γ_d du bord.

On introduit $\underline{U} = (U_1, \dots, U_{M_\Omega}, U_{M_\Omega+1}, \dots, U_{M_\Omega+M_\Gamma})$ le vecteur contenant les valeurs de la fonction aux $M = M_\Omega + M_\Gamma$ points de collocation et $\underline{U}' = (U'_1, \dots, U'_{M_\Gamma})$ le vecteur contenant les valeurs de la dérivée normale aux M_Γ points de collocation. De la même manière, les données de champ discrètes aux M_{Ω_d} points de collocation sont notées $\underline{U}^d = (U_1^d, \dots, U_{M_{\Omega_d}}^d)$ et $\underline{U}'^d = (U_1'^d, \dots, U_{M_{\Gamma_d}}'^d)$ représente les conditions aux limites (en terme de dérivée normale) discrètes aux M_{Γ_d} points de collocation.

En supposant l'initialisation $(U_i^0, U_i'^0) = (0, 0)$, pour éviter d'avoir une composante parasite (Théorème 2 du paragraphe 1.5.3), l'algorithme itératif de régularisation évanescence (4.10) revient à minimiser une suite de problèmes d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\underline{a}} J_c^{k+1}(\underline{U}, \underline{U}') \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{U}, \underline{U}') = \sum_{i=1}^{M_{\Omega_d}} (U_i - U_i^d)^2 + c \sum_{i=1}^{M_\Omega} (U_i - U_i^k)^2 \\ \quad + c \sum_{i=M_\Omega+1}^M (U_i - U_i^k)^2 + c \sum_{i=1}^{M_\Gamma} (U'_i - U_i'^k)^2 \\ \text{et } U_i = \sum_{j=1}^N A_j^T(\underline{x}^i) a_j, \\ \quad U'_i = \sum_{j=1}^N B_j^T(\underline{x}^i) a_j, \\ \text{sous les contraintes égalités } (U'_i - U_i'^d) = 0 \quad \forall i = \overline{1, M_{\Gamma_d}}. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Note : Pour les mêmes raisons que celles énoncées au paragraphe 2.3.1.2, les différentes normes sont remplacées par des normes L^2 .

L'algorithme itératif (4.10) est alors réduit à une suite de problèmes d'optimisation linéaire par rapport aux N constantes inconnues introduites par la discrétisation

MFS $\underline{a} = (a_1, \dots, a_N)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\underline{a}} J_c^{k+1}(\underline{a}) \\ \text{avec } J_c^{k+1}(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{M_{\Omega_d}} \left[\sum_{j=1}^N (A_j^T(\underline{x}^i) a_j - U_i^d)^2 \right] + c \sum_{i=1}^{M_{\Omega}} \left[\sum_{j=1}^N (A_j^T(\underline{x}^i) a_j - U_i^k)^2 \right] \\ \quad + c \sum_{i=M_{\Omega}+1}^M \left[\sum_{j=1}^N (A_j^T(\underline{x}^i) a_j - U_i^k)^2 \right] + c \sum_{i=1}^{M_{\Gamma}} \left[\sum_{j=1}^N (B_j^T(\underline{x}^i) a_j - U_i'^k)^2 \right] \\ \text{sous les contraintes égalités } \left[\sum_{j=1}^N (B_j^T(\underline{x}^i) a_j - U_i'^d) \right] = 0 \quad \forall i = \overline{1, M_{\Gamma_d}}. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Remarquons que U_i^k et $U_i'^k$ s'écrivent également :

$$U_i^k = \sum_{j=1}^N A_j^T(\underline{x}^i) a_j^k,$$

$$U_i'^k = \sum_{j=1}^N B_j^T(\underline{x}^i) a_j^k$$

avec a_j^k la $j^{\text{ème}}$ constante MFS déterminée à l'itération k .

Par conséquent, minimiser la fonctionnelle J_c^{k+1} , intervenant à la $(k+1)^{\text{ème}}$ itération, par rapport à \underline{a} revient à résoudre le système linéaire :

$$\left[\begin{array}{cc} \underline{K}^d + c \underline{K} & \underline{E}_{U'}^T \\ \underline{E}_{U'} & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{a}^{k+1} \\ \underline{\lambda}^{k+1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{M}_U^T \underline{U}^d + c \underline{K} \underline{a}^k \\ \underline{U}'^d \end{array} \right\} \quad (4.20)$$

avec :

$$(\underline{M}_U^T \underline{U}^d)_j = \sum_{i=1}^{M_{\Omega_d}} A_j^T(\underline{x}^i) U_i^d,$$

$$K_{lm}^d = \sum_{i=1}^{M_{\Omega_d}} A_l^T(\underline{x}^i) A_m^T(\underline{x}^i),$$

$$K_{lm} = \sum_{i=1}^{M_{\Omega}} A_l^T(\underline{x}^i) A_m^T(\underline{x}^i) + \sum_{i=M_{\Omega}+1}^M A_l^T(\underline{x}^i) A_m^T(\underline{x}^i) + \sum_{i=1}^{M_{\Gamma}} B_l^T(\underline{x}^i) B_m^T(\underline{x}^i),$$

$$(E_{U'})_{lm} = \delta_{lm} B_m^T(\underline{x}^i), \text{ où } \delta_{lm} \text{ désigne le symbole de Kronecker.}$$

$\underline{\lambda}^{k+1}$ est le vecteur composé des M_{Γ_d} multiplicateurs de Lagrange introduits pour gérer les contraintes égalités lors de la résolution du problème d'optimisation.

Remarque : Le système linéaire est composé de la même matrice à chaque itération.

4.3.1.3 Critère d'arrêt et normes d'erreurs

Dans le but d'évaluer la précision de l'algorithme proposé et la convergence du processus itératif, nous introduisons les quantités de contrôle suivantes :

- Le terme de relaxation de la fonctionnelle (4.10) :

$$J_{\Omega_d}(\underline{U}, \underline{U}') = \sum_{i=1}^{M_{\Omega_d}} (U_i - U_i^d)^2 \quad (4.21)$$

- Le terme de régularisation de la fonctionnelle (4.10) :

$$J_{reg.}^{k+1}(\underline{U}, \underline{U}') = c \sum_{i=1}^{M_{\Omega}} (U_i - U_i^k)^2 + c \sum_{i=M_{\Omega_d}+1}^M (U_i - U_i^k)^2 + c \sum_{i=1}^{M_{\Gamma}} (U'_i - U_i^k)^2 \quad (4.22)$$

- La valeur de la fonctionnelle (4.10) pour l'élément optimal $(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1})$:

$$J^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) = J_{\Omega_d}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) + J_{reg.}^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) \quad (4.23)$$

On peut établir qu'au cours du processus itératif les termes (4.21), (4.22) et (4.23) vérifient les trois propriétés suivantes :

- (a) $J_{\Omega_d}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1})$ diminue de manière monotone :

$$J_{\Omega_d}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) \leq J_{\Omega_d}(\underline{U}^k, \underline{U}'^k), \forall k \geq 0. \quad (4.24)$$

- (b) $J_{reg.}^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1})$ diminue de manière monotone si $c > 0$:

$$J_{reg.}^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) \leq J_{reg.}^k(\underline{U}^k, \underline{U}'^k), \forall k \geq 0. \quad (4.25)$$

- (c) La suite caractérisée par les valeurs de la fonctionnelle J^{k+1} pour chaque élément optimal $(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1})$ diminue également de manière monotone si $c > 0$:

$$J^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) \leq J^k(\underline{U}^k, \underline{U}'^k), \forall k \geq 0. \quad (4.26)$$

Nous définissons un critère d'arrêt basé sur la violation de la propriété (4.25) : Le processus itératif s'arrête à l'itération $k = k_{opt}$ pour laquelle le terme de régularisation $J_{reg.}^k$ augmente, c'est à dire $J_{reg.}^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) > J_{reg.}^k(\underline{U}^k, \underline{U}'^k)$. Ce critère d'arrêt ne nécessite pas de connaissances a priori sur la qualité des données puisqu'il compare deux éléments optimaux successifs et ne fait pas intervenir les données.

Nous définissons également trois normes d'erreurs pour évaluer la qualité de la solution :

- L'erreur L^2 relative commise pour \underline{U} dans Ω :

$$u_{erreur}^{\Omega} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M_{\Omega}} (U_i - U_i^{an})^2}{\sum_{i=1}^{M_{\Omega}} (U_i^{an})^2}}; \quad (4.27)$$

— L'erreur L^2 relative commise pour \underline{U} sur le bord Γ :

$$u_{erreur}^{\Gamma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=M_{\Omega}+1}^M (U_i - U_i^{an})^2}{\sum_{i=M_{\Omega}+1}^M (U_i^{an})^2}}; \quad (4.28)$$

— L'erreur L^2 relative commise pour \underline{U}' sur Γ :

$$u'_{erreur} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M_{\Gamma}} (U'_i - U_i'^{an})^2}{\sum_{i=1}^{M_{\Gamma}} (U_i'^{an})^2}}. \quad (4.29)$$

où $\underline{U}^{an} = (U_1^{an}, \dots, U_{M_{\Omega}}^{an}, U_{M_{\Omega}+1}^{an}, \dots, U_M^{an})$ et $\underline{U}'^{an} = (U_1'^{an}, \dots, U_{M_{\Gamma}}'^{an})$ représentent les vecteurs contenant les valeurs discrètes des solutions analytiques, u^{an} et de leurs dérivées normales, aux points de collocation correspondants, respectivement.

4.3.2 Discrétisation en utilisant la méthode des éléments finis

4.3.2.1 Approximation de l'espace des solutions $H(\Gamma)$

Le domaine Ω est approximé en utilisant P éléments quadrangulaires à n_l nœuds et la frontière Γ est discrétisée par les N' segments à n_g nœuds correspondants. La discrétisation comporte N nœuds au total.

Soit $V^h(\Omega)$, le sous-espace vectoriel de dimension N engendré par les fonctions définies par morceaux correspondantes à ce maillage. Les traces des fonctions appartenant à $V^h(\Omega)$ engendrent l'espace $V^h(\Gamma)$. Il est constitué des fonctions définies par morceaux sur la frontière Γ . De la même manière, on définit $W^h(\Gamma)$ l'espace d'interpolation des dérivées normales, également constitué de fonctions définies par morceaux sur la frontière Γ .

Nous définissons \underline{U} le vecteur à N ($2N$ dans le cas de l'élasticité linéaire bidimensionnelle) composantes constitué des valeurs du champ $u^h \in V^h(\Omega)$ aux nœuds du domaine et \underline{U}' le vecteur à N' composantes constitué des valeurs de la dérivée normale $u'^h \in W^h(\Gamma)$ ($2N'$ pour le vecteur contraintes en élasticité linéaire) sur chaque élément (de type segment) définissant la frontière.

La discrétisation conduit à la définition de l'espace $H_{NN'}(\Omega)$ caractérisant de manière faible et discrète les solutions de l'équation (4.1) :

$$H_{NN'}(\Omega) = \left\{ \underline{V} = (\underline{U}, \underline{U}') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \quad / \quad K\underline{U} + B\underline{U}' = 0 \right\}$$

où K est la matrice de rigidité et $B\underline{U}' = -\underline{F}$ est le vecteur des forces nodales sur le bord. Les matrices K et B dépendent uniquement de la géométrie du domaine et des éléments finis choisis.

4.3.2.2 Description de l'algorithme itératif

À chaque étape $k \geq 0$ de l'algorithme de régularisation évanescence (4.10), la norme représentant la distance entre le champ mesuré ϕ^d et l'élément optimal est exprimée aux m points de mesure. Le champ $\phi_d \in \Omega_d$ (4.2a) est mesuré aux m points de coordonnées (x_i, y_i) , $i = \overline{1, m}$ et chaque point de mesure appartient à un des D éléments qui discrétisent Ω_d . Les points de mesure ne correspondant pas aux nœuds du maillage, il est nécessaire d'exprimer u^h , la valeur discrète du champ, aux points de mesure.

La valeur discrète u^h du champ exprimée au point de mesure (x_i, y_i) s'écrit à partir des composantes de \underline{U} :

$$u^h(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^{n_l} \Phi_j(x_i, y_i) U_j$$

avec U_j la valeur de u^h au nœud j et Φ_j les fonctions d'interpolation (propres au type d'élément fini de référence choisi) qui forment une base de $V^h(\Omega)$.

La valeur discrète $u'^h \in W^h(\Gamma)$ de la dérivée normale est définie sur un segment de la frontière Γ par :

$$u'^h = \sum_{j=1}^{n_g} \Phi'_j U'_j$$

avec U'_j la valeur de u'^h au nœud j et Φ'_j les fonctions d'interpolation qui forment une base de $W^h(\Gamma)$.

Ceci permet d'écrire une approximation du premier terme de la fonctionnelle (4.10) :

$$J_{\Omega_d}(\underline{U}, \underline{U}') = \sum_{l=1}^D \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^{n_l} \Phi_j(x_i, y_i) U_j - \phi_d(x_i, y_i) \right]^2$$

D'une manière similaire, en supposant l'initialisation $(U_j^0, U_j'^0) = (0, 0)$ on obtient l'approximation du second terme :

$$\begin{aligned} J_{reg.}(\underline{U}, \underline{U}') = & c \sum_{l=1}^P \left[\sum_{j=1}^{n_l} \Phi_j U_j - \sum_{j=1}^{n_l} \Phi_j U_j^k \right]^2 + c \sum_{l=1}^{N'} \left[\sum_{j=1}^{n_g} \Phi'_j U_j - \sum_{j=1}^{n_g} \Phi'_j U_j^k \right]^2 \\ & + c \sum_{l=1}^{N'} \left[\sum_{j=1}^{n_g} \Phi'_j U'_j - \sum_{j=1}^{n_g} \Phi'_j U_j'^k \right]^2 \end{aligned}$$

En utilisant la discrétisation de l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$ par éléments finis, le problème d'optimisation (4.10) peut alors se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}), \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \text{ tel que :} \\ J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) \leq J_c^{k+1}(\underline{V}, \underline{V}'), \quad \forall (\underline{V}, \underline{V}') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \\ \text{sous les contraintes égalités : } K\underline{U} + B\underline{U}' = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

En introduisant λ^{k+1} le vecteur composé des N multiplicateurs de Lagrange introduits pour prendre en compte les N contraintes égalités, la caractérisation de l'élément optimal $(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1})$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'}$ s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}, \lambda^{k+1}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} \times \mathbb{R}^N \text{ tel que :} \\ \nabla J_c^{k+1}(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) + \lambda^{k+1} \nabla H(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) = 0 \\ H(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) = K\underline{U}^{k+1} + B\underline{U}'^{k+1} = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

La résolution de (4.31) revient à résoudre un système linéaire de $(2N + N')$ équations pour les $(2N + N')$ inconnues $(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}, \lambda^{k+1})$ de la forme :

$$\begin{bmatrix} \underline{L}^d + c\underline{M} & 0 & K^T \\ 0 & c\underline{L} & B^T \\ K & B & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U}^{k+1} \\ \underline{U}'^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{S}^d + c\underline{M}\underline{U}^k \\ c\underline{L}\underline{U}^k \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{L}^d &= \sum_{l=1}^D \sum_{i=1}^m \underline{\Phi}(x_i, y_i) \underline{\Phi}^T(x_i, y_i), \\ \underline{M} &= \sum_{l=1}^P \underline{\Phi}(r, s) \underline{\Phi}^T(r, s), \\ \underline{S}^d &= \sum_{l=1}^D \sum_{i=1}^m \underline{\Phi}(x_i, y_i) \phi_d(x_i, y_i), \\ \underline{L} &= \sum_{l=1}^{N'} \underline{\Phi}'(r, s) \underline{\Phi}'^T(r, s), \end{aligned}$$

où $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Phi}'$ sont les vecteurs constitués des composantes des fonctions d'interpolation Φ_j et Φ'_j , respectivement. On rappelle que les composantes de $\underline{\Phi}(x_i, y_i)$ sont exprimées aux points de mesure de coordonnées (x_i, y_i) et les composantes de $\underline{\Phi}(r, s)$ et $\underline{\Phi}'(r, s)$ sont exprimées aux points de Gauss, de coordonnées (r, s) , associés aux éléments.

Remarque : Les conditions aux limites (4.2b), étant considérées comme fiables sur Γ_d , ne sont pas recalculées. Le calcul du vecteur \underline{U}'^{k+1} est alors restreint aux valeurs sur les éléments qui décrivent Γ_i .

4.4 Validation de la méthode sur un exemple numérique

Nous considérons un exemple simple rencontré en mécanique élastique linéaire et isotrope. Il s'agit d'une situation qui correspond à un essai de compression non confinée (voir Figure 4.2) pour laquelle une solution analytique pour le champ de déplacements $\underline{u}^{an} = (u_1^{an}, u_2^{an})$ est disponible :

$$\begin{aligned} u_1^{an}(x_1, x_2) &= \frac{\nu\sigma_0}{E}(x_1 - 0.5), & (x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \\ u_2^{an}(x_1, x_2) &= -\frac{\sigma_0}{E}(x_2 - 1), & (x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \end{aligned} \quad (4.33)$$

dans le domaine $\overline{\Omega} = \{\underline{x} = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ and } 0 \leq x_2 \leq 2\}$ avec $E = 1 \text{ N.m}^{-2}$, $\nu = 0.2$, et $\sigma_0 = 0.1 \text{ N.m}^{-2}$.

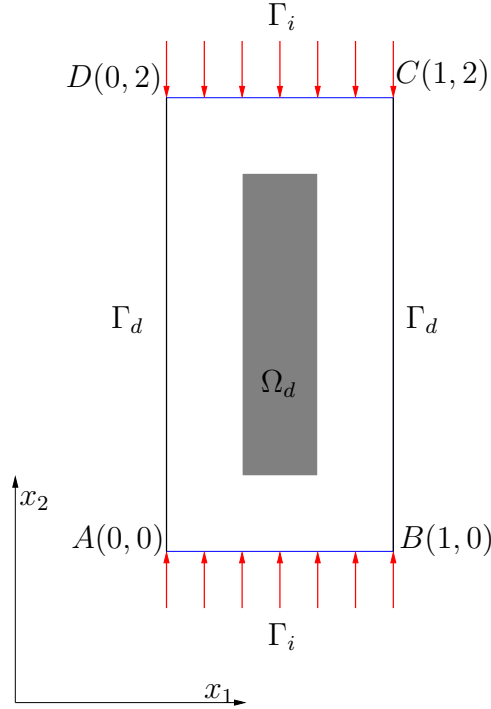


Figure 4.2 – Domaine.

Le champ de déplacements $\underline{u} = \underline{u}^d$ est accessible sur le sous-domaine $\Omega_d \subset \Omega$ modélisé par une grille de données paramétrée par le coefficient ζ tel que $|\Omega_d| = \zeta|\Omega|$. Dans la suite, on considérera, lorsque ce n'est pas spécifié, $\zeta = \frac{1}{4}$, c'est à dire que les données du champ de déplacements ne sont accessibles que sur une zone centrale Ω_d , quatre fois plus petite que le domaine Ω . Γ décrit la frontière du domaine telle que $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ avec $\Gamma_d = \{\underline{x} \in \Gamma \mid x_1 = 0 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 2\} \cup \{\underline{x} \in \Gamma \mid x_1 = 1 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 2\}$ et $\Gamma_i = \{\underline{x} \in \Gamma \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } x_2 = 0\} \cup \{\underline{x} \in \Gamma \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } x_2 = 2\}$. La partie Γ_d de la frontière est un bord libre et cette unique information sur les conditions aux limites est imposée sous la forme de contraintes égalités. Aucune information n'est accessible sur la partie Γ_i de la frontière.

Nous présentons des résultats obtenus en utilisant la méthode des solutions fondamentales ou la méthode des éléments finis pour caractériser l'espace des solutions de l'équation de Lamé (2.32).

4.4.1 Simulations numériques avec la méthode des solutions fondamentales

Les résultats présentés sont obtenus en utilisant le critère d'arrêt introduit au paragraphe 4.3.1.3. En accord avec les notations introduites au paragraphe 4.3.1.2, le domaine Ω est discrétisé par $M_\Omega = 30 \times 60$ points et la frontière Γ est discrétisée par $M_\Gamma = 300$ points. On considère $N = 90$ sources sur le cercle $\tilde{\Gamma}$ de rayon $d = 10$, tel que $\tilde{\Gamma} = \left\{ \underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 = d^2 \right\}$.

L'évolution des quantités de contrôle J_{Ω_d} , $J_{reg.}^k$ et J^k en fonction du nombre d'itérations k pour des données non bruitées et pour un coefficient de régularisation c fixé à 10^{-1} est représentée sur la Figure 4.3.

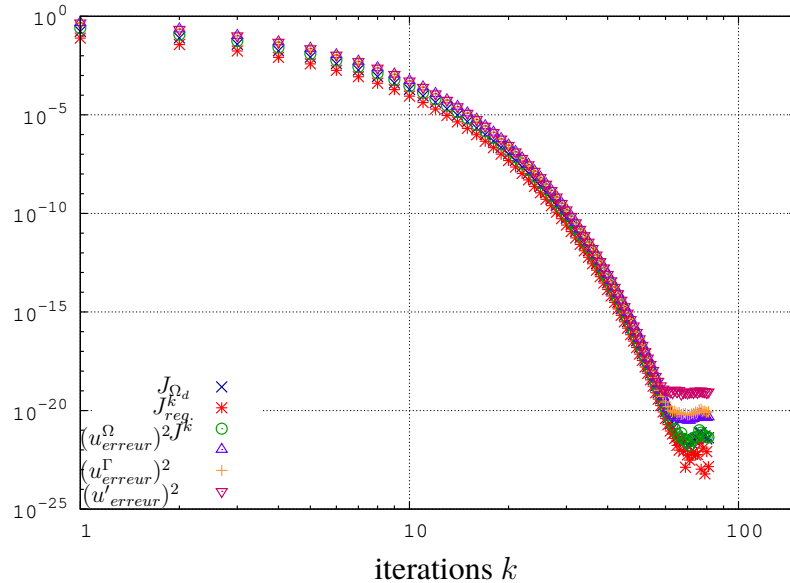


Figure 4.3 – Évolution des quantités de contrôle en fonction du nombre d'itérations k pour $c = 10^{-1}$.

Les termes J_{Ω_d} , $J_{reg.}^k$ et J^k et les normes d'erreurs u_{erreur}^Ω , u_{erreur}^Γ et u'_{erreur} deviennent constants à partir de la 67^{ème} itération. Le processus itératif est alors arrêté à l'itération optimale $k_{opt} = 67$. Il ne subsiste que quelques petites oscillations dues à l'approximation numérique. Le terme de régularisation $J_{reg.}^k$ devient négligeable comparé au terme de relaxation J_{Ω_d} et tend vers zéro, ce qui prouve que l'algorithme converge. Après convergence, le terme de relaxation J_{Ω_d} devient constant et correspond à la différence sur Ω_d entre la solution optimale et les données. Dans le cas de données non bruitées, il s'agit d'une erreur d'approximation numérique. Les normes d'erreurs deviennent également des quantités négligeables à partir de l'itération $k = k_{opt}$.

4.4.1.1 Influence du coefficient de régularisation c

Dans le cas de données non bruitées, l'algorithme proposé nous permet de reconstruire parfaitement les conditions aux limites en termes de déplacements et de vecteurs contraintes sur le bord Γ . Pour représenter les conditions aux limites le long de la frontière, nous définissons une abscisse curviligne s , qui croît respectivement, de 0 à 1 quand M décrit le segment $[AB]$, de 1 à 3 quand M décrit $[BC]$, de 3 à 4 quand M décrit $[CD]$ et de 4 à 6 quand M décrit $[DA]$ (voir Figure 4.2).

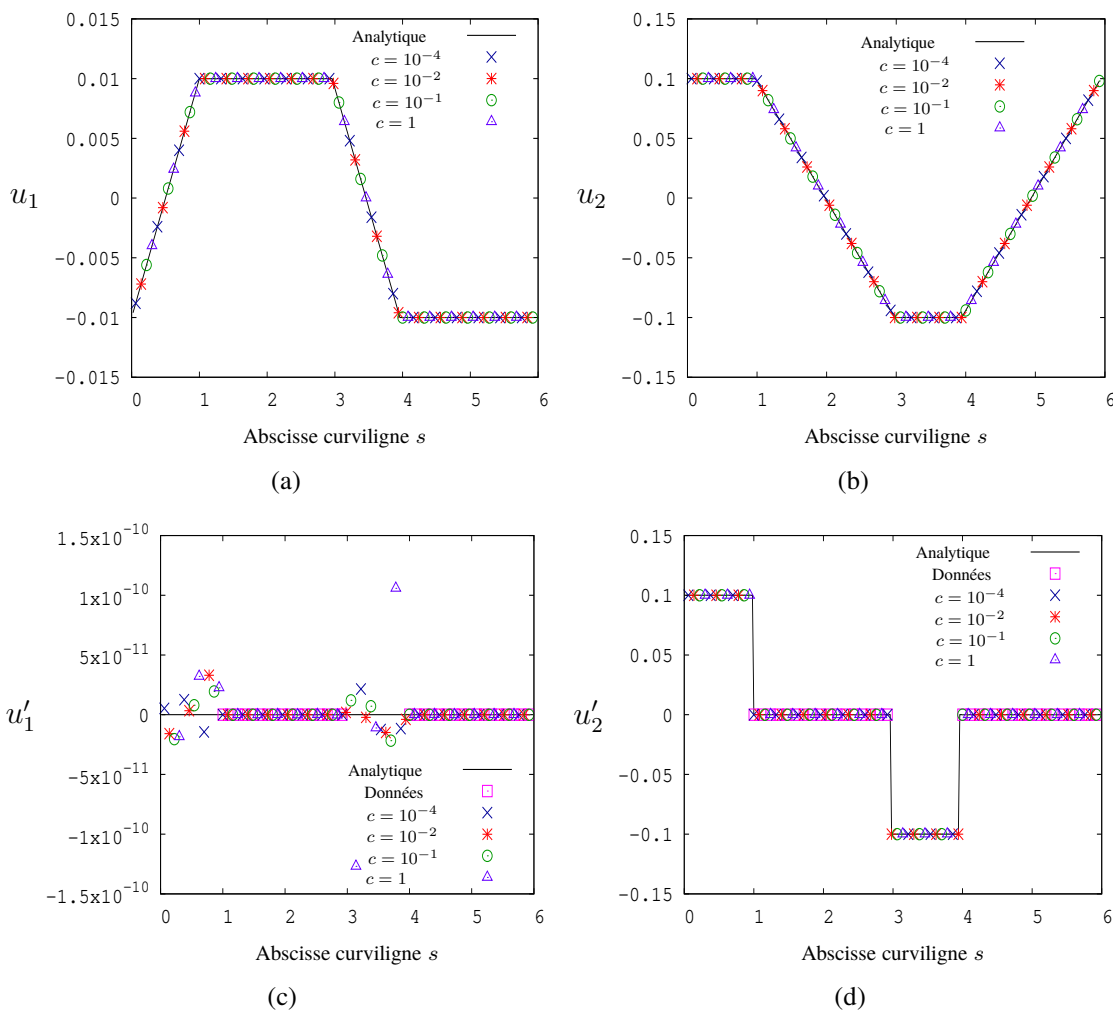


Figure 4.4 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u'_1 et (d) verticale, u'_2 , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour différentes valeurs de c .

On observe sur la Figure 4.4 que les composantes horizontale, u_1 (a) et verticale, u_2 (b), du champ de déplacements et les composantes horizontale, u'_1 (c) et verticale, u'_2 (d), du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ , ne dépendent pas de la valeur du

coefficient de régularisation c . Nous retrouvons les composantes u'_1 et u'_2 du vecteur contraintes, nulles sur la partie Γ_d du bord, ce qui traduit la condition de bord libre.

En effet, les erreurs commises pour u sur Ω et sur Γ et pour u' sur Γ sont identiques et très faibles pour toutes les valeurs de c listées dans le Tableau 4.1. En complément, les Figures 4.5 (a) et (b) représentent l'évolution des normes d'erreurs u_{erreur}^Ω et u'_{erreur} , respectivement pour trois valeurs de c . Chaque quantité tend vers la même valeur dès lors que le nombre d'itérations requis pour converger est atteint, ce qui confirme que l'algorithme converge vers la même solution quelle que soit la valeur du coefficient de régularisation c , qui n'influence que la vitesse de convergence.

c	k	u_{erreur}^Ω (en %)	u_{erreur}^Γ (en %)	u'_{erreur} (en %)
10^{-10}	2	4.55×10^{-9}	6.07×10^{-9}	1.84×10^{-8}
10^{-8}	4	9.96×10^{-9}	1.30×10^{-8}	2.06×10^{-8}
10^{-6}	6	4.82×10^{-9}	6.34×10^{-9}	9.61×10^{-9}
10^{-4}	7	5.33×10^{-9}	8.69×10^{-9}	1.55×10^{-8}
10^{-3}	11	2.30×10^{-8}	2.98×10^{-8}	3.91×10^{-8}
10^{-2}	18	1.63×10^{-8}	2.16×10^{-8}	3.49×10^{-8}
10^{-1}	67	5.84×10^{-9}	7.96×10^{-9}	2.62×10^{-8}

Tableau 4.1 – Influence du coefficient de régularisation c sur le nombre d'itérations k , requis pour converger et les erreurs u_{erreur}^Ω , u_{erreur}^Γ et u'_{erreur} .

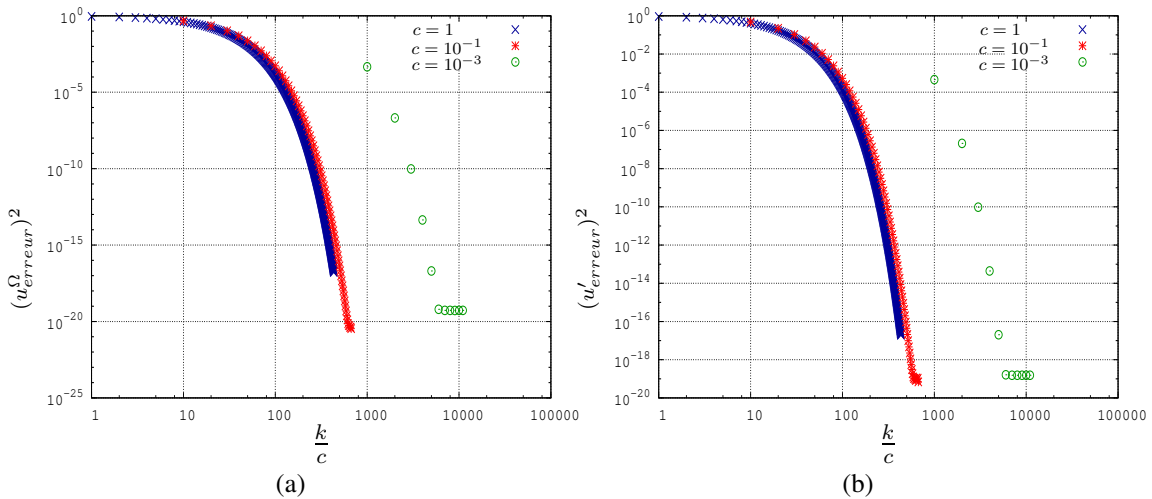


Figure 4.5 – Évolution des erreurs (a) $(u_{\text{erreur}}^\Omega)^2$ et (b) $(u'_{\text{erreur}})^2$, en fonction de $\frac{k}{c}$, pour différentes valeurs de c .

La Figure 4.6 montre l'évolution des termes J_{Ω_d} et J_{reg}^k , qui interviennent dans la fonctionnelle, en fonction du rapport $\frac{k}{c}$ pour trois valeurs de c . On note que, pour

chaque valeur de c , ces quantités deviennent négligeables lorsque l'itération k_{opt} est atteinte.

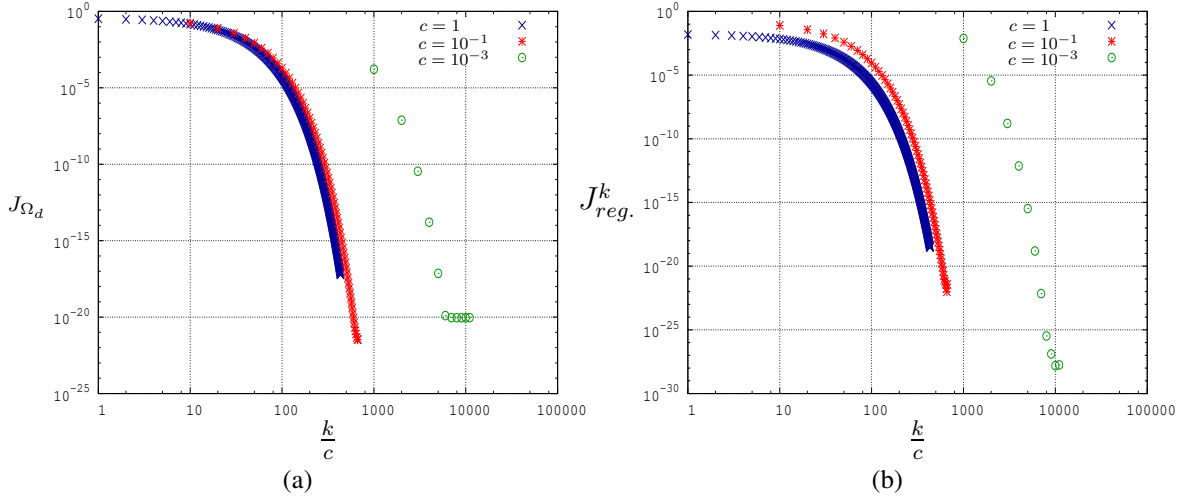


Figure 4.6 – Évolution des termes (a) J_{Ω_d} et (b) J_{reg}^k , en fonction de $\frac{k}{c}$ pour différentes valeurs de c .

4.4.1.2 Reconstructions à partir de données bruitées

Nous étudions la qualité des reconstructions lorsque les données $\underline{u}^d = (u_1^d, u_2^d)$ sont perturbées et définies par :

$$\begin{cases} u_1^d(x_1, x_2) = u_1^{an}(x_1, x_2) + \nu \times \delta \max(\underline{u}^{an}(x_1, x_2)) \rho, & \forall (x_1, x_2) \in \Omega_d, \\ u_2^d(x_1, x_2) = u_2^{an}(x_1, x_2) + \delta \max(\underline{u}^{an}(x_1, x_2)) \rho, & \forall (x_1, x_2) \in \Omega_d \end{cases} \quad (4.34)$$

avec δ le niveau de bruit et $-1 \leq \rho \leq 1$ une variable aléatoire.

Les Figures 4.7(a), (b) et (c) représentent, respectivement, les composantes verticales du champ de déplacements donné sur Ω_d (u_2^d), du champ de déplacements calculé sur Ω_d (u_2^d) et du résidu calculé sur Ω_d ($|u_2^d - u_2|$), pour $c = 10^{-1}$ et $\delta = 10\%$. La Figure 4.7(d) représente la composante verticale, u_2^Ω , du champ de déplacement calculé sur tout le domaine Ω . Le terme résiduel $|u_2^d - u_2|$ correspond aux 10% de bruit ajoutés aux données. Ce résultat montre que l'algorithme (4.19) proposé permet de débruiter les données. Nous retrouvons une solution qui est proche des données mais qui n'y correspond pas exactement. La solution est calculée sur tout le domaine Ω (Figure 4.7(d)). La Figure 4.8 montre les mêmes quantités pour la composante horizontale, u_1 , du champ de déplacements.

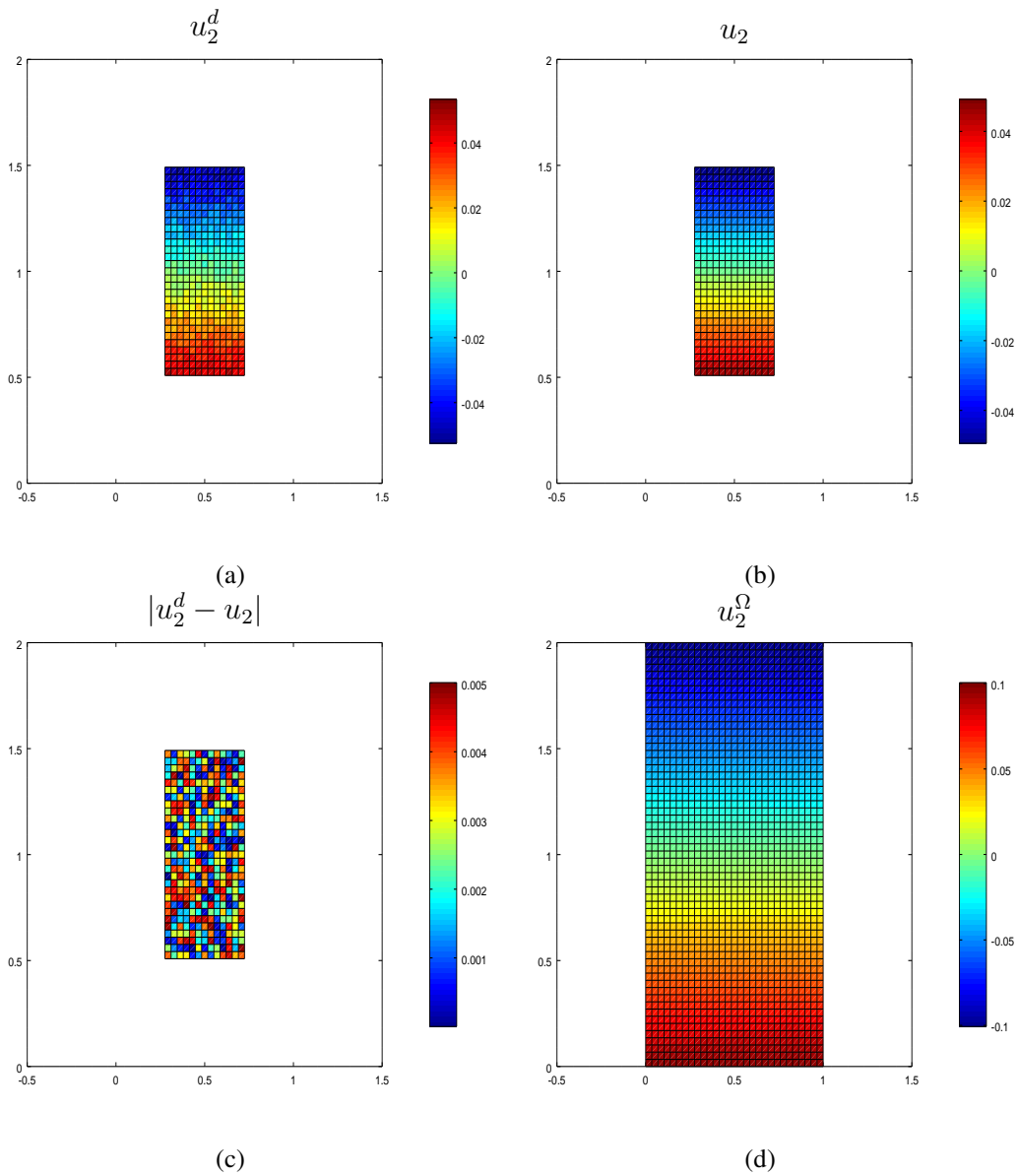


Figure 4.7 – (a) La donnée, u_2^d et (b) la reconstruction, u_2 , de la composante verticale du champ de déplacements sur Ω_d , (c) la composante $|u_2^d - u_2|$ du résidu calculé sur Ω_d et (d) la reconstruction de la composante verticale u_2 sur tout le domaine Ω , pour $c = 10^{-1}$ et $\delta = 10\%$.

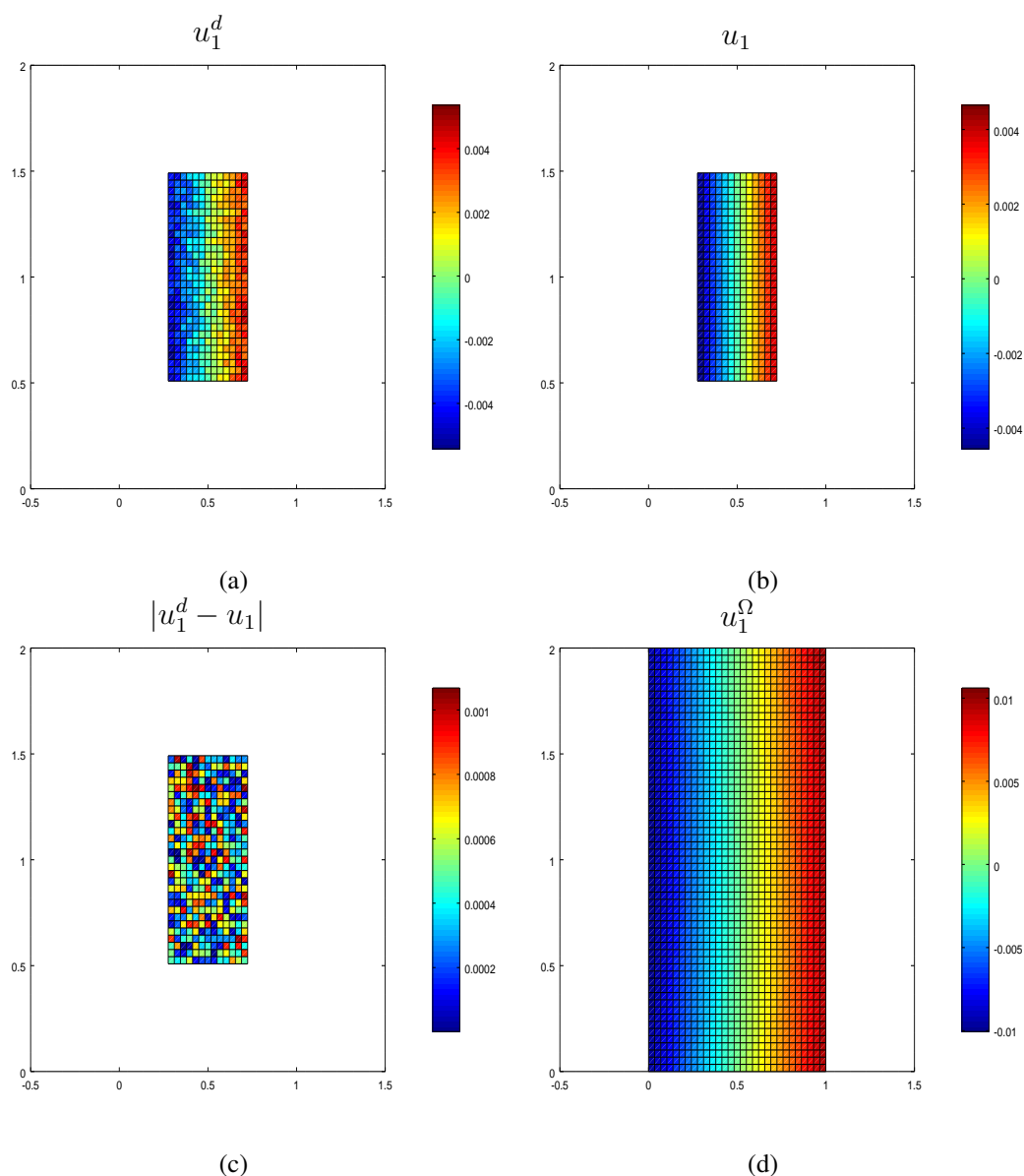


Figure 4.8 – (a) La donnée, u_1^d et (b) la reconstruction, u_1 , de la composante verticale du champ de déplacements sur Ω_d , (c) la composante $|u_1^d - u_1|$ du résidu calculé sur Ω_d et (d) la reconstruction de la composante verticale u_1 sur tout le domaine Ω , pour $c = 10^{-1}$ et $\delta = 10\%$.

Nous observons sur la Figure 4.9 que les reconstructions des conditions aux limites le long de Γ sont très précises lorsque les données sont perturbées d'un bruit de niveau $\delta = \{1, 3, 5, 10\}\%$.

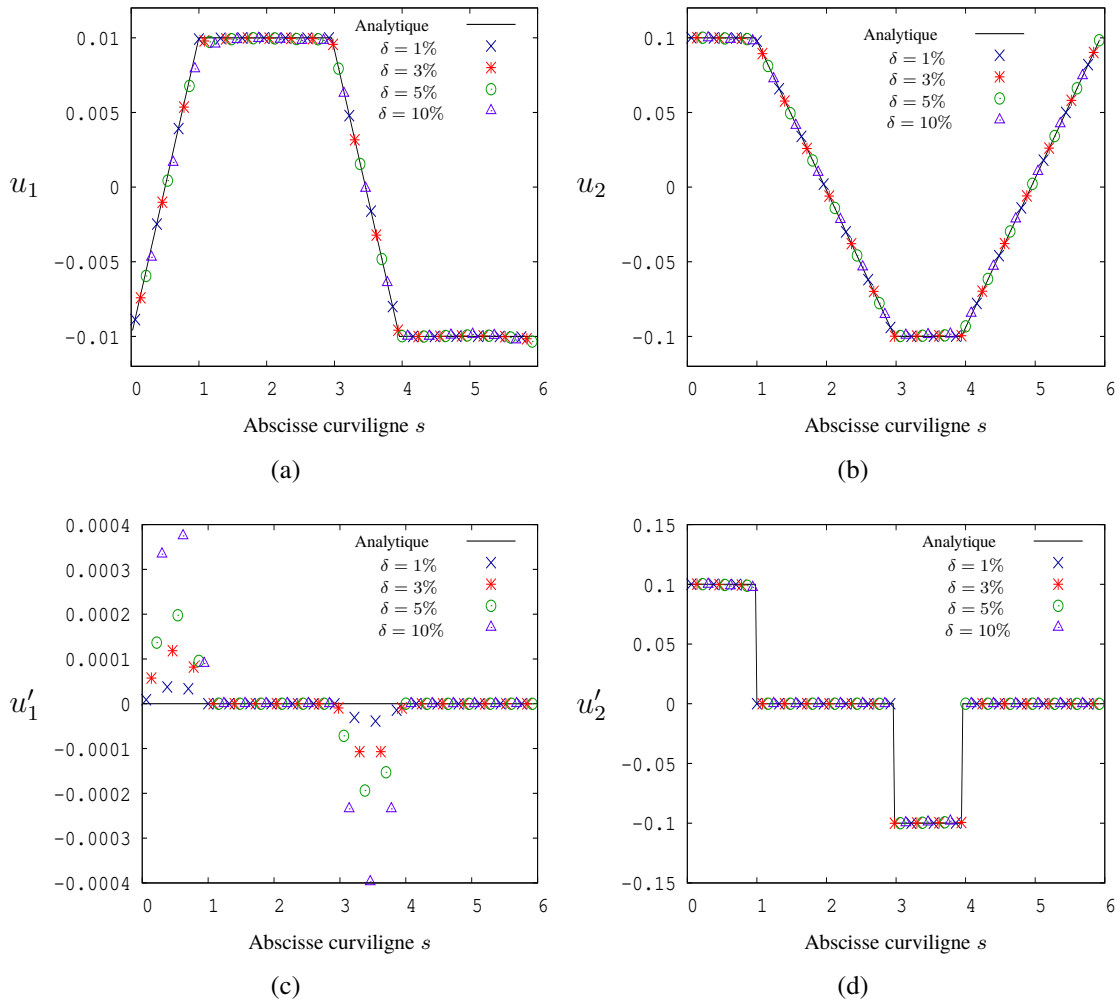


Figure 4.9 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ déplacements et les composantes (c) horizontale, u_1' et (d) verticale, u_2' , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour plusieurs niveaux de bruit δ , et $c = 1$.

Le Tableau 4.2 liste les erreurs u_{erreur}^Ω , u_{erreur}^Γ et u'_{erreur} pour $\delta = \{1, 3, 5, 10\}\%$ et plusieurs valeurs de c . On remarque que, pour un niveau de bruit fixé, les erreurs sont constantes quelle que soit la valeur de c . Comme dans le cas de données non bruitées, les reconstructions numériques obtenues par l'algorithme (4.19) sont indépendantes du choix du coefficient de régularisation c . Les erreurs calculées sont très faibles et proportionnelles au niveau de bruit δ , ce qui montre la stabilité de l'algorithme.

δ	c	k	u_{erreur}^{Ω} (en %)	u_{erreur}^{Γ} (en %)	u'_{erreur} (en %)
1%	10^{-2}	33	0.053	0.06	0.03
	10^{-1}	187	0.053	0.06	0.03
	10	3008	0.050	0.06	0.03
3%	10^{-2}	35	0.16	0.19	0.1
	10^{-1}	199	0.16	0.19	0.1
	10	3924	0.16	0.18	0.1
5%	10^{-2}	37	0.27	0.31	0.17
	10^{-1}	204	0.27	0.31	0.17
	10	4572	0.26	0.31	0.16
10%	10^{-2}	37	0.54	0.63	0.33
	10^{-1}	216	0.54	0.63	0.33
	10	5495	0.53	0.62	0.33

Tableau 4.2 – Influence du niveau de bruit δ et du coefficient c sur le nombre d'itérations k , requis pour converger et sur les erreurs u_{erreur}^{Ω} , u_{erreur}^{Γ} et u'_{erreur} .

4.4.1.3 Reconstructions à partir d'un champ de déplacements perturbé par un mouvement de solide rigide

Nous nous intéressons au cas où les données sont perturbées par un mouvement de solide rigide, ce type de perturbation est souvent rencontré lors d'expériences réelles.

On considère un mouvement de solide rigide $\underline{u}^{rig.} = (u_1^{rig.}, u_2^{rig.})$, composé de mouvements de translation et de rotation et qui s'écrit :

$$\begin{cases} u_1^{rig.} = a + x_M \cos \alpha - y_M \sin \alpha - x_M \\ u_2^{rig.} = b + x_M \sin \alpha + y_M \cos \alpha - y_M \end{cases} \quad (4.35)$$

avec a et b les deux composantes qui décrivent le mouvement de translation, α l'angle qui décrit le mouvement de rotation de centre A et (x_M, y_M) les coordonnées d'un point M de Ω .

Les composantes horizontale et verticale du champ de déplacements reconstruit sur Ω par l'algorithme (4.19), lorsque les données $\underline{u}^d \in \Omega_d$ sont perturbées par un mouvement de solide rigide défini par (4.35) où $a = 0.02$, $b = 0.05$ et $\alpha = 0.1^\circ$, sont représentées sur les Figures 4.10(a) et (b), respectivement. Les composantes verticales, u_2 et u'_2 , des conditions aux limites sur Γ sont représentées sur la Figure 4.11. Le déplacement calculé par l'algorithme (4.19) conserve le mouvement de solide rigide alors que, comme espéré, le vecteur contraintes n'est pas influencé et correspond à la solution exacte. Les Figures 4.12(a) et (b) montrent les composantes $u_1^{def.\Omega}$ et $u_2^{def.\Omega}$, respectivement, de la partie déformable du champ de déplacements reconstruite sur Ω . Le champ de déplacements rigide est retrouvé a posteriori grâce

à une procédure d'optimisation non linéaire (Annexe B) et nous déterminons les paramètres $a = 0.0201$, $b = 0.0499$ et $\alpha = 0.1081^\circ$, qui le caractérisent.

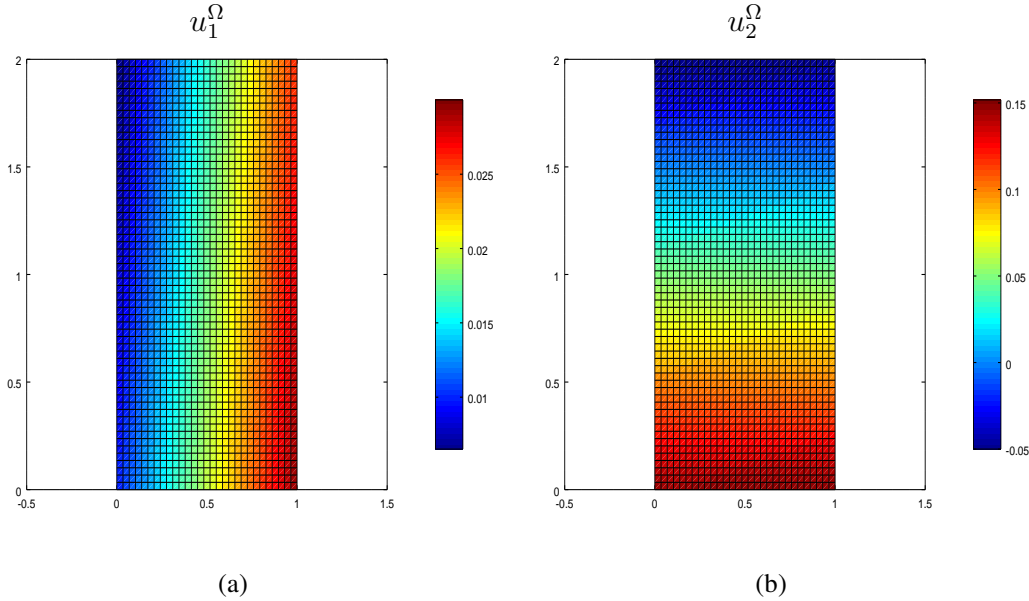


Figure 4.10 – Reconstructions de (a) la composante horizontale, u_1^Ω et (b) la composante verticale, u_2^Ω , du champ de déplacements, calculées sur Ω pour $c = 10^{-1}$.

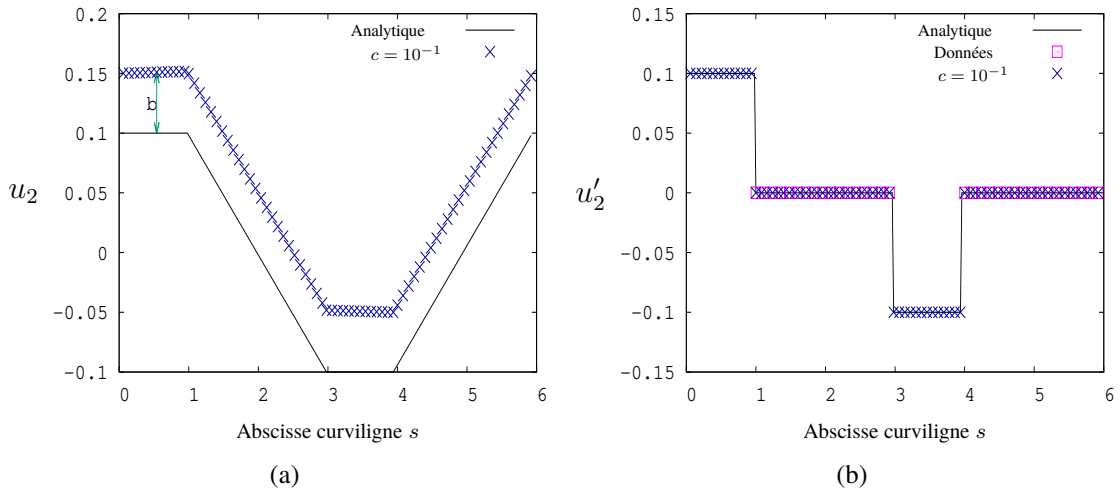


Figure 4.11 – Les composantes verticales, (a) u_2 , du champ de déplacements et (b) u'_2 , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour des données perturbées par un mouvement de solide rigide et $c = 10^{-1}$.

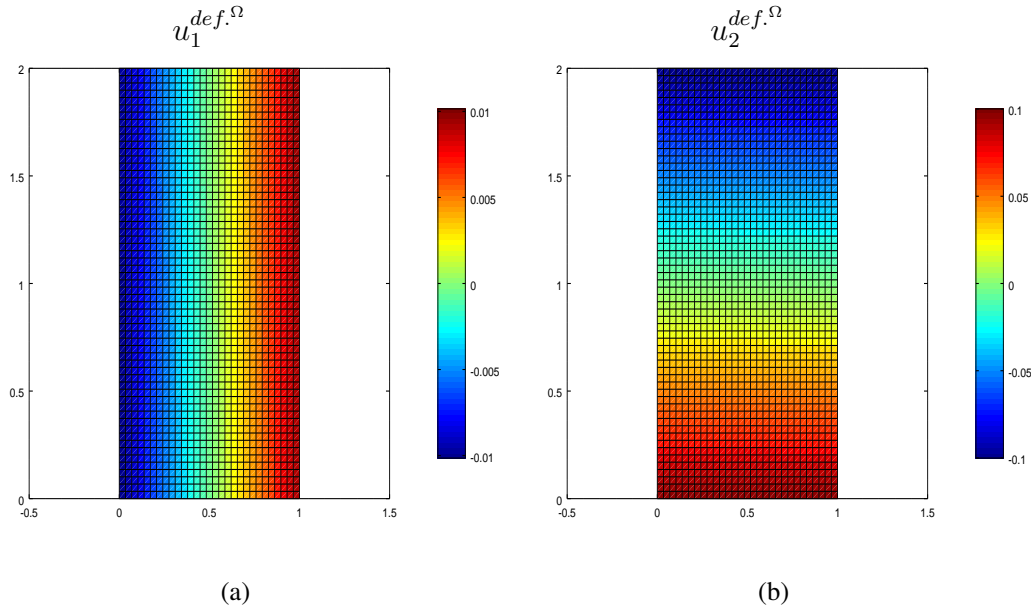


Figure 4.12 – Parties déformables de (a) la composante horizontale, $u_1^{def.Ω}$ et (b) la composante verticale, $u_2^{def.Ω}$, du champ de déplacements, calculées sur $Ω$ pour $c = 10^{-1}$.

4.4.1.4 Influence de la taille de la grille de données

Nous discutons maintenant de l'influence de la taille de la grille de données $Ω_d$, caractérisée par le paramètre $ζ$. Afin d'utiliser des données comparables, quelle que soit la valeur de $ζ$, nous utilisons la donnée bruitée du champ de déplacements générée lorsque $Ω_d$ correspond à $Ω$ ($ζ = 1$) et pour chaque valeur de $ζ$, seules les données qui appartiennent à $Ω_d$ sont conservées. Les erreurs $u_{erreur}^Ω$, $u_{erreur}^Γ$ et u'_{erreur} , calculées pour plusieurs valeurs de $ζ$, $c = 10^{-2}$ et $δ = 5\%$, sont comparées dans le Tableau 4.3.

$ζ$	k	$u_{erreur}^Ω$ (en %)	$u_{erreur}^Γ$ (en %)	u'_{erreur} (en %)
$\frac{25}{36}$	10	0.27	0.35	0.37
$\frac{4}{9}$	13	0.39	0.50	0.54
$\frac{1}{4}$	37	0.27	0.31	0.17
$\frac{25}{121}$	49	0.28	0.29	0.22
$\frac{4}{25}$	86	0.26	0.30	0.30
$\frac{1}{9}$	210	0.66	0.80	0.79
$\frac{1}{16}$	1205	0.99	1.20	0.75

Tableau 4.3 – Influence de la taille de la grille de données (paramètre $ζ$) sur le nombre d'itérations k requis pour converger et sur les erreurs $u_{erreur}^Ω$, $u_{erreur}^Γ$ et u'_{erreur} .

Les conditions aux limites en termes de déplacements et de vecteurs contraintes reconstruites le long de Γ , pour différentes valeurs de ζ , $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-2}$, sont représentées sur la Figure 4.13.

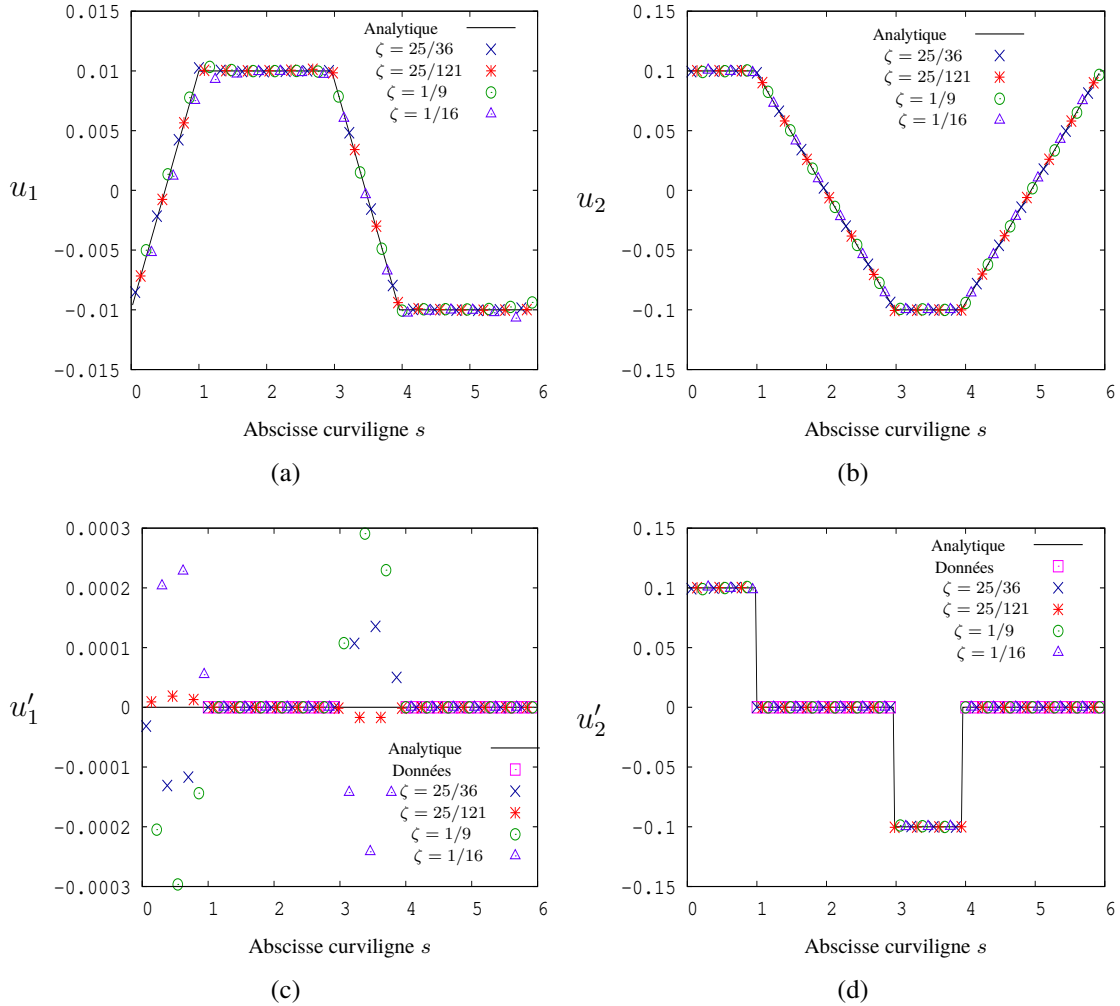


Figure 4.13 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u_1' et (d) verticale, u_2' , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour différentes valeurs du paramètre ζ , $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-2}$.

Les Figures 4.14(a), (b), (c) et (d) représentent les composantes verticales de la donnée, u_2^d et de la reconstruction, u_2 , du champ de déplacements sur Ω_d , du champ de déplacements, u_2^Ω , calculé sur Ω et de la différence, $|u_2^{an} - u_2^\Omega|$, entre les solutions analytiques et calculées sur Ω , respectivement, pour $\delta = 5\%$, $c = 10^{-2}$ et $\zeta = \frac{1}{9}$.

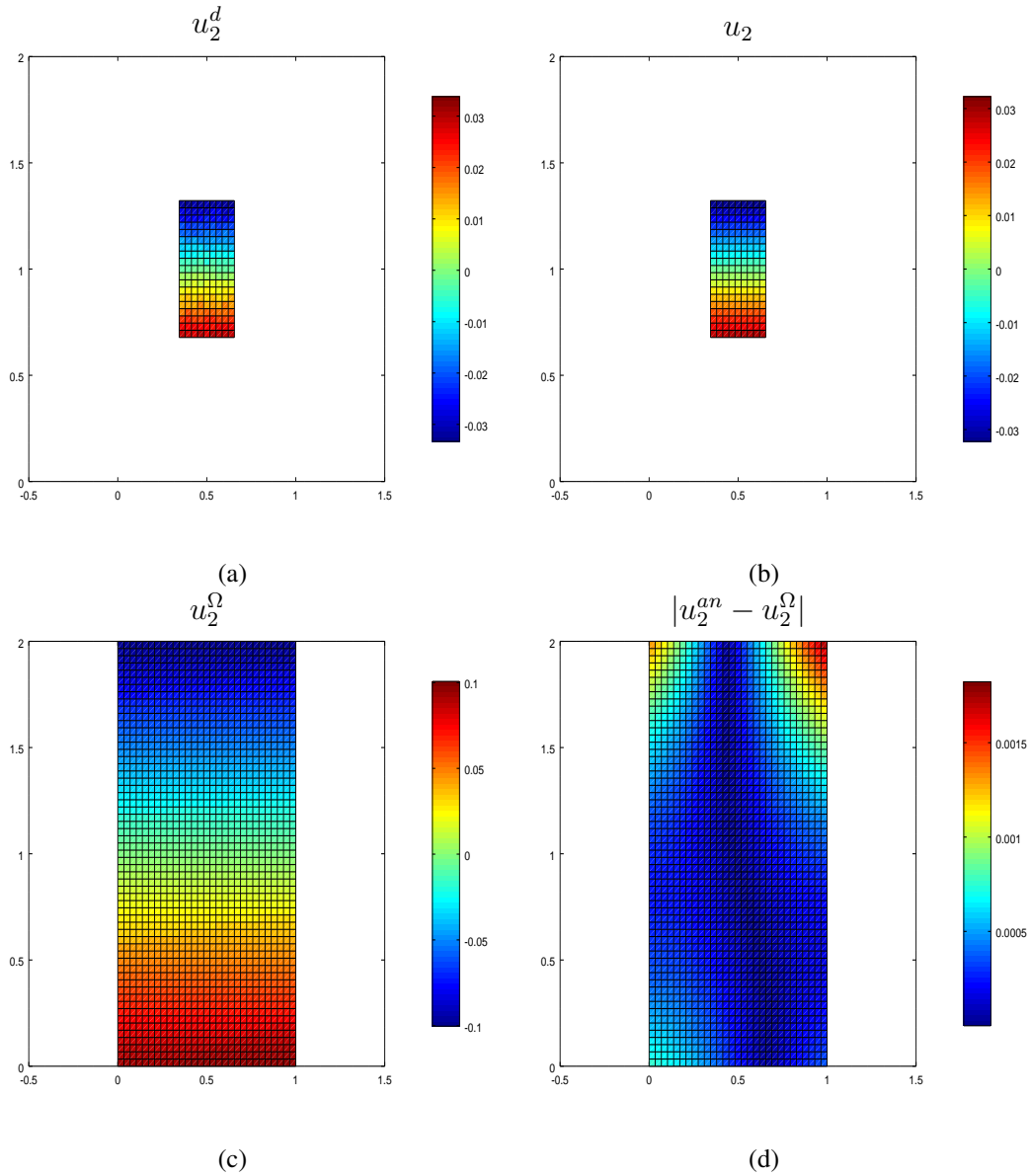


Figure 4.14 – Les composantes verticales du champ de déplacements (a) donné, u_2^d et (b) reconstruit, u_2 , sur Ω_d , (c) le champ de déplacements, u_2^Ω , reconstruit sur tout le domaine Ω et (d) l’erreur, $|u_2^{an} - u_2^\Omega|$, calculée sur Ω , pour $\zeta = \frac{1}{9}$, $c = 10^{-2}$ et $\delta = 5\%$.

Nous remarquons que la solution numérique obtenue avec l’algorithme (4.19) est peu sensible à la taille de la grille de données. Les reconstructions sont moins précises lorsque le paramètre ζ est inférieur à $\frac{1}{9}$, elles restent cependant acceptables (Tableau 4.3). Cette perte de précision s’explique par le fait que les déplacements sont très petits près du centre du domaine Ω et lorsque la grille de données devient très petite ($\zeta \leq \frac{1}{9}$), la composante de bruit devient plus grande que le champ de déplacements.

4.4.2 Simulations numériques par la méthode des éléments finis

Le domaine Ω est discrétisé en utilisant un maillage composé de P éléments quadrangulaires à n_l nœuds (nœuds roses sur la Figure 4.15 pour des éléments QUA8 ($n_l = 8$)). La taille du maillage, définie par le nombre d'éléments finis utilisés, est notée $P_x \times P_y$ avec P_x et P_y le nombre d'éléments suivant l'axe horizontal et vertical, respectivement. Le sous-domaine $\Omega_d \subset \Omega$ est représenté par les points de mesure (points noirs sur la Figure 4.15), au nombre variable en fonction de la valeur du paramètre ζ ($|\Omega_d| = \zeta|\Omega|$). Afin d'obtenir des résultats comparables à ceux présentés au paragraphe 4.4.1, on considère 30×60 points de mesure lorsque Ω_d et Ω correspondent ($\zeta = 1$) et le nombre de points de mesure varie de la même manière que la taille de Ω_d , en fonction de ζ . On rappelle que lorsque ce n'est pas spécifié $\zeta = \frac{1}{4}$.

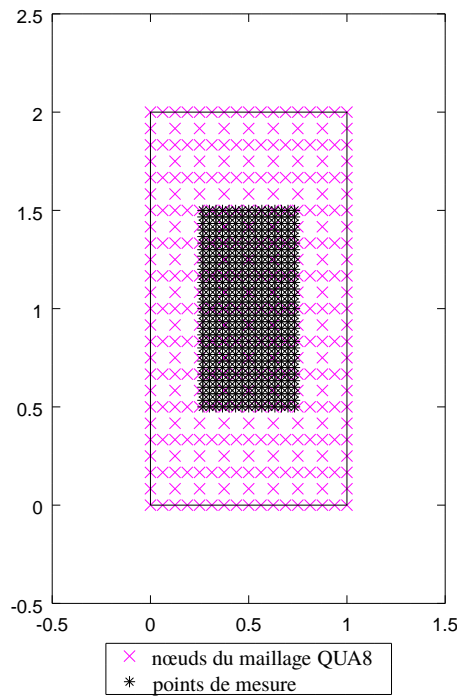


Figure 4.15 – Maillage 8×12 (éléments QUA8) et grille de données ($\zeta = \frac{1}{4}$).

La Figure 4.16 montre l'évolution des quantités de contrôle J_{Ω_d} , J_{reg}^k et J^k en fonction du nombre d'itérations k pour des données non bruitées, un maillage de taille 8×12 constitué d'éléments QUA8 et un coefficient de régularisation c fixé à 10^{-1} .

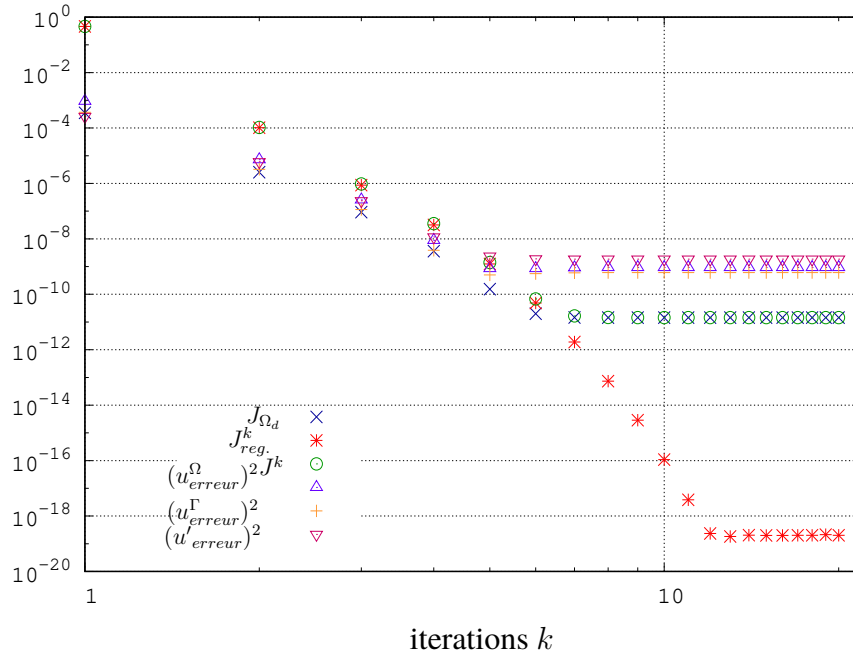


Figure 4.16 – Évolution des quantités de contrôle en fonction du nombre d'itérations k pour $c = 10^{-1}$.

Les termes J_{Ω_d} , $J_{reg.}^k$ et J^k et les normes d'erreurs u_{erreur}^Ω , u_{erreur}^Γ et u'_{erreur} deviennent constants à partir de la 14^{ème} itération. Le comportement du terme $J_{reg.}^k$ est différent de celui observé dans le cas d'une discrétisation avec la méthode des solutions fondamentales. Nous ne remarquons pas de petites oscillations. De ce fait, le processus itératif est, dans le cas d'une discrétisation éléments finis, arrêté lorsque le terme de régularisation $J_{reg.}^k$ devient constant. Le processus itératif est alors arrêté à l'itération $k_{opt} = 14$. Le terme $J_{reg.}^k$ est négligeable comparé au terme de relaxation J_{Ω_d} et tend vers zéro, à partir de $k = k_{opt}$. Les normes d'erreurs sont également des quantités négligeables à l'itération $k = k_{opt}$, ce qui confirme que l'algorithme a convergé.

Nous présentons les reconstructions obtenues le long de Γ , sur Ω_d et sur tout le domaine Ω à partir de données partielles et bruitées sur la grille de données Ω_d ($\zeta = \frac{1}{4}$). Les données bruitées sont définies par (4.34), qui exprime les composantes verticale et horizontale du champ de déplacements lorsqu'il est perturbé par un bruit de niveau δ .

4.4.2.1 Influence de la discrétisation du domaine

Il est nécessaire d'étudier l'influence de la discrétisation du domaine avec en particulier le choix du type et du nombre d'éléments finis utilisés.

Influence du type d'éléments finis

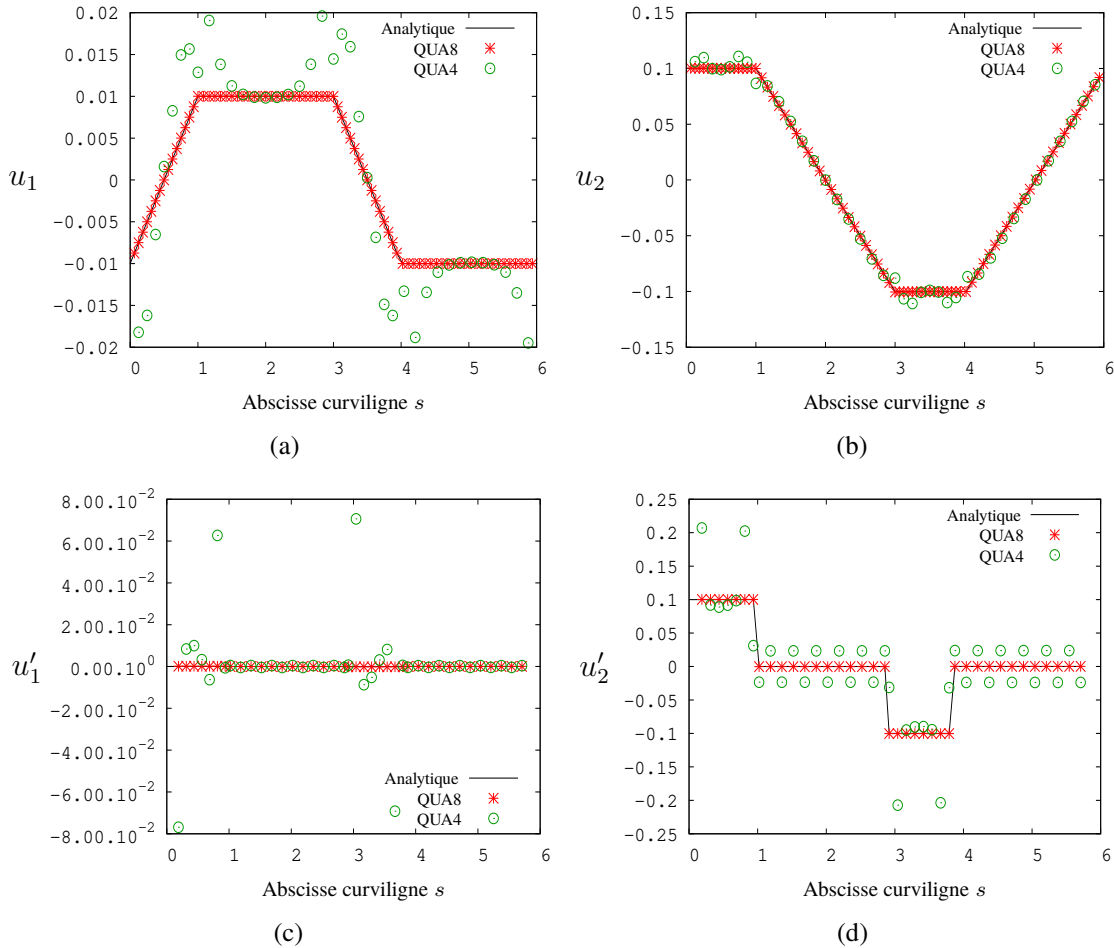


Figure 4.17 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u_1' et (d) verticale, u_2' , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour des éléments finis de type QUA4 et QUA8, $c = 10^{-1}$ et $\delta = 3\%$.

Les Figures 4.17(a), (b), (c) et (d) représentent les composantes horizontale, u_1 (a) et verticale, u_2 (b), du champ de déplacements et les composantes horizontale, u_1' (c) et verticale, u_2' (d), du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour $c = 10^{-1}$, $\delta = 3\%$ et des éléments quadrangulaires à 8 nœuds (QUA8) et à 4 nœuds (QUA4). L'abscisse curviligne s définie au paragraphe 4.4.1.1 est utilisée pour reconstruire les conditions aux limites le long de Γ et les conditions aux limites en terme de déplacement sont calculées aux nœuds des éléments qui discrétisent le bord Γ tandis que pour les vecteurs contraintes, elles sont calculées par élément. On remarque que les conditions aux limites sont plus précises lorsque des éléments QUA8 sont utilisés pour discrétiser le domaine Ω .

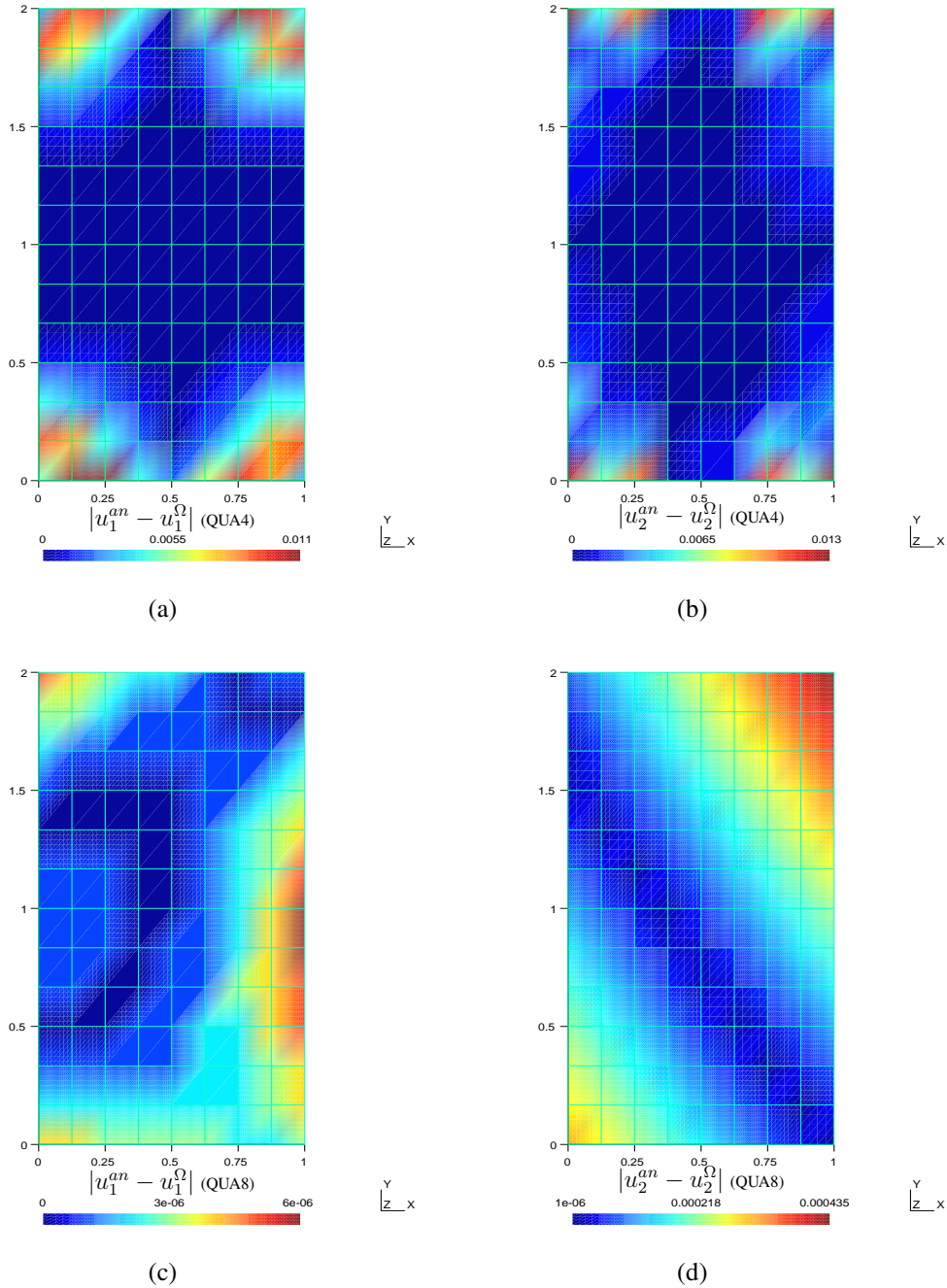


Figure 4.18 – Valeur absolue de la différence entre les composantes, (a) horizontales et (b) verticales, de la solution analytique du champ de déplacements et la solution calculée, sur Ω respectivement, pour des éléments QUA4, $c = 10^{-1}$ et $\delta = 3\%$. Les mêmes quantités pour des éléments QUA8 sont représentées sur les sous-figures (c) et (d).

La Figure 4.18, qui permet de comparer la différence entre les solutions analytiques et calculées sur Ω pour des éléments QUA4 (a,b) et QUA8 (c,d), confirme que

les résultats obtenus sont plus précis lorsque des éléments QUA8 sont utilisés. On remarque que, dans le cas d'une discrétisation avec des éléments QUA4, les erreurs sont localisées près des coins du domaine.

La précision remarquable des résultats obtenus, sur le bord Γ et sur tout le domaine Ω , en utilisant des éléments finis de type QUA8 justifie notre choix d'utiliser ce type d'éléments. Tous les résultats présentés dans la suite ont été obtenus avec un maillage constitué d'éléments QUA8.

Influence du raffinement du maillage

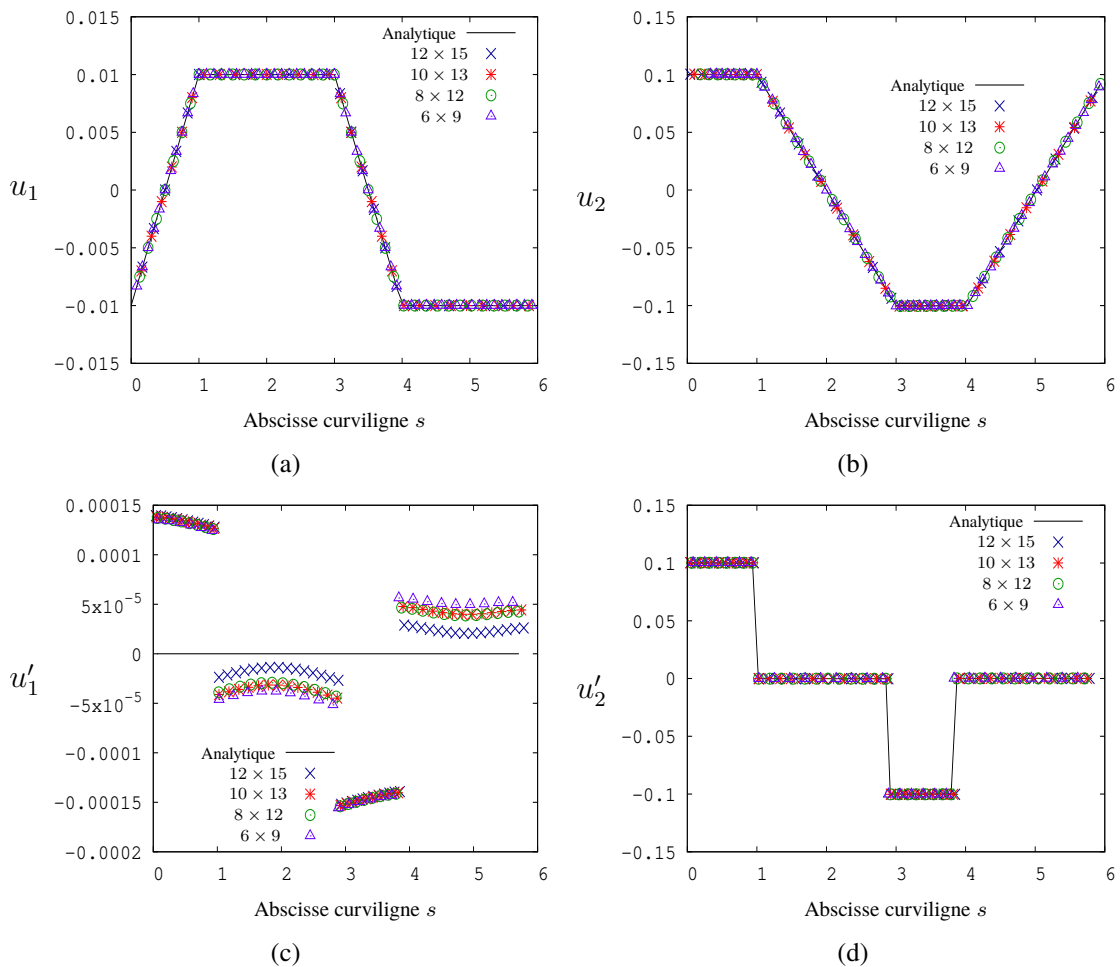


Figure 4.19 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u'_1 et (d) verticale, u'_2 , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour différents raffinements de maillage, $c = 10^{-1}$ et $\delta = 3\%$.

On observe sur la Figure 4.19 que les conditions aux limites en termes de déplacements (a,b) et de vecteurs contraintes (c,d), retrouvées sur Γ , ne dépendent pas du

nombre d'éléments finis (QUA8) utilisés pour discrétiser le domaine Ω . Le Tableau 4.4, qui liste le nombre d'itérations k requis pour converger ainsi que les termes d'erreurs u_{erreur}^Ω , u_{erreur}^Γ et u'_{erreur} en fonction de la taille du maillage, confirment que les résultats sont peu sensibles au raffinement du maillage.

Taille du maillage	k	u_{erreur}^Ω (en %)	u_{erreur}^Γ (en %)	u'_{erreur} (en %)
6×9	4	0.28	0.28	0.31
8×12	4	0.28	0.28	0.31
10×13	5	0.28	0.28	0.30
12×15	5	0.28	0.28	0.29

Tableau 4.4 – Influence du raffinement du maillage sur le nombre d'itérations k , requis pour converger et les erreurs u_{erreur}^Ω , u_{erreur}^Γ et u'_{erreur} , pour $c = 10^{-1}$ et $\delta = 3\%$.

Dans la suite, les résultats présentés sont obtenus avec un maillage composé de 8×12 éléments quadrangulaires à huit nœuds (éléments QUA8).

4.4.2.2 Influence du coefficient de régularisation c

Nous étudions l'influence du coefficient de régularisation c dans le cas d'une modélisation avec la méthode des éléments finis.

L'évolution des termes J_{Ω_d} et J_{reg}^k , en fonction du rapport $\frac{k}{c}$, pour $c = \{10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\}$ et $\delta = 3\%$, est représentée sur la Figure 4.20. Le terme de relaxation J_{Ω_d} est constant quelle que soit la valeur de c , il représente le débruitage des données. Le terme de régularisation J_{reg}^k devient négligeable lorsque l'itération k_{opt} est atteinte.

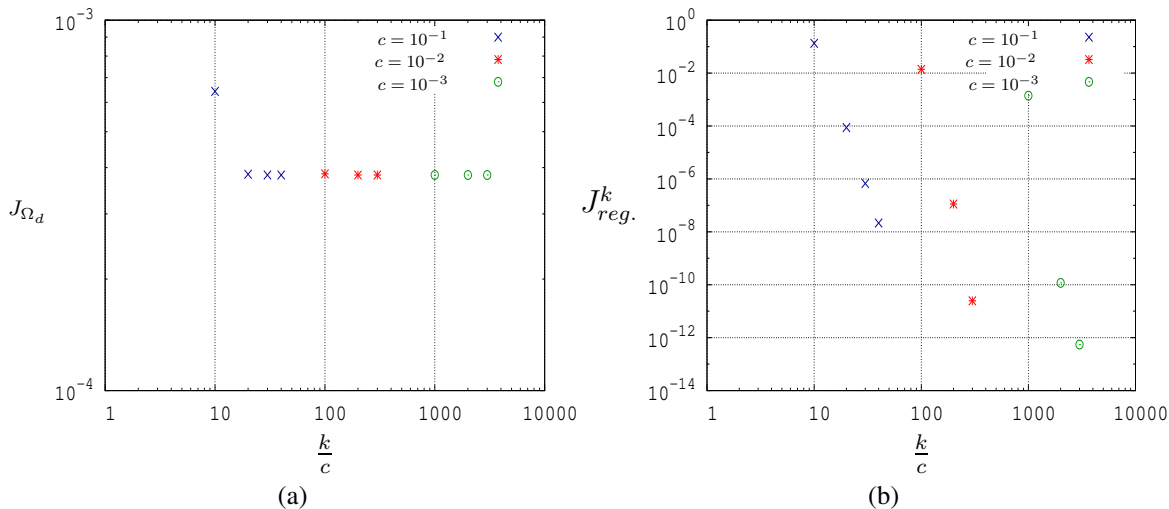


Figure 4.20 – Évolution des termes (a) J_{Ω_d} et (b) J_{reg}^k , en fonction de $\frac{k}{c}$ pour différentes valeurs de c .

Les Figures 4.21(a) et (b) montrent que les normes d'erreurs $(u_{erreur}^\Omega)^2$ et $(u'_{erreur})^2$, respectivement, deviennent très petites au fil des itérations pour les trois valeurs de c représentées. Le Tableau 4.5 confirme que, à niveau de bruit δ fixé, l'algorithme ne dépend pas du coefficient de régularisation utilisé puisque les erreurs sont constantes. Les erreurs calculées sont très faibles et proportionnelles au niveau de bruit δ , ce qui montre la stabilité de l'algorithme.

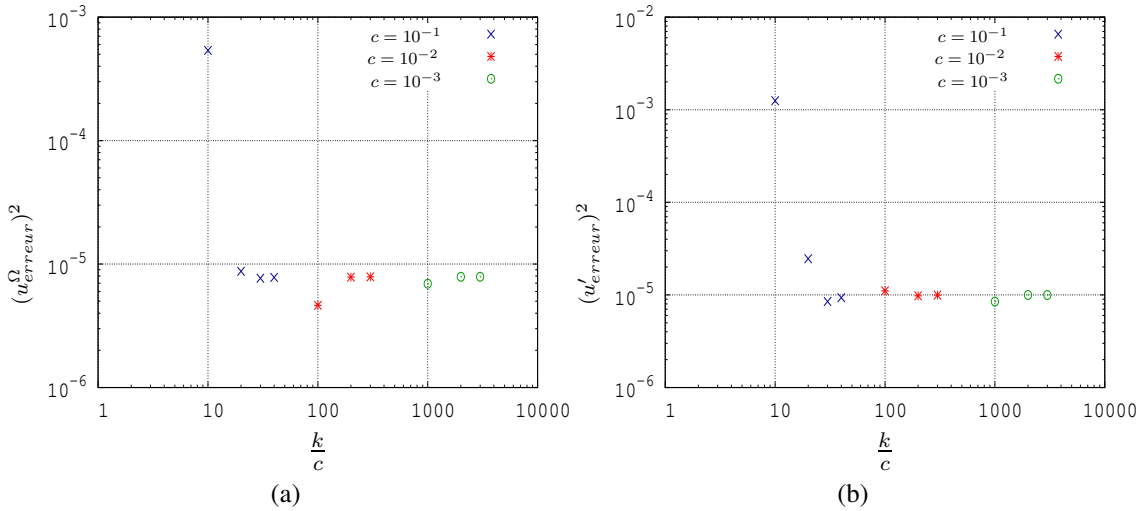


Figure 4.21 – Évolution des erreurs (a) $(u_{erreur}^\Omega)^2$ et (b) $(u'_{erreur})^2$, en fonction de $\frac{k}{c}$, pour différentes valeurs de c .

δ	c	k	u_{erreur}^Ω (en %)	u_{erreur}^Γ (en %)	u'_{erreur} (en %)
1%	10^{-3}	3	0.09	0.09	0.10
	10^{-2}	3	0.09	0.09	0.10
	10^{-1}	4	0.09	0.09	0.16
3%	10^{-3}	3	0.28	0.28	0.31
	10^{-2}	3	0.28	0.28	0.32
	10^{-1}	4	0.28	0.28	0.31
5%	10^{-3}	3	0.47	0.47	0.53
	10^{-2}	3	0.47	0.47	0.53
	10^{-1}	4	0.47	0.47	0.52
10%	10^{-3}	3	0.94	0.95	1
	10^{-2}	3	0.94	0.95	1
	10^{-1}	4	0.93	0.94	1

Tableau 4.5 – Influence du niveau de bruit δ et du coefficient c sur le nombre d'itérations k , requis pour converger et sur les erreurs u_{erreur}^Ω , u_{erreur}^Γ et u'_{erreur} .

La Figure 4.22 représente les conditions aux limites le long de Γ pour trois va-

leurs de c . En effet, les résultats sont indépendants du choix de c et nous retrouvons la condition de bord libre sur Γ_d (Figures 4.22(c) et (d)).

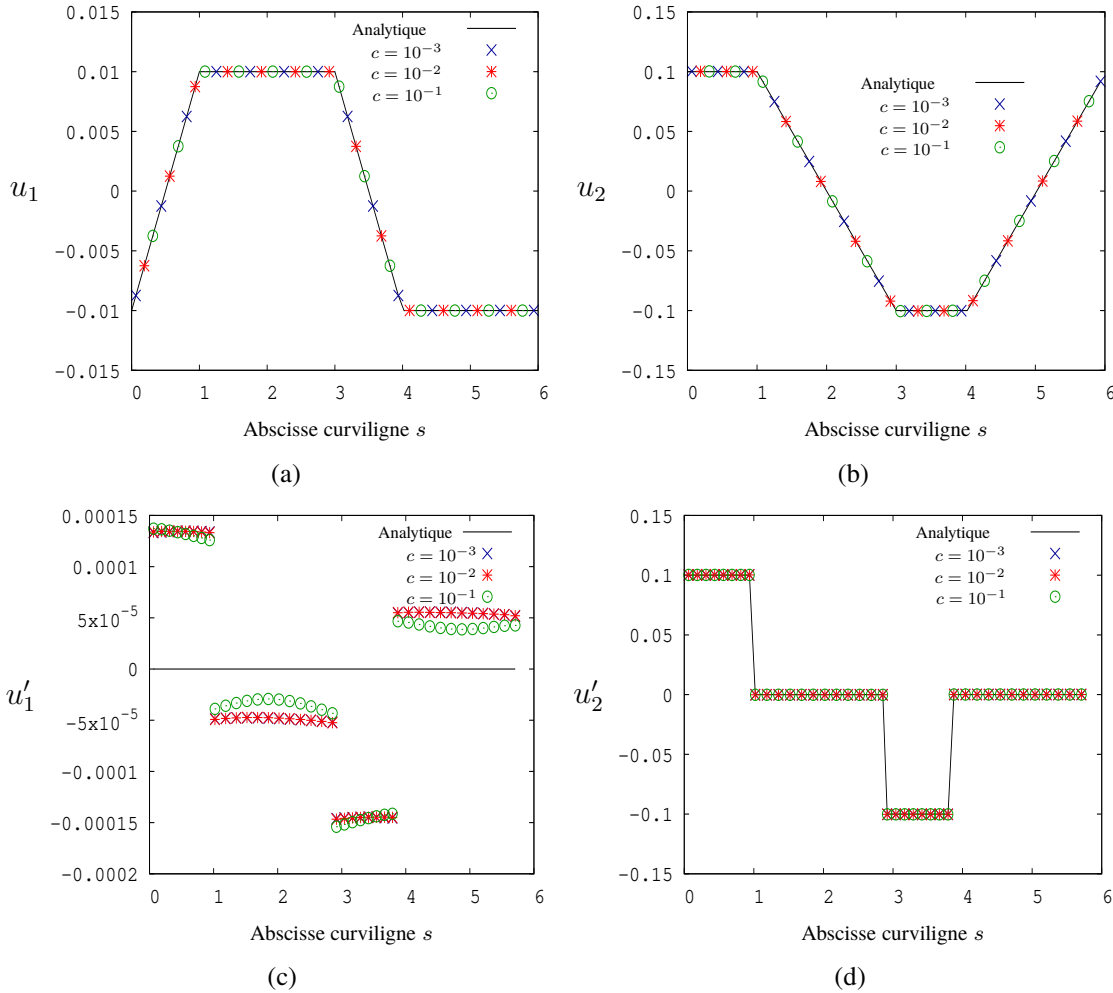


Figure 4.22 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u_1' et (d) verticale, u_2' , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour différentes valeurs de c et $\delta = 3\%$.

4.4.2.3 Reconstructions à partir de données bruitées

Les conditions aux limites en termes de déplacements (Figure 4.23(a) et (b)) et de vecteurs contraintes (Figure 4.23(c) et (d)), obtenues sur Γ pour $c = 10^{-1}$, sont très précises pour des niveaux de bruit δ variant de 1% à 10%.

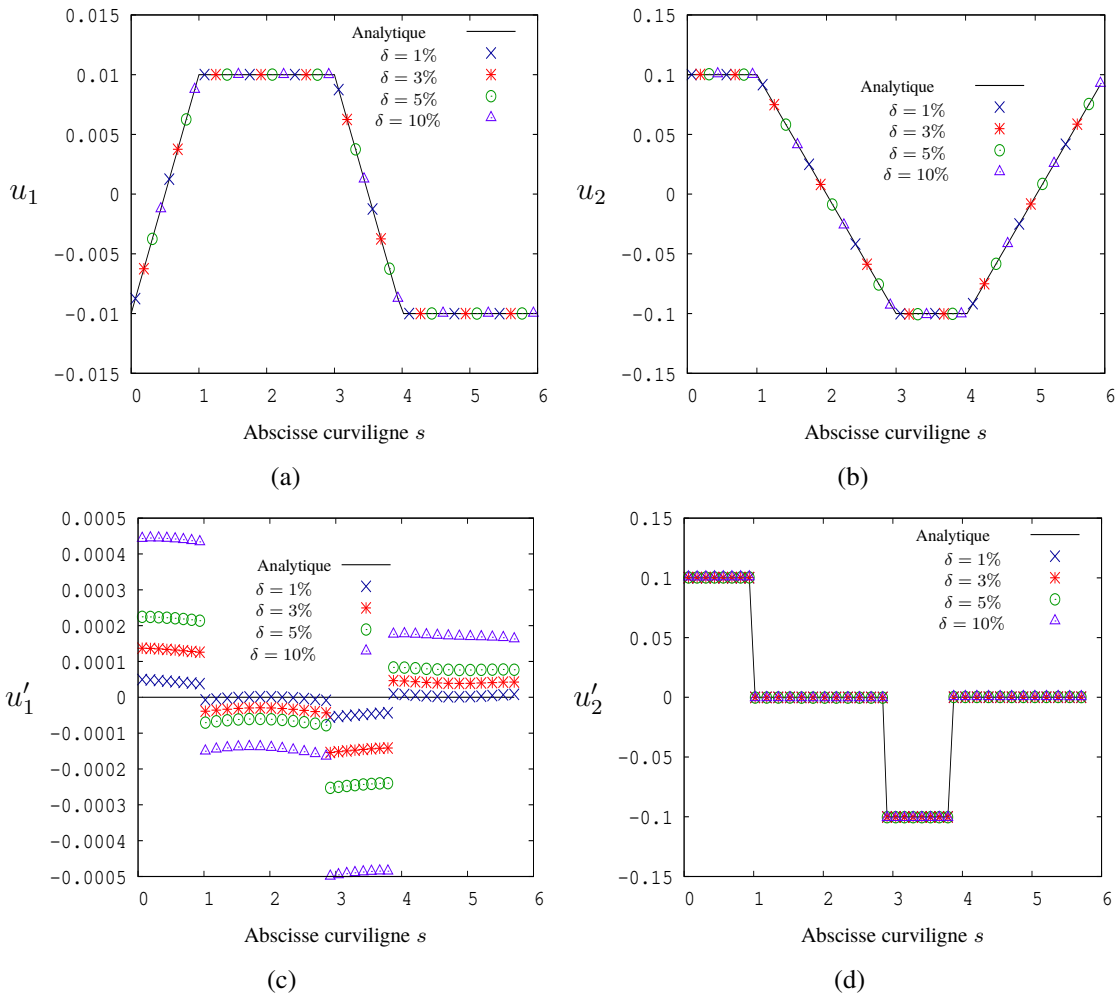


Figure 4.23 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u_1' et (d) verticale, u_2' , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour différents niveaux de bruit δ et $c = 10^{-1}$.

Les composantes horizontales du champ de déplacements perturbé ($\delta = 10\%$) sur Ω_d (u_1^d), du champ de déplacements recalculé sur les points de mesure qui représentent Ω_d (u_1), du résidu calculé sur Ω_d ($|u_1^d - u_1|$) et de la différence entre les solutions analytique et numérique sur Ω_d ($|u_1^{an} - u_1|$) sont représentées sur les Figures 4.24(a), (b), (c) et (d), respectivement. Nous remarquons que le terme d'erreur $|u_1^{an} - u_1|$ est très petit comparé au terme résiduel $|u_1^d - u_1|$, qui correspond aux 10% de bruit ajoutés aux données. Ce résultat montre que l'algorithme (4.31) proposé permet de débruiter les données. La Figure 4.25 montre les mêmes quantités pour la composante verticale, u_2 , du champ de déplacements.

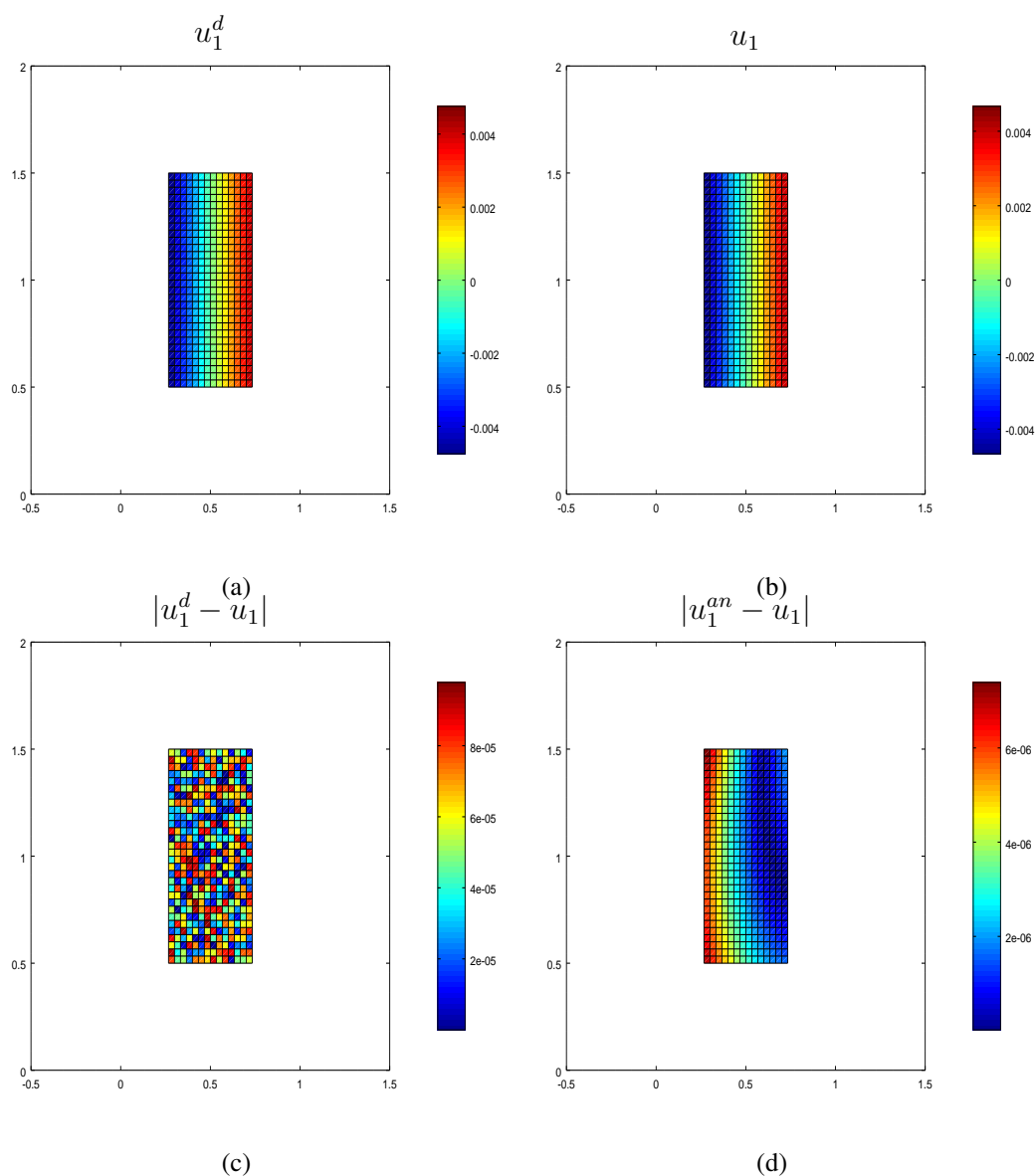


Figure 4.24 – (a) La donnée, u_1^d et (b) la reconstruction, u_1 , de la composante horizontale du champ de déplacements, (c) la composante $|u_1^d - u_1|$ du résidu calculé et (d) la composante $|u_1^{an} - u_1|$ de l'erreur calculée, sur Ω_d pour $c = 10^{-1}$ et $\delta = 10\%$.

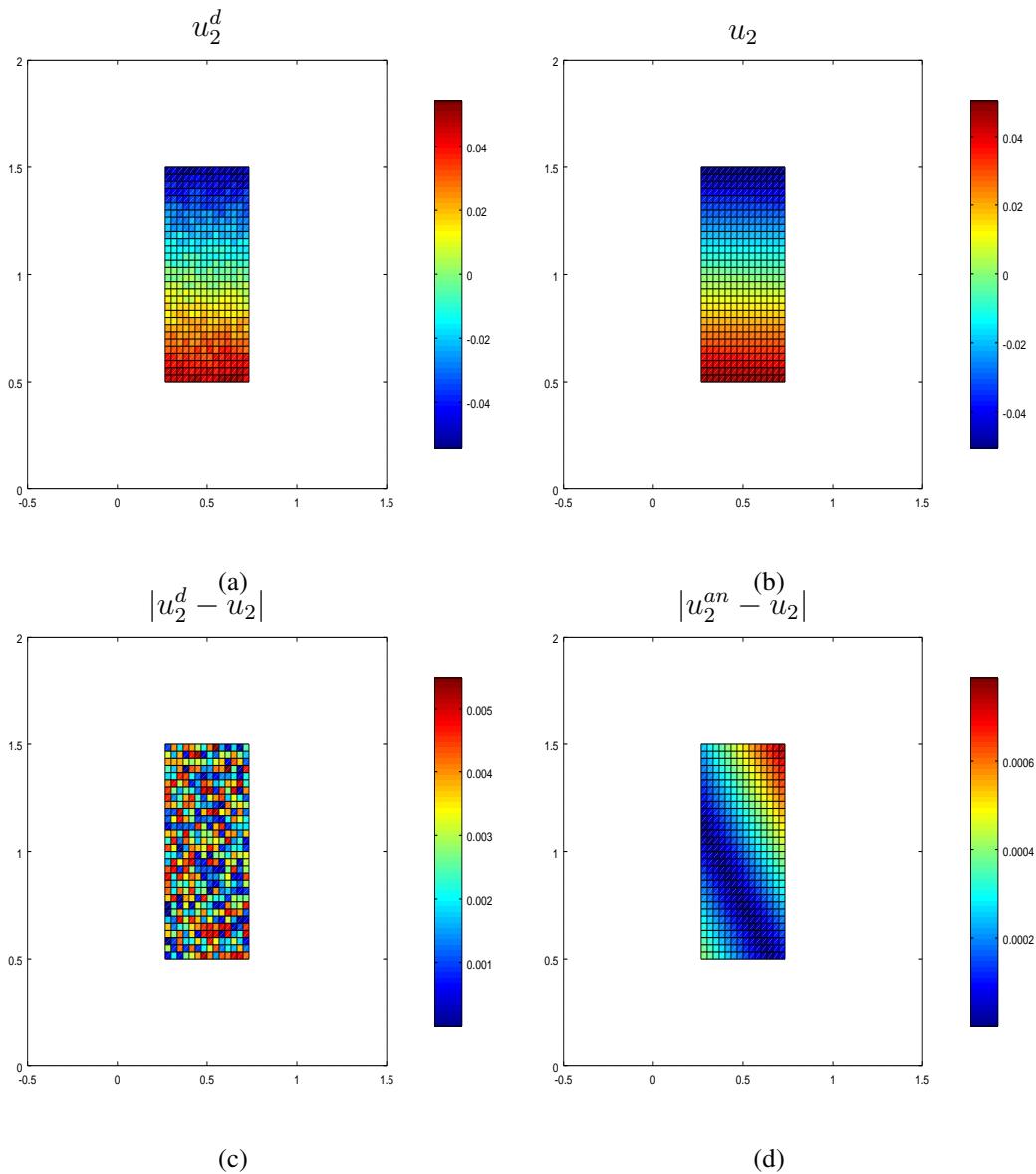


Figure 4.25 – (a) La donnée, u_2^d et (b) la reconstruction, u_2 , de la composante verticale du champ de déplacements, (c) la composante $|u_2^d - u_2|$ du résidu calculé et (d) la composante $|u_2^{an} - u_2|$ de l'erreur calculée, sur Ω_d pour $c = 10^{-1}$ et $\delta = 10\%$.

La reconstruction des composantes u_1^Ω (a) et u_2^Ω (c) du champ de déplacements calculées sur les éléments finis qui discrétisent Ω est observable sur la Figure 4.26. Les Figures 4.26(b) et (d) montrent les composantes horizontales et verticales, respectivement, de la différence entre les solutions analytique et reconstruite sur tout le domaine. On observe que la reconstruction du champ de déplacements sur tout le domaine Ω , à partir de mesures partielles et perturbées ($\delta = 10\%$) sur la grille de données Ω_d , est de très bonne qualité (voir également le Tableau 4.5). Les erreurs, bien qu'elles restent faibles, sont principalement localisées près des coins du domaine.

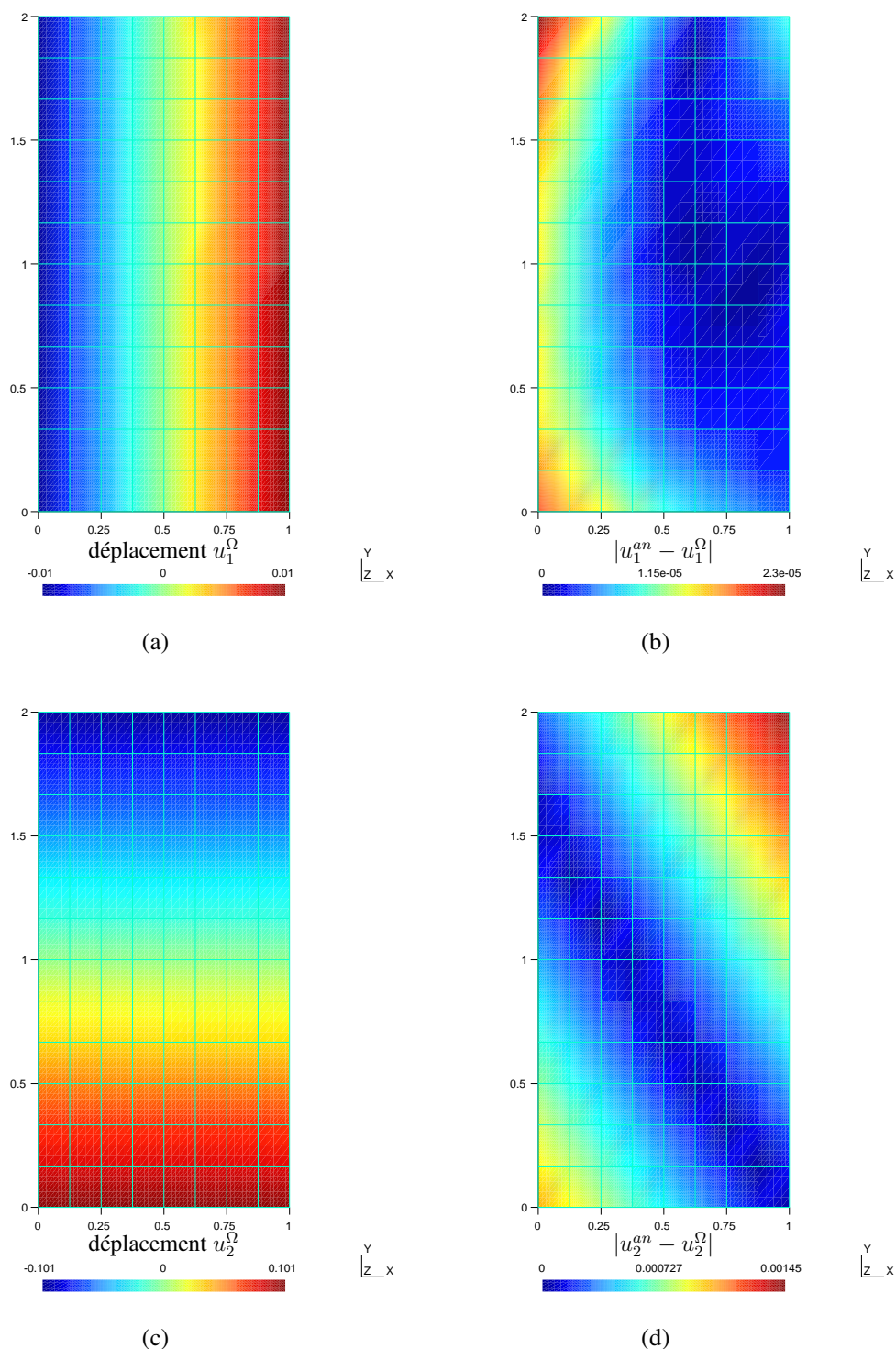


Figure 4.26 – Reconstructions des composantes (a) horizontale, u_1^Ω et (c) verticale, u_2^Ω , du champ de déplacements sur Ω et les composantes (b) $|u_1^{an} - u_1^\Omega|$ et (d) $|u_2^{an} - u_2^\Omega|$, de la différence entre la solution calculée et la solution analytique sur Ω , pour des données bruitées ($\delta = 10\%$) de champ de déplacements sur Ω_d et $c = 10^{-1}$.

4.4.2.4 Influence de la taille de la grille de données

Nous étudions la sensibilité des résultats à la taille de la grille de données Ω_d . Afin d'utiliser des données comparables quel que soit le paramètre ζ , nous procédons de la même manière que pour les résultats obtenus avec la méthode des solutions fondamentales et présentés au paragraphe 4.4.1.4, pour générer la donnée du champ de déplacements sur Ω_d .

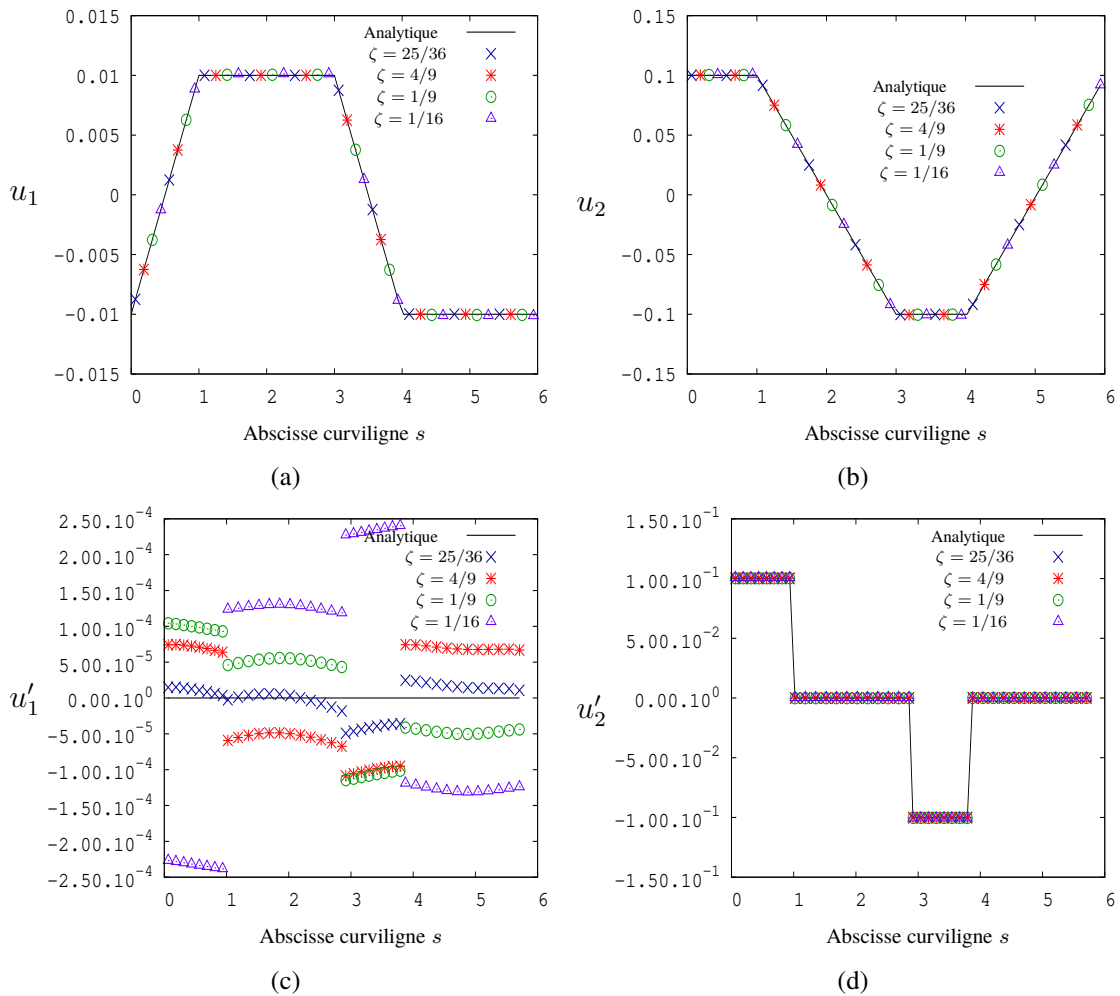


Figure 4.27 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u'_1 et (d) verticale, u'_2 , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour différentes valeurs du paramètre ζ , $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-1}$.

Les conditions aux limites reconstruites le long de Γ (Figure 4.27) sont peu sensibles à la taille de la grille de données. Ces derniers résultats sont confirmés par le Tableau 4.6 qui liste le nombre d'itérations k requis pour converger et les termes d'erreurs en fonction du paramètre ζ , pour $c = 10^{-1}$ et $\delta = 5\%$.

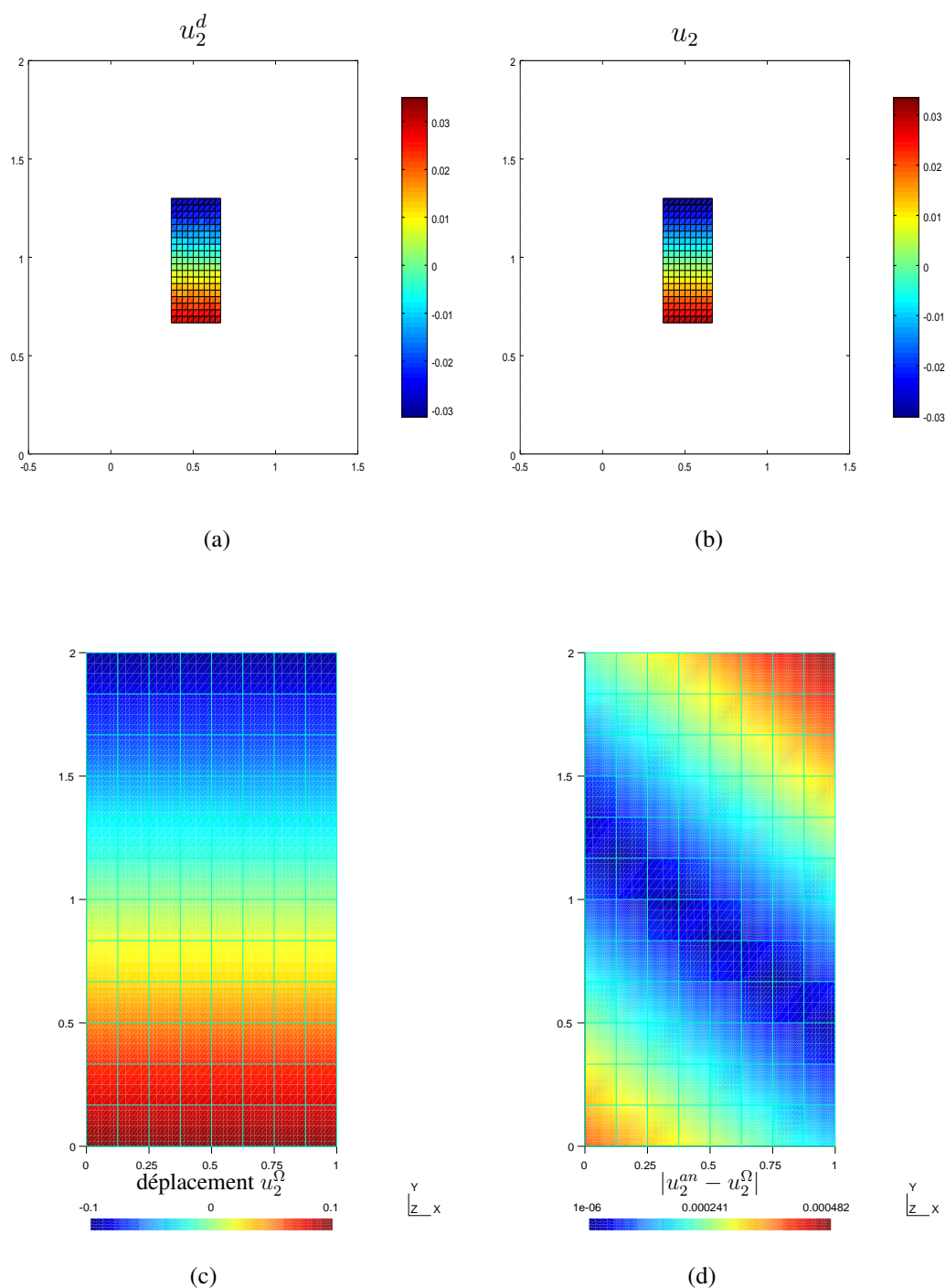


Figure 4.28 – Les composantes verticales du champ de déplacements (a) donné, u_2^d et (b) reconstruit, u_2 , sur Ω_d , (c) le champ de déplacements, u_2^Ω , reconstruit sur tout le domaine Ω et (d) l’erreur, $|u_2^{an} - u_2^\Omega|$, calculée sur Ω , pour $\zeta = \frac{1}{9}$, $c = 10^{-1}$ et $\delta = 5\%$.

Les Figures 4.28(a) et (b) représentent les composantes verticales des champs de déplacements donné, u_2^d et reconstruit, u_2 , respectivement, sur la grille Ω_d para-

métrée par $\zeta = \frac{1}{9}$. La composante verticale, u_2^Ω , du champ de déplacements calculé sur tout le domaine à partir de données partielles et bruitées sur Ω_d est représentée sur la Figure 4.28(c). Le terme d'erreur $|u_2^{an} - u_2^\Omega|$ représenté sur le maillage de Ω (Figure 4.28(d)) montre que la solution calculée sur tout le domaine reste précise malgré la petite taille de la grille de données ($|\Omega_d| = \frac{1}{9}|\Omega|$).

ζ	k	u_{erreur}^Ω (en %)	u_{erreur}^Γ (en %)	u'_{erreur} (en %)
$\frac{25}{36}$	4	0.07	0.07	0.05
$\frac{4}{9}$	4	0.32	0.32	0.33
$\frac{1}{4}$	4	0.47	0.47	0.52
$\frac{4}{25}$	4	0.41	0.49	0.47
$\frac{1}{9}$	6	0.44	0.45	0.44
$\frac{1}{16}$	7	0.68	0.69	0.70

Tableau 4.6 – Influence de la taille de la grille de données (paramètre ζ) sur le nombre d'itérations k requis pour converger et sur les erreurs u_{erreur}^Ω , u_{erreur}^Γ et u'_{erreur} .

4.4.3 Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes numériques

De manière générale, les algorithmes proposés qui utilisent une modélisation par la méthode des solutions fondamentales ou par la méthode des éléments finis donnent de très bons résultats numériques. Un des avantages de la méthode des solutions fondamentales est qu'elle ne nécessite pas de discrétisation du domaine tandis qu'avec la méthode des éléments finis, la discrétisation du domaine, en particulier le type d'éléments finis, doit être choisie judicieusement.

Les Tableaux 4.2 et 4.5 montrent que les résultats, obtenus en utilisant les deux méthodes, sont indépendants de la valeur du coefficient de régularisation c . Les deux méthodes numériques permettent de débruiter les données et on observe, en comparant les Figures 4.8 et 4.24 et les Figures 4.7 et 4.25, que les résidus obtenus par les deux méthodes sont équivalents.

La méthode utilisant la méthode des solutions fondamentales permet d'obtenir des résultats plus précis. L'évolution des quantités de contrôle (Figure 4.3 et Figure 4.16) montre que ces dernières tendent vers zéro lorsque l'itération optimale est atteinte mais nous observons des valeurs oscillantes et plus petites, de l'ordre de la

précision de la machine, lorsque la méthode des solutions fondamentales est utilisée. Ceci s'explique par le fait que la méthode des éléments finis génère des erreurs d'approximation numérique, tandis que la méthode des solutions fondamentales exprime la solution dans une base des solutions fondamentales de l'équation d'équilibre. Les résultats plus précis avec la méthode des solutions fondamentales sont remarquables lorsque la solution est reconstruite à partir de données partielles et bruitées. Le Tableau 4.7 compare le nombre d'itérations nécessaires pour converger et les erreurs obtenues avec les deux méthodes numériques pour différents niveaux de bruit et $c = 10^{-1}$. Les erreurs sont très faibles et proportionnelles au niveau de bruit pour les deux méthodes mais les erreurs obtenues en utilisant la méthode des solutions fondamentales sont plus faibles que celles obtenues en utilisant les éléments finis. Par exemple, l'erreur u_{erreur}^{Ω} obtenue avec la méthode des éléments finis, pour des données perturbées par 3% de bruit, est du même ordre de grandeur que celle obtenue, en utilisant la méthode des solutions fondamentales, pour un niveau de bruit δ égal à 5%.

δ	c	Méthode numérique	k	u_{erreur}^{Ω} (en %)	u_{erreur}^{Γ} (en %)	u'_{erreur} (en %)
1%	10^{-1}	MFS	187	0.053	0.06	0.03
		EF	4	0.09	0.09	0.16
3%	10^{-1}	MFS	199	0.16	0.19	0.1
		EF	4	0.28	0.28	0.31
5%	10^{-1}	MFS	204	0.27	0.31	0.17
		EF	4	0.47	0.47	0.52
10%	10^{-1}	MFS	216	0.54	0.63	0.33
		EF	4	0.93	0.94	1

Tableau 4.7 – Comparaisons des erreurs u_{erreur}^{Ω} , u_{erreur}^{Γ} et u'_{erreur} , obtenues en utilisant les deux méthodes numériques pour différents niveaux de bruit δ et $c = 10^{-1}$.

Nous obtenons, avec les deux méthodes numériques, des reconstructions précises pour des petites tailles de grille de données (paramètre ζ). Le Tableau 4.8 permet de comparer le nombre d'itérations nécessaires pour converger et les termes d'erreurs obtenus avec les deux méthodes. On remarque que, plus la taille de la grille de données est petite et plus le nombre d'itérations k est élevé, en utilisant la méthode des solutions fondamentales. A contrario, la taille de la grille n'influence pas le nombre d'itérations requises pour converger avec la méthode des éléments finis. En utilisant les éléments finis, les erreurs augmentent de manière significative lorsque ζ augmente alors qu'elles n'augmentent de manière remarquable qu'à partir de $\zeta \geq \frac{1}{9}$ avec la méthode des solutions fondamentales. Les erreurs obtenues, en utilisant les

éléments finis, sont plus petites que celles calculées avec la méthode des solutions fondamentales, sauf lorsque $\zeta = \frac{1}{4}$.

ζ	Méthode numérique	k	u_{erreur}^{Ω} (en %)	u_{erreur}^{Γ} (en %)	u'_{erreur} (en %)
$\frac{25}{36}$	EF	4	0.07	0.07	0.05
	MFS	10	0.27	0.35	0.37
$\frac{4}{9}$	EF	4	0.32	0.32	0.33
	MFS	13	0.39	0.50	0.54
$\frac{1}{4}$	EF	4	0.47	0.47	0.52
	MFS	37	0.27	0.31	0.17
$\frac{1}{9}$	EF	5	0.44	0.45	0.44
	MFS	210	0.66	0.80	0.79
$\frac{1}{16}$	EF	5	0.68	0.69	0.70
	MFS	1205	0.99	1.20	0.75

Tableau 4.8 – Comparaisons des erreurs u_{erreur}^{Ω} , u_{erreur}^{Γ} et u'_{erreur} , obtenues en utilisant les deux méthodes numériques pour différentes tailles de grille de données (paramètre ζ), $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-1}$.

4.5 Applications à des situations réelles

La généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles est appliquée à des données expérimentales afin de compléter et débruiter des champs de déplacements issus de corrélation d'images numériques (CIN) et d'identifier les conditions aux limites. Les essais ont été réalisés à Bourges, en collaboration avec J.L. Hanus du laboratoire LaMé de l'INSA-Centre Val de Loire. Ils ont été filmés par une caméra Photron Fastcam SA5 de fréquence 7000 images/seconde et de résolution 1024×1024 pixels. Afin d'obtenir des images qui présentent une bonne distribution du niveau de gris, un mouchetis aléatoire est réalisé sur la surface du solide observée lorsque cela est nécessaire. Le champ de déplacements est obtenu, sur une zone centrale Ω_d , par CIN en utilisant le logiciel Icasoft [196]. Les images sont subdivisées en motifs carrés dont nous fixons la taille à 20×20 px² et le pas entre deux points de mesures à 20 px.

Nous étudions des essais de compression, sur des éprouvettes en polyéthylène et en béton, en utilisant la méthode implémentée grâce à la méthode des solutions fondamentales. Pour chaque essai, nous mesurons un champ de déplacements partiel qui est constitué d'un petit déplacement dû au caractère déformable du solide sollicité, du bruit de mesure et d'un mouvement de solide rigide. Les conditions aux limites sont incomplètes puisqu'elles ne sont pas accessibles à la mesure près des zones de contact. Nous pouvons simplement exploiter des informations de bord libre d'effort en dehors des zones de contact.

Nous montrons que la méthode permet également d'obtenir des informations sur le comportement du solide et les propriétés mécaniques du matériau.

4.5.1 Contribution à l'analyse d'essais de compression diamétrale

Nous nous intéressons à des essais de compression, il s'agit d'éprouvettes de forme cylindrique comprimées diamétralement entre deux supports rigides parallèles (Figures 4.29(a) et 4.40). Le chargement en compression est réalisé par le plateau supérieur auquel un déplacement vertical, \underline{u}_0 , est imposé. Le plateau inférieur est quant à lui immobile. Les essais sont donc pilotés en déplacement et suivis à l'aide du capteur d'effort de la machine. L'analyse de ce type d'essai est difficile puisque le champ de déplacements est bruité et qu'il ne peut pas être mesuré près des zones de contact. L'extension des zones de contact et la distribution du chargement sont inconnues et un mouvement de solide rigide apparaît dès le début des essais.

Nous avons modélisé ces essais (Figure 4.29(b)) en représentant la face avant de l'éprouvette sollicitée par un disque comprimé entre deux plateaux. Le disque décrit le domaine Ω , borné par sa frontière Γ qui est composée de Γ_d et Γ_i . La partie Γ_d représente les morceaux du bord libre et la partie complémentaire Γ_i décrit les zones de contact. Nous n'avons donc aucune information le long de Γ_i , hormis l'effort appliqué par le plateau supérieur. Ω_d décrit la zone centrale sur laquelle le champ de déplacements est mesuré.

Nous présentons des résultats obtenus en appliquant l'algorithme qui utilise la méthode des solutions fondamentales à des mesures réalisées lors d'essais de compression sur un cylindre en polyéthylène et sur un disque de béton. Nous choisissons de travailler en premier lieu avec le polyéthylène pour son niveau de déformation plus élevé que celui du béton, qui est un matériau dit quasi-fragile.

4.5.1.1 Essai de compression d'un cylindre en polyéthylène

Le cylindre de polyéthylène, comprimé entre deux plateaux, est de rayon $R = 61.6$ mm et d'épaisseur $e = 2 \times R$. Les résultats présentés sont issus de calculs effectués avec un coefficient de Poisson du matériau égal à 0.46 et un module d'Young

E fixé à 1 N.m^{-2} . Ce choix de paramètre matériau permet de traiter, dans un premier temps, un problème adimensionnel et d'identifier, par la suite, le module d'Young.

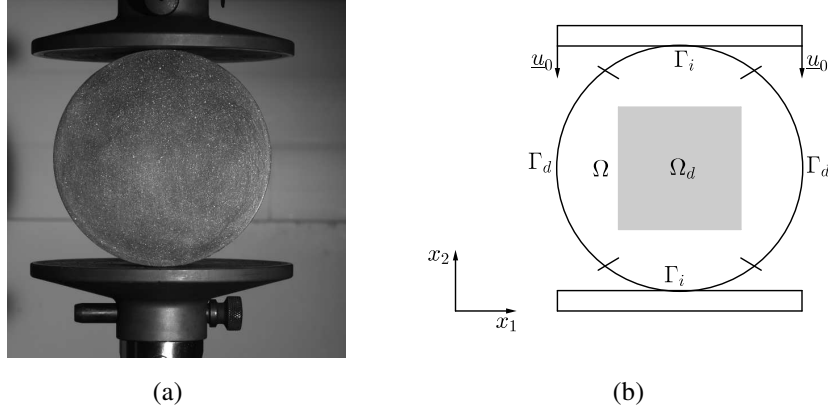


Figure 4.29 – (a) Essai de compression d'un cylindre de polyéthylène et (b) modélisation 2D de l'essai de compression.

L'étude est réalisée à partir de mesures de champs sur Ω_d issues de la CIN entre les images 500 et 2000, pour lesquelles nous comptons 0.1535 millimètres par pixel. Grâce aux mesures de l'intensité de la force appliquée sur le plateau supérieur, obtenues avec le capteur d'effort de la machine, on calcule l'accroissement d'effort correspondant : 15120 N. Les vecteurs contraintes sont considérés nuls sur les parties du bord libre Γ_d (Figure 4.29(b)). L'extension des zones de contact Γ_i n'étant pas parfaitement connue, nous ne connaissons pas la taille réelle de Γ_d et Γ_i . Afin de définir complètement notre problème mécanique, nous choisissons une extension de la zone de contact Γ_i supérieure à l'extension réelle en la fixant à $\beta = \frac{\pi}{20}$. Nous pouvons alors définir Γ_d et Γ_i tels que $\Gamma_d = \{\underline{x} \in \Gamma \mid 0 \leq \theta(\underline{x}) \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\} \cup \{\underline{x} \in \Gamma \mid \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} \leq \theta(\underline{x}) \leq \frac{3\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\} \cup \{\underline{x} \in \Gamma \mid \frac{3\pi}{2} + \frac{\beta}{2} \leq \theta(\underline{x}) \leq 2\pi\}$ et $\Gamma_u = \{\underline{x} \in \Gamma \mid \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} < \theta(\underline{x}) < \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}\} \cup \{\underline{x} \in \Gamma \mid \frac{3\pi}{2} - \frac{\beta}{2} < \theta(\underline{x}) < \frac{3\pi}{2} + \frac{\beta}{2}\}$ où $\theta(\underline{x})$ est l'angle des coordonnées polaires de \underline{x} .

Les résultats présentés sont réalisés en utilisant une discrétisation par la méthode des solutions fondamentales pour laquelle on considère, en accord avec les notations introduites au paragraphe 4.3.1.2, $N = 120$ sources uniformément réparties sur le cercle $\tilde{\Gamma}$ tel que $\tilde{\Gamma} = \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = d^2 \right\}$ et $d = 65$. $M_d = 120$ et $M_i = 40$ points de collocation décrivent Γ_d et Γ_i , respectivement. Le domaine Ω_d est représenté par 630 points de mesure définis par (x_d, y_d) tel que $-30.1 \text{ mm} < x_d < 31.3 \text{ mm}$ et $-43.5 \text{ mm} < y_d < 45.6 \text{ mm}$, ce qui correspond à un paramètre $\zeta \approx \frac{1}{2}$.

Les Figures 4.30(a), (b), (c) et (d) montrent les composantes horizontale, u_1^{CIN} et verticale, u_2^{CIN} , du champ de déplacements obtenu par CIN entre les images 500 et

2000 et les composantes horizontale, u_1 et verticale, u_2 , du champ de déplacements reconstruit, respectivement sur Ω_d . Les composantes du résidu, qui exprime l'écart entre les champs de déplacements mesuré et calculé, sur Ω_d sont représentées sur la Figure 4.31. L'algorithme permet de débruiter les données et le niveau de bruit peut être estimé à environ 10% pour les deux composantes du champ de déplacements. On remarque, sur la Figure 4.31(b), que le résidu est important près des zones de contact.

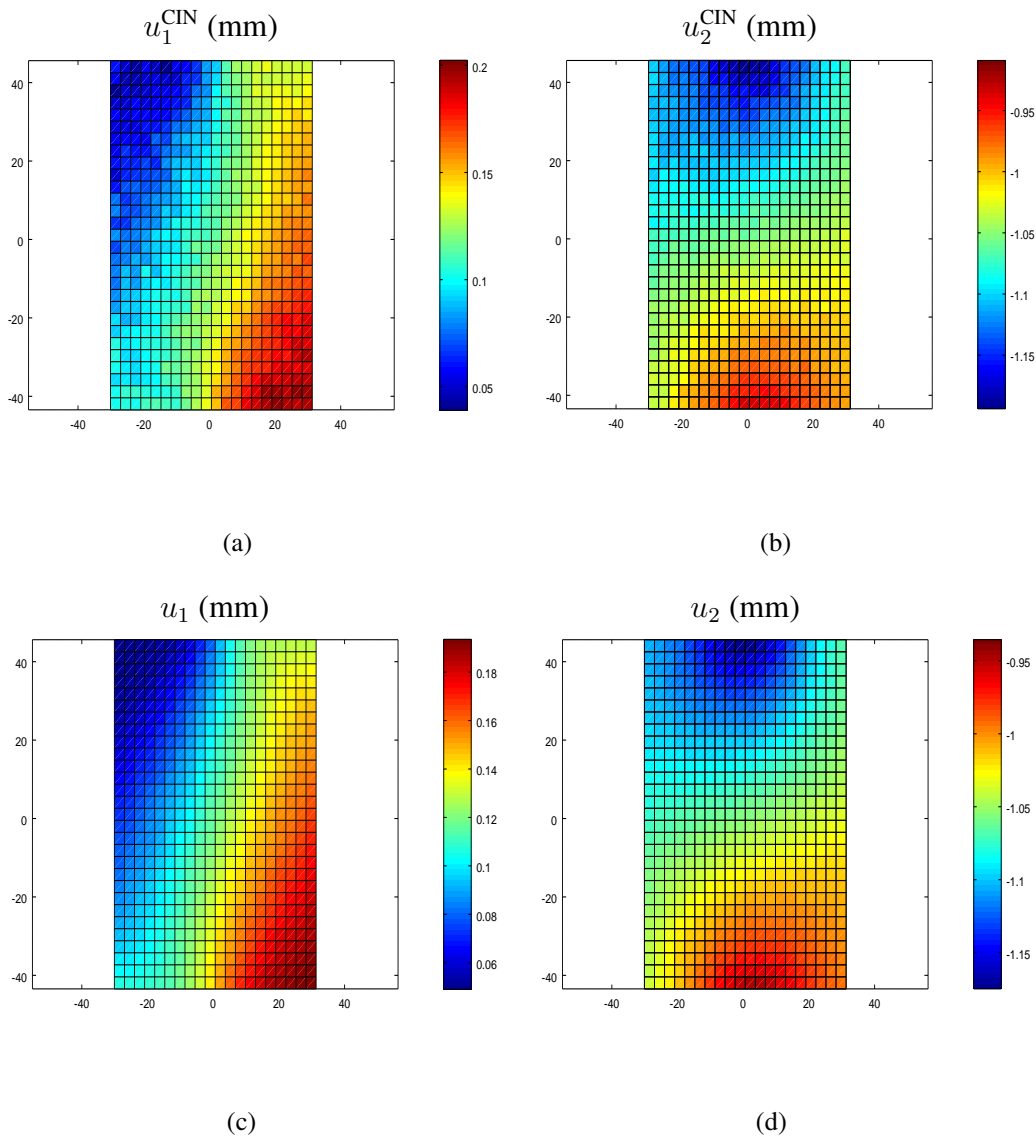


Figure 4.30 – Les composantes (a) horizontale, u_1^{CIN} et (b) verticale, u_2^{CIN} , du champ de déplacements obtenu par CIN sur Ω_d et les composantes (c) horizontale, u_1 et (d) verticale, u_2 , du champ de déplacements reconstruit sur Ω_d .

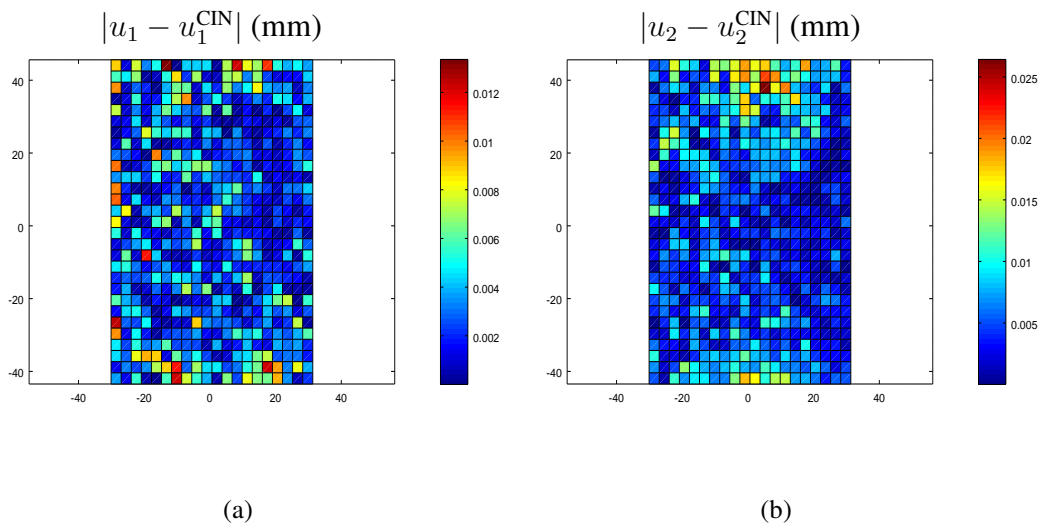


Figure 4.31 – Les composantes (a) horizontale, $|u_1 - u_1^{\text{CIN}}|$ et (b) verticale, $|u_2 - u_2^{\text{CIN}}|$, du résidu calculé sur Ω_d .

Nous nous attardons sur les cartographies de la composante verticale u_2 du champ reconstruit sur Ω_d et les résidus correspondants, pour des mesures de champ relevées à différents instants. On observe ces cartographies, sur les Figures 4.32, 4.33 et 4.34, pour des mesures issues de la CIN entre l'image 500 et les images 1500, 2500 et 3000, respectivement.

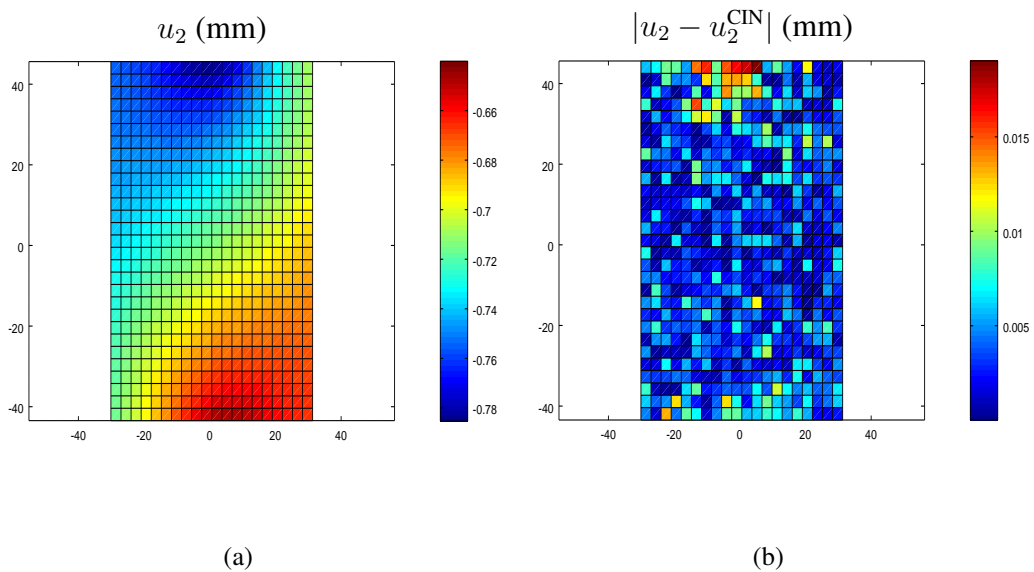


Figure 4.32 – Les composantes verticales, (a) u_2 , du champ de déplacements reconstruit sur Ω_d et (b) $|u_2 - u_2^{\text{CIN}}|$, du résidu calculé sur Ω_d , à partir de mesures issues de la CIN entre les images 500 et 1500.

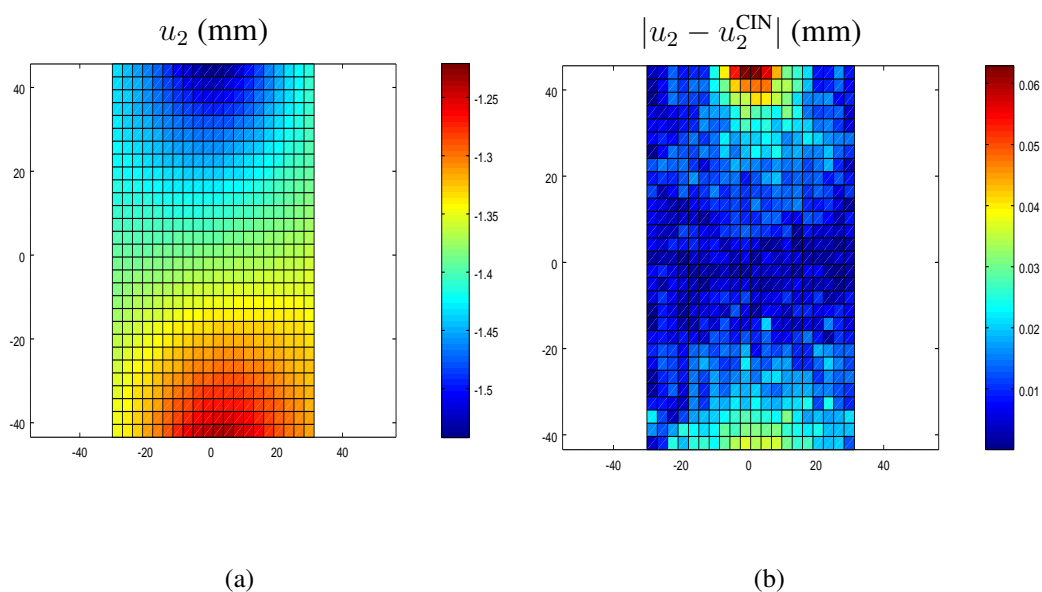


Figure 4.33 – Les composantes verticales, (a) u_2 , du champ de déplacements reconstruit sur Ω_d et (b) $|u_2 - u_2^{\text{CIN}}|$, du résidu calculé sur Ω_d , à partir de mesures issues de la CIN entre les images 500 et 2500.

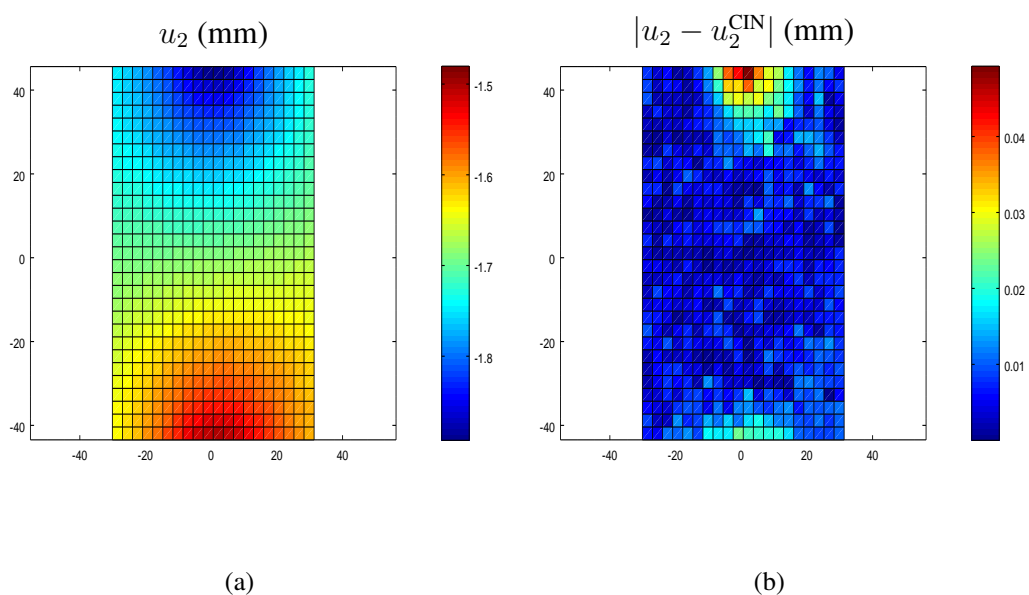


Figure 4.34 – Les composantes verticales, (a) u_2 , du champ de déplacements reconstruit sur Ω_d et (b) $|u_2 - u_2^{\text{CIN}}|$, du résidu calculé sur Ω_d , à partir de mesures issues de la CIN entre les images 500 et 3000.

On remarque que les valeurs de la composante verticale du résidu augmentent au cours de l'essai et la localisation près de la zone de contact supérieure est de plus en plus importante. On peut donner plusieurs interprétations à cette observation : un éventuel changement de comportement du matériau, vers un comportement non linéaire ou une erreur de modélisation du problème de contact.

L'évolution des quantités de contrôle J_{Ω_d} et $J_{reg.}^k$ en fonction de k est observable sur les Figures 4.35(a) et (b), respectivement, pour des mesures relevées à différents instants. Le terme de régularisation $J_{reg.}^k$ a le même comportement pour chaque situation analysée alors que le terme de relaxation J_{Ω_d} , quant à lui, ne tend pas vers la même valeur. La constante, vers laquelle le terme J_{Ω_d} tend, augmente au fil de l'essai. Cela peut signifier un changement de comportement du solide, qui ne correspond plus à celui supposé dans la modélisation, ou une augmentation du niveau de bruit.

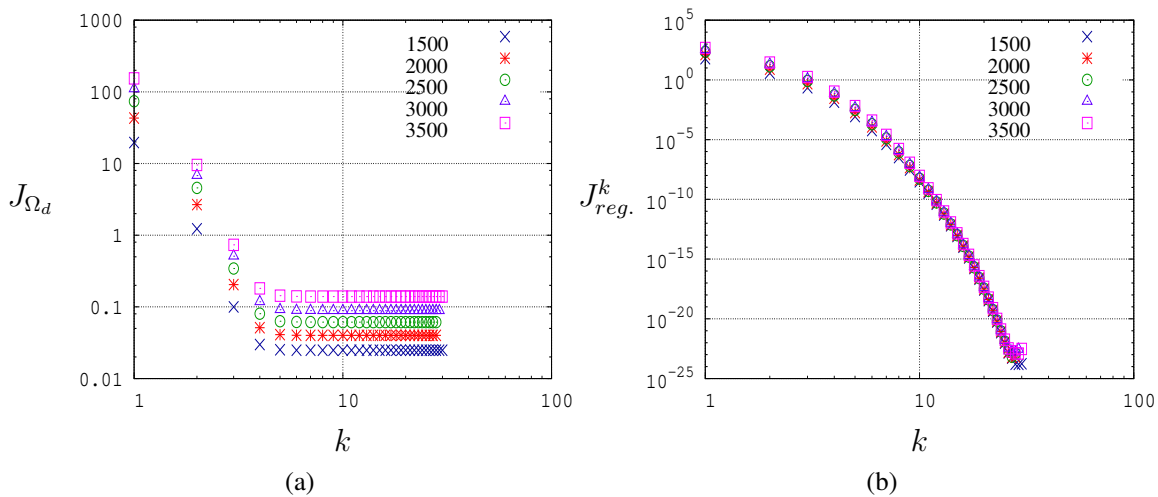


Figure 4.35 – Évolution des termes (a) J_{Ω_d} et (b) $J_{reg.}^k$, en fonction de k pour des mesures relevées à différents instants.

L'algorithme nous permet de reconstruire le champ de déplacements sur tout le domaine Ω , les composantes u_1^Ω et u_2^Ω de la solution calculée sur tout le domaine sont représentées sur les Figures 4.36(a) et (b). Nous remarquons, surtout en observant la composante horizontale u_1^Ω , que les cartographies des solutions calculées ne ressemblent pas à celles attendues pour un essai de compression diamétrale. Le champ de déplacements mesuré est composé des petits déplacements dus au caractère déformable du polyéthylène, d'un bruit de mesure et d'un déplacement de solide rigide. Nous retrouvons, avec notre approche, un champ de déplacements débruité qui est composé des déplacements déformable et rigide. Nous avons ôté a posteriori, avec une procédure d'optimisation non linéaire (Annexe B), le mouvement de

solide rigide pour obtenir le déplacement déformable. En accord avec les notations utilisées au paragraphe 4.4.1.3, nous identifions les paramètres qui caractérisent le déplacement de solide rigide : $a = 0.1212$ mm, $b = -1.0509$ mm et $\alpha = 0.0405^\circ$. Nous retrouvons le même déplacement de solide rigide que celui obtenu à partir des mesures de CIN. On observe sur les Figures 4.36(c) et (d) les composantes $u_1^{\text{def}\Omega}$ et $u_2^{\text{def}\Omega}$, respectivement, du champ de déplacements déformable calculé sur tout le disque Ω .

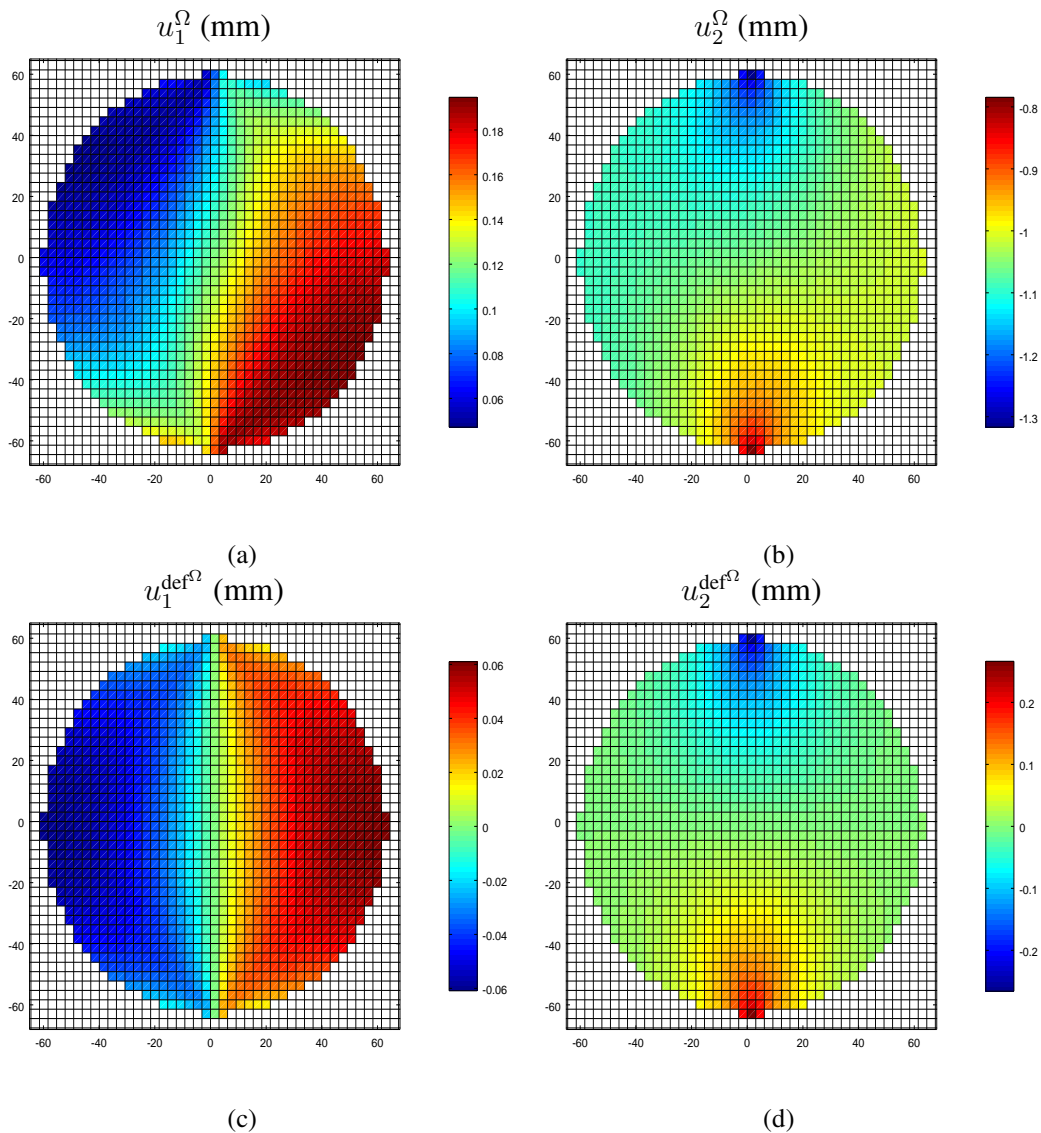


Figure 4.36 – Les composantes, (a) u_1^Ω et (b) u_2^Ω , du champ de déplacements reconstruit sur Ω et les composantes, (c) $u_1^{\text{def}\Omega}$ et (d) $u_2^{\text{def}\Omega}$, de la partie déformable du champ de déplacements retrouvé sur Ω .

Les conditions aux limites en termes de déplacements et de vecteurs contraintes sont représentées sur les Figures 4.37(a) et (b) et les Figures 4.37(c) et (d), respecti-

vement. Nous observons, sur les Figures 4.37(a) et (b), que le déplacement retrouvé le long de Γ est également constitué du déplacement déformable et du mouvement de solide rigide. Les composantes du vecteur contraintes sont nulles sur Γ_d , ce qui signifie que la condition de bord libre est vérifiée (Figures 4.37(c) et (d)).

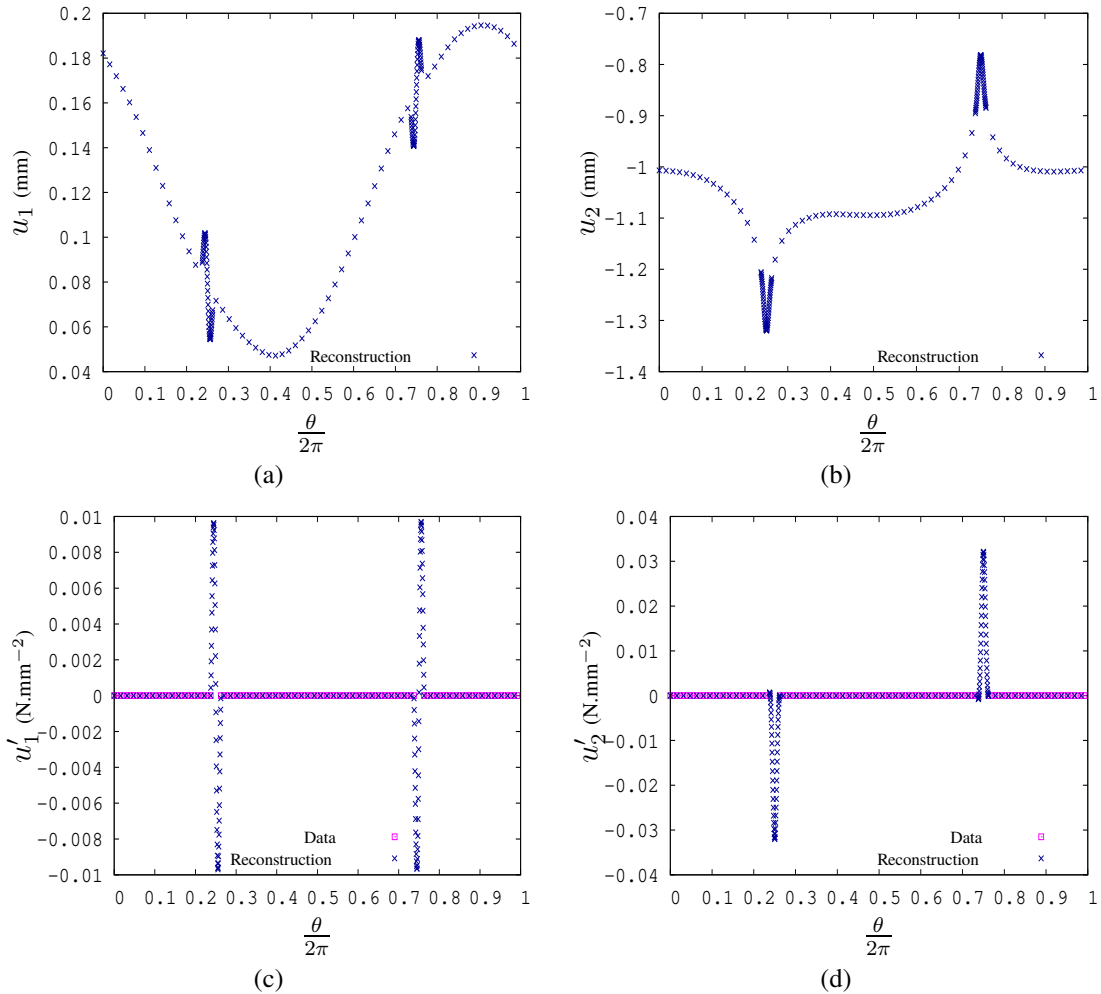


Figure 4.37 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u'_1 et (d) verticale, u'_2 , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ .

Nous connaissons désormais la distribution du chargement le long des zones de contact Γ_i . La Figure 4.37(d) nous permet d'observer la répartition de u'_2 le long de Γ et nous représentons un zoom sur la partie supérieure de Γ_i , où le chargement est appliqué, sur la Figure 4.38(a). En faisant le lien entre la répartition de u'_2 sur la zone de contact supérieure et la force appliquée sur le plateau supérieur, mesurée par le capteur d'effort de la machine, nous identifions le module de rigidité $E = 907$ MPa. Nous avons appliqué l'algorithme entre plusieurs acquisitions du champ de dépla-

cements, après une CIN entre l'image 500 et des images enregistrées à des instants différents, ce qui nous a permis de calculer l'évolution du module d'Young E en fonction de l'intensité F de l'effort appliqué. Nous traçons sur la Figure 4.38(b) le quotient $\frac{F}{Re}$ (MPa) en fonction de $\frac{F}{ERe}$ (homogène à une déformation), ce graphe peut être interprété comme la réponse macroscopique de la structure.

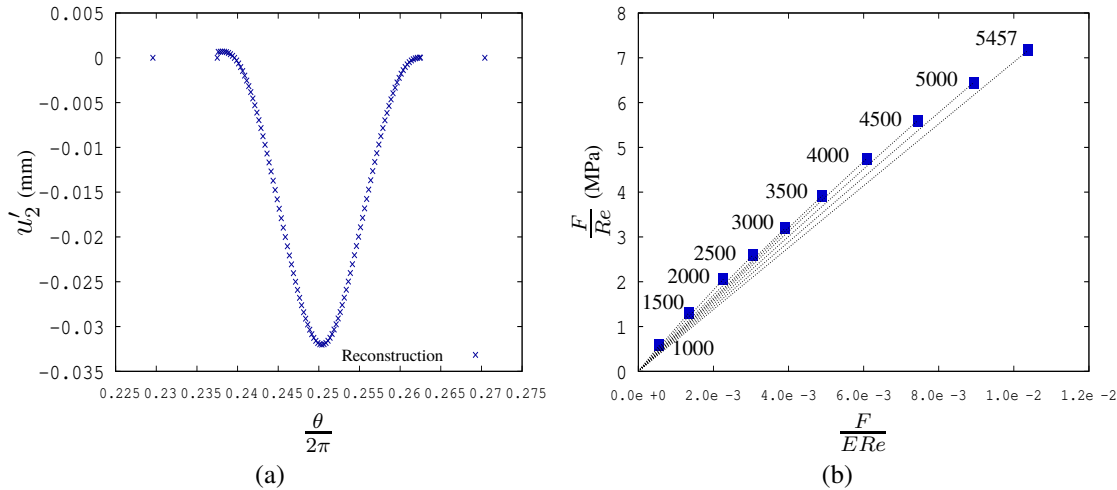


Figure 4.38 – (a) Zoom sur la composante verticale, u'_2 , du vecteur contraintes retrouvé près de la zone de contact supérieure et (b) tracé de $\frac{F}{Re}$ (MPa) en fonction de $\frac{F}{ERe}$ (homogène à une déformation), représentant la réponse macroscopique de la structure.

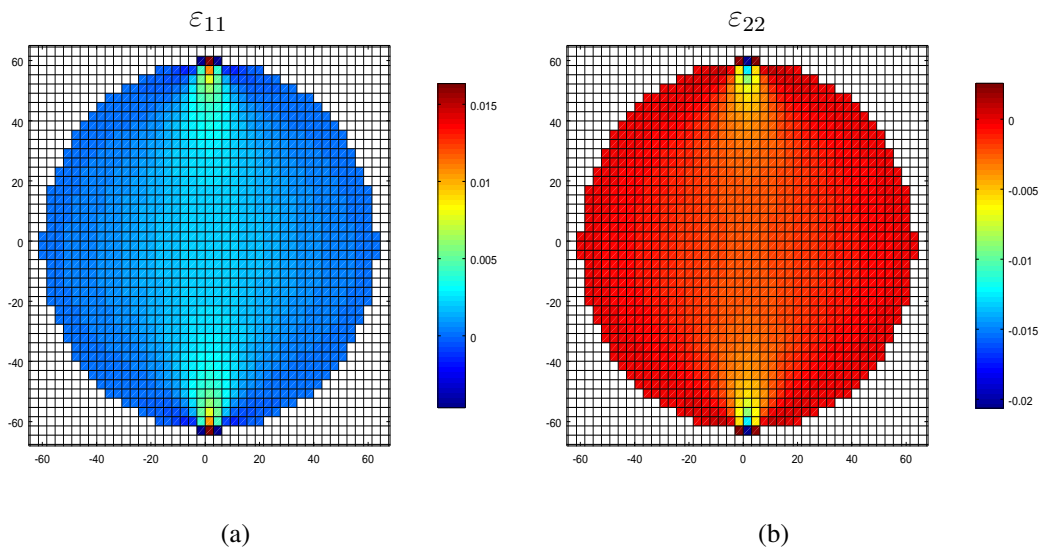


Figure 4.39 – Les composantes, (a) ε_{11} , (b) ε_{22} , du champ de déformations retrouvé sur Ω .

Grâce à l'utilisation de la méthode des solutions fondamentales, nous pouvons calculer a posteriori les déformations de manière analytique sur tout le domaine Ω . Les composantes ε_{11} , ε_{22} du champ de déformations sont représentées sur la Figure 4.39.

4.5.1.2 Essai de traction indirecte sur un matériau quasi-fragile

Nous avons montré au paragraphe précédent que l'algorithme utilisant la méthode des solutions fondamentales permet de compléter et débruiter des mesures de champs de déplacements pour un essai de compression sur un solide en polyéthylène. Nous identifions également les conditions aux limites, qui nous permettent d'identifier a posteriori le module de rigidité du matériau. Nous analysons maintenant un essai dit Brésilien où il s'agit d'un essai de traction indirecte (ou de fendage) sur une éprouvette cylindrique de béton (Figure 4.40). Contrairement au polyéthylène, le béton est un matériau dit quasi-fragile, c'est à dire qu'il s'endommage pour un niveau de déformation beaucoup plus faible que celui du polyéthylène.

Le cylindre de béton est de rayon $R = 37$ mm et d'épaisseur $e = 9$ mm et nous traitons un problème adimensionnel avec $E = 1$ N.m⁻² et $\nu = 0.2$. Nous analysons des mesures de champs sur Ω_d issues de la CIN entre les images 1 et 4953, pour lesquelles nous comptons 0.0779 millimètres par pixel. La première image peut être utilisée puisque l'éprouvette a été pré-contrainte et l'image 4953 correspond à un instant qui précède la fissuration de l'éprouvette. On enregistre pour ces mesures, un accroissement d'effort d'intensité $F = 2870$ N sur le plateau supérieur. Nous utilisons les mêmes définitions de Γ_d et Γ_i que celles du paragraphe précédent. Les vecteurs contraintes sont considérés nuls sur le bord libre Γ_d et l'extension des zones de contact Γ_i est fixée à $\beta = \frac{\pi}{12}$. Nous fixons les paramètres de la méthode des solutions fondamentales avec $N = 150$ sources uniformément réparties sur le cercle $\tilde{\Gamma}$ tel que $\tilde{\Gamma} = \left\{ \underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = d^2 \right\}$ et $d = 50.15$. Nous considérons $M_d = 120$ et $M_i = 40$ points de collocation qui décrivent Γ_d et Γ_i , respectivement. Les mesures sont effectuées en 630 points, qui décrivent Ω_d , de coordonnées (x_d, y_d) tel que -17.30 mm $< x_d < 13.87$ mm et -22.59 mm $< y_d < 22.59$ mm.

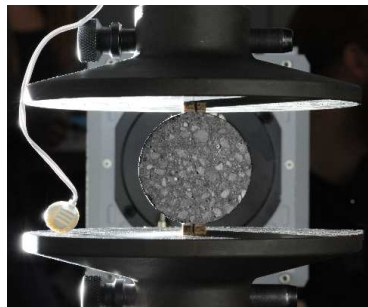


Figure 4.40 – Essai de fendage.

Nous observons sur les Figures 4.41(a), (b), (c) et (d), les composantes horizontale, u_1^{CIN} et verticale, u_2^{CIN} , du champ de déplacements obtenu par CIN entre les images 1 et 4953 et les composantes horizontale, u_1 et verticale, u_2 , du champ de déplacements reconstruit par l’algorithme, respectivement, sur Ω_d .

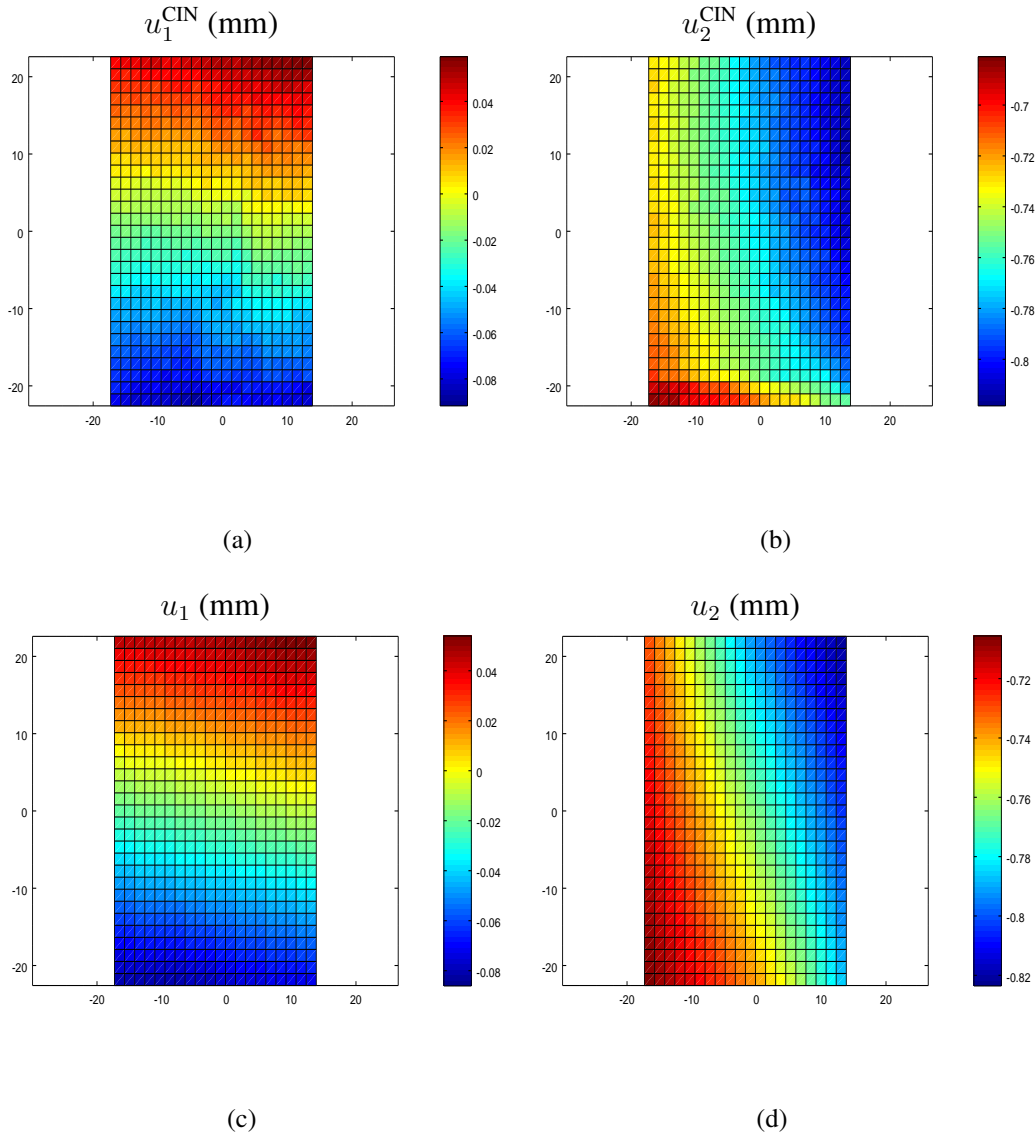


Figure 4.41 – Les composantes (a) horizontale, u_1^{CIN} et (b) verticale, u_2^{CIN} , du champ de déplacements obtenu par CIN sur Ω_d et les composantes (c) horizontale, u_1 et (d) verticale, u_2 , du champ de déplacements reconstruit sur Ω_d .

Nous observons sur la Figure 4.42 les conditions aux limites retrouvées le long de Γ . Nous remarquons, en analysant les Figures 4.42(a) et (b), que le déplacement de solide rigide est prépondérant. Nous identifions les paramètres qui le caractérisent : $a = -0.0161$ mm, $b = -0.7677$ mm et $\alpha = -0.0029^\circ$. Les composantes

horizontale et verticale du déplacement ôté du mouvement de solide rigide et retrouvé le long de Γ sont observables sur les Figures 4.43(a) et (b), respectivement. Les Figures 4.43(c) et (d) montrent les cartographies des composantes horizontale, $u_1^{\text{def.}\Omega}$, et verticale, $u_2^{\text{def.}\Omega}$, du champ de déplacements déformable, respectivement, sur tout le disque Ω . Le déplacement déformable calculé sur Ω_d est très faible, il est de l'ordre du résidu (Figure 4.46) pour la composante verticale et égal à environ 5% du déplacement calculé sur Ω_d . Il est plus important pour la composante horizontale du champ de déplacements, avec une valeur d'environ 14% du déplacement horizontal obtenu sur Ω_d .

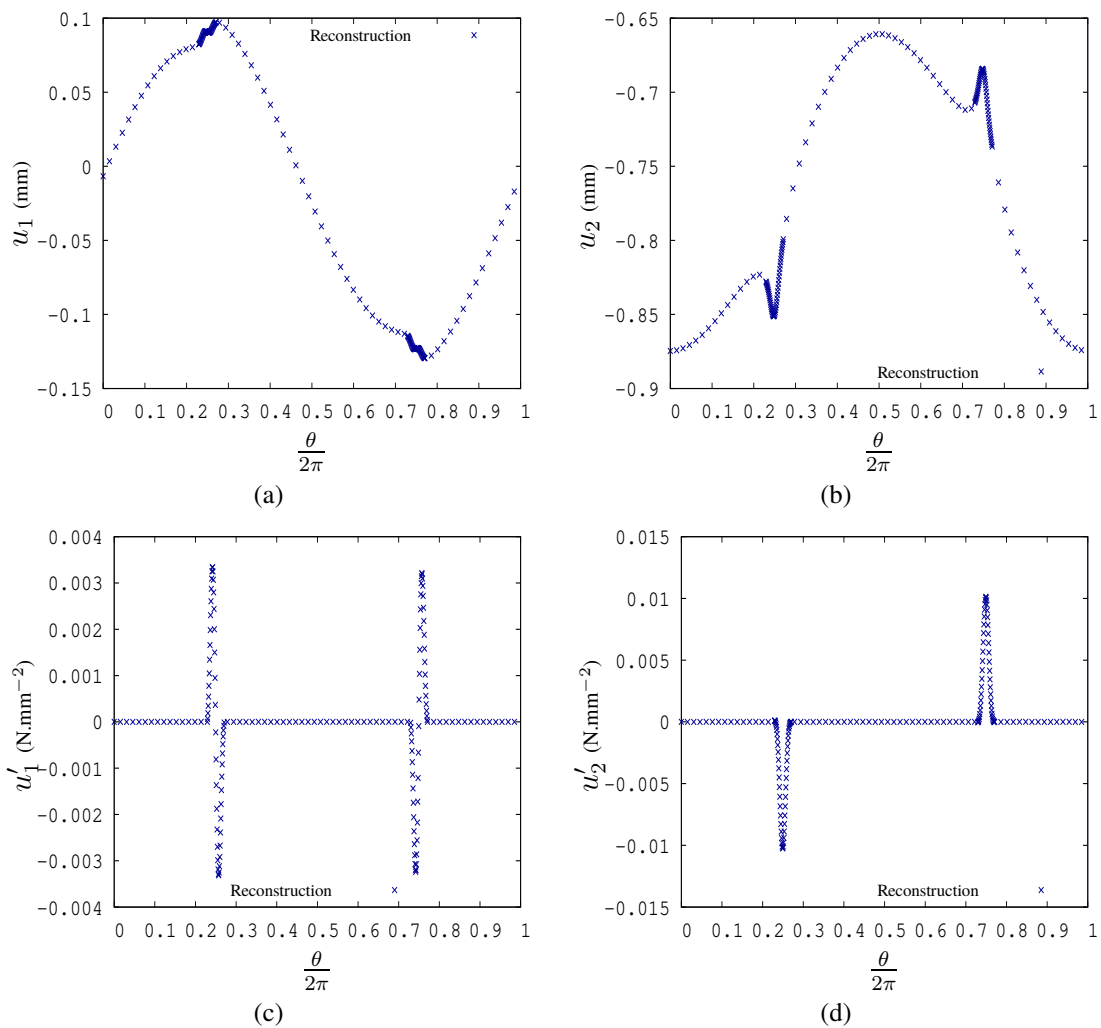


Figure 4.42 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u_1' et (d) verticale, u_2' , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ .

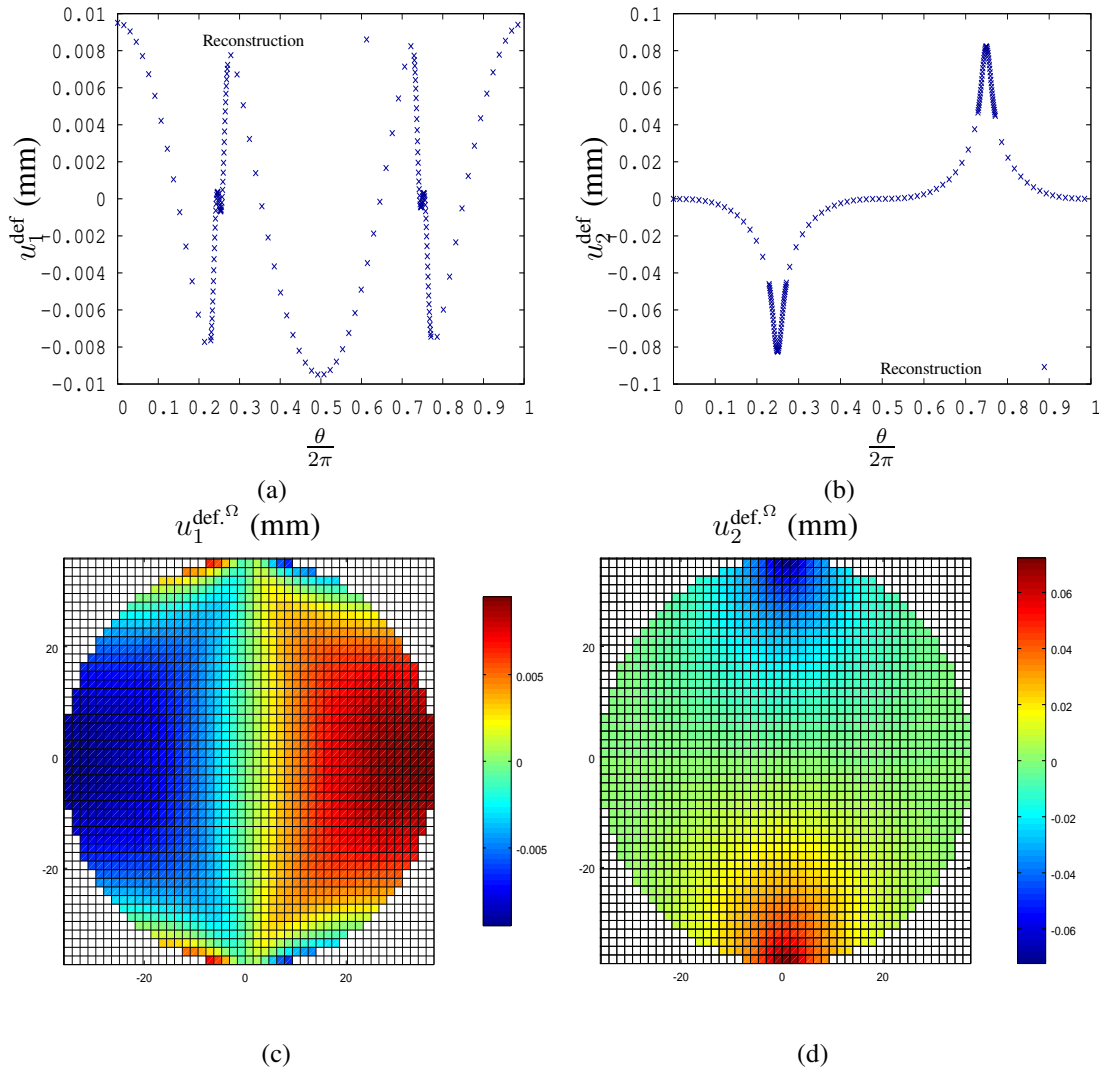


Figure 4.43 – Les conditions aux limites en terme de déplacements, retrouvées le long de Γ et ôtées du mouvement de solide rigide, (a) u_1^{def} et (b) u_2^{def} et les composantes, (c) $u_1^{\text{def}, \Omega}$ et (d) $u_2^{\text{def}, \Omega}$, du champ de déplacements déformable retrouvé sur Ω .

Bien que les déformations soient très faibles, les Figures 4.42(c) et (d) montrent la capacité de l’algorithme à reconstruire les conditions aux limites en terme de vecteur contraintes. Ce qui nous permet, de la même manière que pour l’essai sur le polyéthylène analysé au paragraphe précédent, d’identifier le module d’Young du matériau. La réponse macroscopique de la structure est tracée sur la Figure 4.44(d). Les composantes du champ de déformations calculées de manière analytique grâce aux solutions fondamentales sont représentées sur les Figures 4.44(a), (b) et (c).

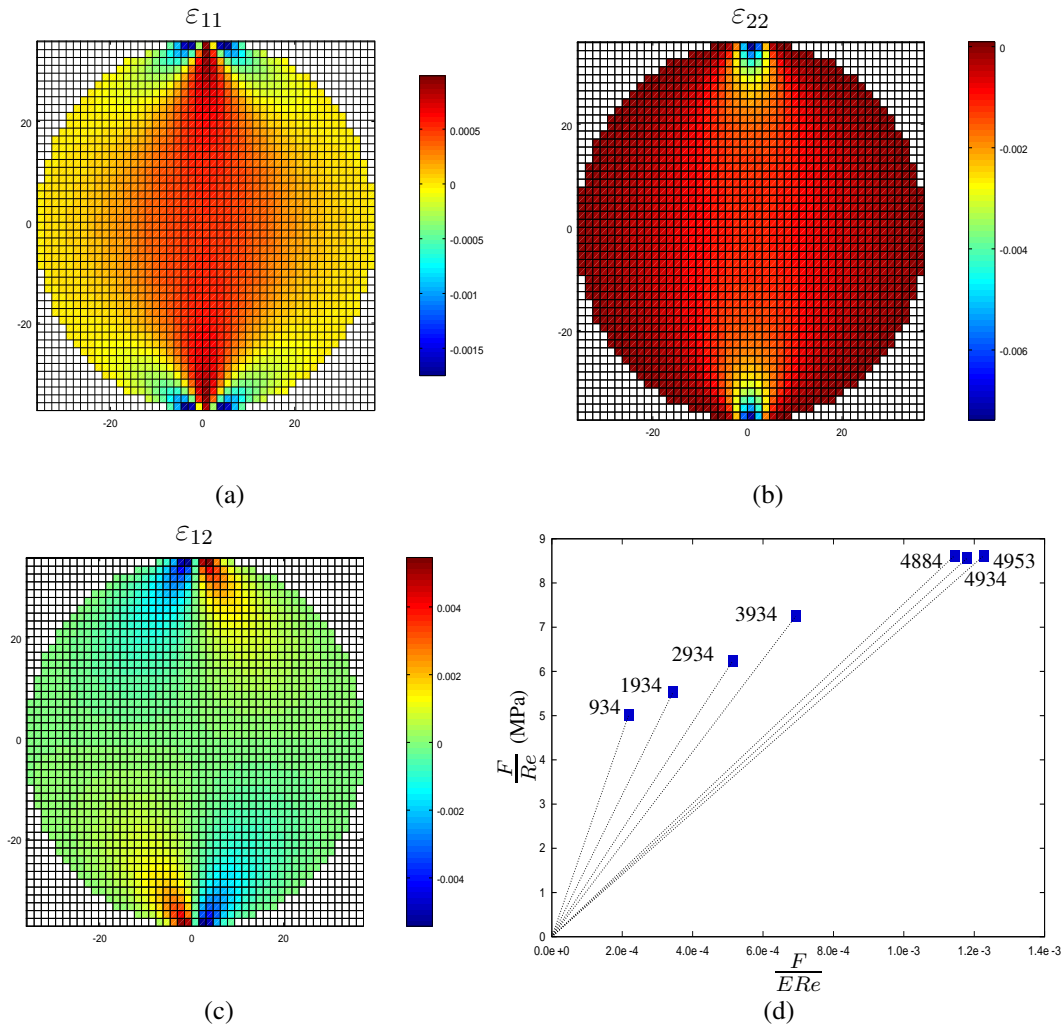


Figure 4.44 – Les composantes, (a) ε_{11} , (b) ε_{22} et (c) ε_{12} , du champ de déformations retrouvé sur Ω . (d) Tracé de $\frac{F}{Re}$ (MPa) en fonction de $\frac{F}{ERe}$ (homogène à une déformation), représentant la réponse macroscopique de la structure.

En comparant les données expérimentales et les résultats numériques, nous notons la précision des reconstructions sur Ω_d et la capacité de l'algorithme à débruiter les mesures. Nous observons sur la Figure 4.45, les composantes du résidu calculé sur Ω_d à partir d'une CIN entre les images 1 et 934. Il s'agit de mesures relevées avant que l'éprouvette soit endommagée et pour lesquelles, un accroissement d'effort $F = 1669$ N est enregistré. Les Figures 4.46(a) et (b) montrent les composantes du résidu calculé à partir d'une CIN entre les images 1 et 4953. Les valeurs du champ de déplacements et des résidus sont beaucoup plus faibles pour les mesures entre les images 1 et 934 (Figure 4.45) que celles observées pour les mesures entre les images 1 et 4953 (Figures 4.41 et 4.46). En analysant les cartographies des résidus, nous pouvons estimer le niveau de bruit mais nous remarquons surtout que les résidus sont très localisés pour les mesures entre les images 1 et 4953 (Figure 4.46)

alors qu'on ne remarque pas de localisation particulière pour les mesures entre les images 1 et 934 (Figures 4.45(c) et (d)). La composante verticale du résidu (Figure 4.46(b)) montre une concentration en bas de la zone de mesure, cela s'explique par le trait de scie qui figure sur l'éprouvette (Figure 4.47). Hormis quelques points pour lesquels le résidu correspond à des erreurs de corrélation, la composante horizontale semble se localiser au centre de la zone Ω_d (Figure 4.46(a)).

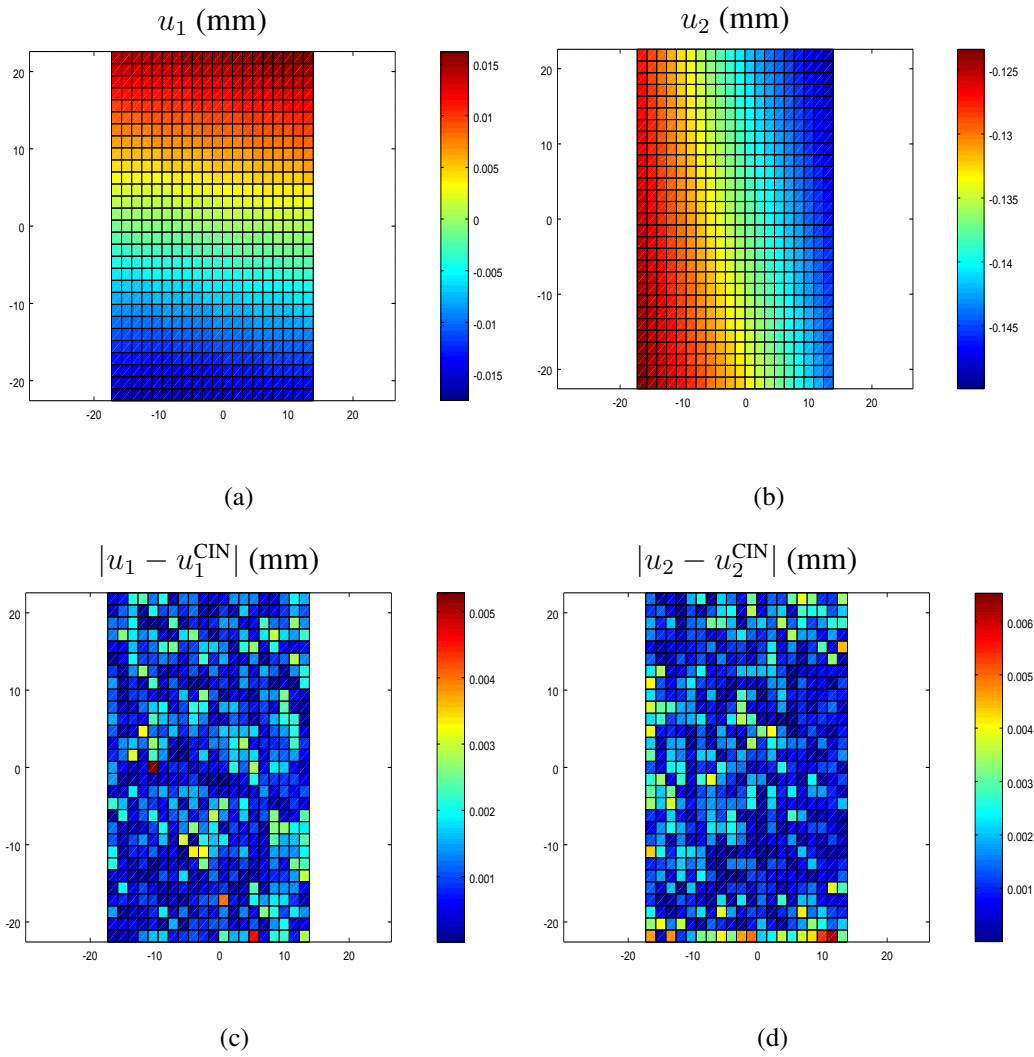


Figure 4.45 – Les composantes horizontale et verticale, du champ de déplacements reconstruit sur Ω_d (a,b) et du résidu calculé sur Ω_d (c,d), pour des mesures de CIN entre les images 1 et 934.

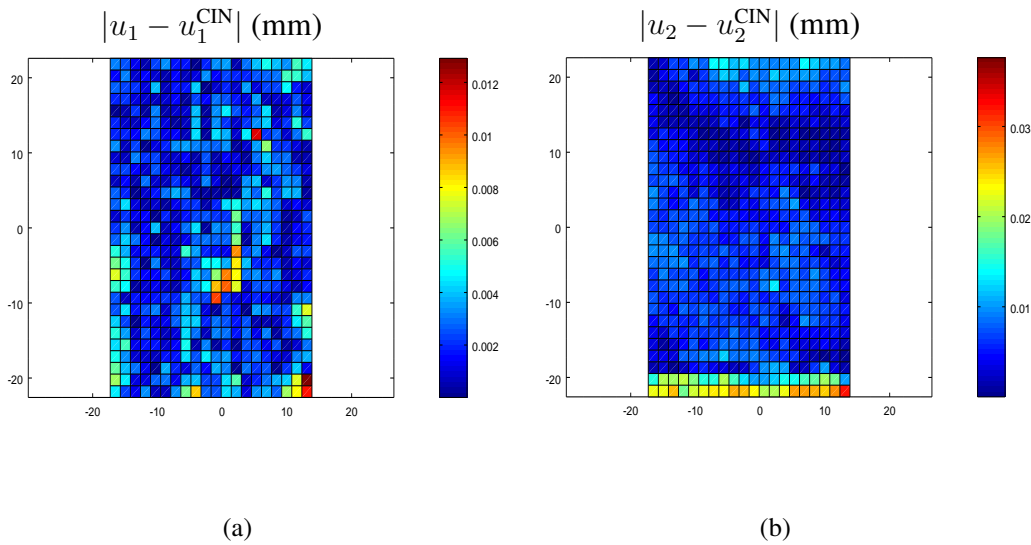


Figure 4.46 – Les composantes (a) horizontale, $|u_1 - u_1^{\text{CIN}}|$ et (b) verticale, $|u_2 - u_2^{\text{CIN}}|$, du résidu calculé sur Ω_d , pour des mesures de CIN entre les images 1 et 4953.

En superposant l’image 4953 et la cartographie de la composante horizontale du résidu (Figure 4.47(a)), la localisation du résidu peut correspondre au contournement d’un grain. En effet, la Figure 4.47(b) montre que la fissure contourne ce grain central. De plus, pour ce type d’essai, la fissure est initiée au centre de l’éprouvette, ce qui explique pourquoi les premières localisations du résidu apparaissent au centre du disque.

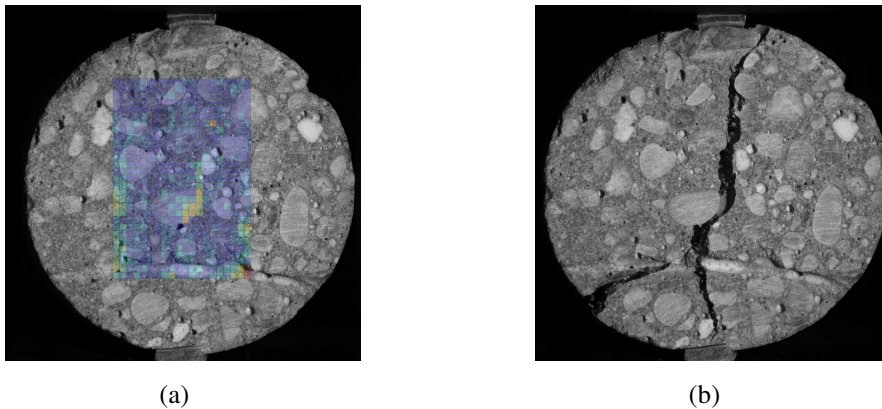


Figure 4.47 – (a) Superposition de l’image 4953 et du résidu $|u_1^{\Omega_d} - u_1^{\text{CIN}}|$ correspondant. (b) Image 4954 représentant l’éprouvette fissurée.

Nous traçons sur la Figure 4.48, pour des mesures relevées à différents instants, l’évolution du terme de relaxation J_{Ω_d} en fonction de $\frac{k}{c}$. Nous remarquons une augmentation au fil de l’essai de la constante vers laquelle le terme J_{Ω_d} tend. La valeur

de la différence entre les constantes obtenues pour des mesures entre les images 1 et 2934 et les images 1 et 3934 est la plus importante (environ 0.017). Cette valeur est deux fois plus élevée que celle obtenue en faisant la différence des constantes calculées pour des mesures entre les images 1 et 1934 et les images 1 et 2934 (environ 0.009). Nous supposons que cette augmentation remarquable traduit l'endommagement de l'éprouvette par la présence de la fissure bien qu'elle soit encore invisible à l'image 3934.

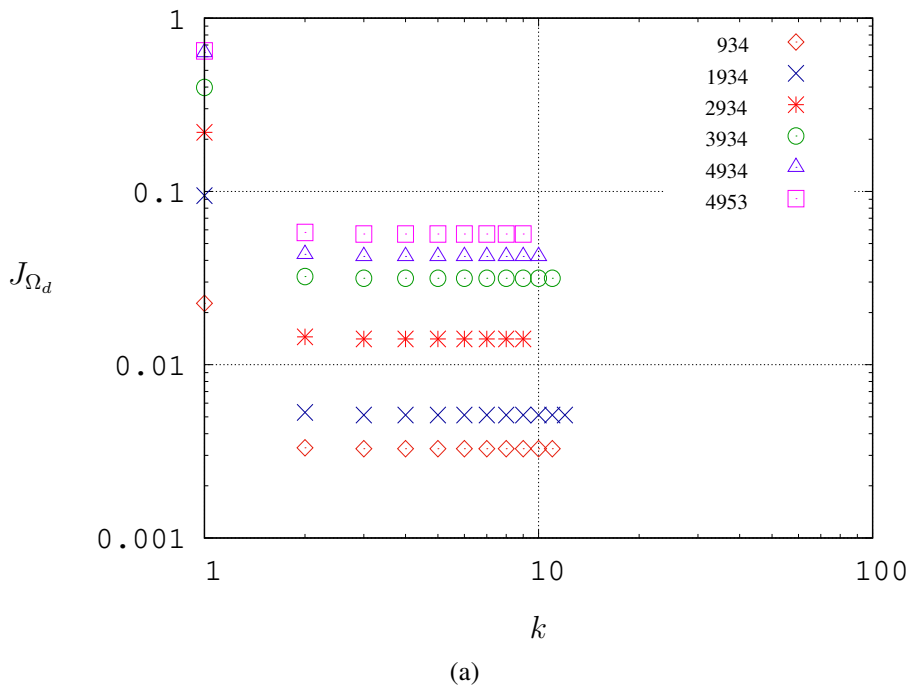


Figure 4.48 – Évolution du terme de relaxation J_{Ω_d} en fonction de k pour des mesures relevées à différents instants.

4.5.2 Conclusions sur l'application de la méthode à des situations réelles

Nous nous sommes intéressés à des essais de compression diamétrale sur des éprouvettes en polyéthylène et en béton. L'étude préliminaire sur un cylindre en polyéthylène est justifiée pour le niveau de déformation du matériau, qui est supérieur à celui du béton. L'application de l'algorithme utilisant la méthode des solutions fondamentales nous a permis de reconstruire les champs de déplacements sur tout le domaine. Le champ de déplacements reconstruit est composé du déplacement déformable et d'un déplacement de solide rigide qui est prépondérant. Le déplacement de solide rigide peut être ôté a posteriori du champ de déplacements calculé afin de retrouver la partie déformable du champ de déplacements.

En analysant les résidus calculés, nous pouvons estimer le niveau de bruit et nous supposons que le résidu est composé d'une composante de bruit, d'erreurs de corrélation et d'erreurs de modèle. En effet, dans les deux cas, nous observons une localisation du résidu, près de la zone de contact supérieure dans le cas du polyéthylène et au centre de l'éprouvette dans le cas du béton. Ces valeurs importantes du résidu peuvent traduire un changement de comportement du matériau et/ou une erreur de modélisation. Il est possible que cette localisation corresponde, dans le cas du polyéthylène, à la plastification du matériau près de la zone contact et, dans le cas du béton, à l'endommagement puis à la fissuration. Cela peut être interprété comme une erreur de modèle puisque l'éprouvette s'endommageant, le champ de déplacement mesuré ne correspond plus à la loi de comportement supposée, alors que la méthode permet de trouver une solution élastique linéaire isotrope qui vérifie exactement l'équilibre et qui s'approche au mieux des données.

L'algorithme permet également d'identifier les conditions aux limites inaccessibles à la mesure. Nous retrouvons la distribution des vecteurs contraintes au niveau de la zone de contact, ce qui nous permet d'identifier un module de rigidité équivalent du matériau et de donner une réponse macroscopique de la structure.

4.6 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté la généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles. La mise en œuvre numérique de l'approche proposée a été réalisée en utilisant les méthodes des solutions fondamentales et des éléments finis et les reconstructions numériques des données manquantes et des conditions aux limites, obtenues par ces deux méthodes, ont été étudiées. Les approches proposées permettent de reconstruire de manière précise le champ de déplacements sur tout le domaine ainsi que les conditions aux limites en termes de déplacements et de vecteurs contraintes le long de toute la frontière à partir de données partielles et bruitées.

Des simulations numériques ont prouvé la stabilité des algorithmes par rapport au bruit sur les données et leur capacité à débruiter le champ de déplacements donné sur un sous-domaine. Les résultats numériques obtenus sont indépendants du coefficient de régularisation c et peu sensibles à la taille de la grille de données. Les deux méthodes permettent de reconstruire des conditions aux limites sur une frontière qui présente des discontinuités du vecteur normal, on remarque cependant que les erreurs commises sont localisées près des coins du domaine. Dans le cas d'une modélisation par éléments finis, les éléments de type QUA8 donnent de meilleurs résultats que les éléments de type QUA4.

Des mesures réelles de champ de déplacements ont ensuite été exploitées. Nous

avons étudié les reconstructions numériques des champs de déplacements sur toute la surface des solides et des conditions aux limites sur toute la frontière. La méthode de régularisation évanescence implémentée grâce à la méthode des solutions fondamentales a été utilisée. L'étude d'essais de compression diamétrale sur des éprouvettes en polyéthylène et en béton a prouvé la précision et la stabilité de l'algorithme par rapport à un bruit de mesure expérimental. Nous avons remarqué, en nous attardant sur les cartographies des résidus de déplacements, des valeurs importantes de ces derniers, près de la zone de contact supérieure pour le polyéthylène et au centre de l'éprouvette pour le béton. Nous interprétons ces localisations des résidus comme des changements de comportement des matériau ou/et des erreurs de modélisation. La reconstruction des conditions aux limites inaccessibles à la mesure, et notamment de la distribution des vecteurs contraintes sur la zone de contact, permet d'identifier un module de rigidité équivalent du matériau et de donner une réponse macroscopique de la structure.

Il a été montré que l'approche proposée permet de traiter des données (numériques ou mesurées) partielles perturbées par un mouvement de solide rigide. Le déplacement de solide rigide est calculé a posteriori grâce à une procédure d'optimisation non linéaire et on en déduit la composante déformable du champ de déplacements sur tout le domaine. Grâce à l'utilisation de la méthode des solutions fondamentales, nous calculons de manière analytique le champ de déformations sur tout le domaine.

Conclusion de la partie II

Le développement récent des caméras numériques et du traitement d'images avancé rendent les techniques de mesures optiques très attrayantes. Dans cette partie, nous nous sommes intéressés aux mesures de champs issues de corrélation d'images numériques. Actuellement très exploitées dans le cadre de l'identification de propriétés matérielles, nous avons présenté plusieurs stratégies d'identification à partir de données de champs cinématiques. Toutes ces méthodes connaissent des limites lorsque les données sont issues d'expériences réelles. En effet, les mesures sont bruitées et les conditions aux limites sont souvent incomplètes. Nous avons alors proposé la généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles, avec pour objectifs principaux d'identifier les conditions aux limites manquantes et de compléter et débruiter les champs cinématiques partiels. La méthode des solutions fondamentales et la méthode des éléments finis sont utilisées pour discrétiser le processus itératif. La validation des algorithmes avec deux exemples numériques (le deuxième exemple est en annexe C) souligne la précision et la stabilité de l'approche proposée ainsi que sa capacité à débruiter les données. La méthode permet de reconstruire les conditions aux limites avec, cependant, quelques imprécisions près des singularités géométriques du bord du domaine.

L'approche développée a été appliquée à des mesures réelles pour des essais de compression diamétrale sur des cylindres en polyéthylène et en béton. L'étude des essais confirme la précision et la stabilité de la méthode ainsi que sa capacité à débruiter des données réelles issues de CIN. Nous nous sommes attardés sur l'étude des résidus des déplacements calculés. Ces derniers permettent d'estimer le niveau de bruit et de détecter un éventuel changement de comportement du matériau. Pour les deux essais, nous remarquons une localisation du résidu, significative d'une erreur de modèle. En effet, la solution recherchée par la méthode de régularisation évanescence vérifie exactement l'équilibre, avec une loi de comportement homogène supposée élastique linéaire et isotrope, alors que le champ de déplacements mesuré tient compte du changement de comportement du matériau.

Les conditions aux limites inaccessibles à la mesure sont également reconstruites le long du bord du solide. La distribution des vecteurs contraintes le long de la zone de contact, où est appliqué le chargement, permet d'identifier un module de rigidité

équivalent du matériau et de donner une réponse macroscopique de la structure, qui correspondent aux champs de déplacements homogènes calculés.

Conclusion générale et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons porté notre intérêt à la résolution de problèmes de complétion de données par la méthode de régularisation évanescence.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés aux problèmes de type Cauchy et plus particulièrement, à celui associé à l'équation d'Helmholtz. Bien connu pour son caractère mal posé, nous avons résolu ce problème avec la méthode de régularisation évanescence. Initialement introduite pour résoudre le problème modèle de Cauchy associé à l'équation de Laplace, la méthode de régularisation évanescence est originale par le fait que nous recherchons une solution de l'équation d'équilibre qui s'approche au mieux des conditions aux limites disponibles. Le problème de Cauchy est remplacé par une suite de problèmes d'optimisation et la solution calculée ne dépend pas d'un coefficient de régularisation.

La méthode inverse a été implémentée avec une nouvelle méthode numérique, la méthode des solutions fondamentales. Cette méthode, sans maillage, permet de rechercher la solution de notre problème dans une base de solutions exactes de l'équation d'Helmholtz. Des simulations numériques ont montré la capacité de l'algorithme à reconstruire les conditions aux limites en tout point de la frontière. Il a cependant été noté que les reconstructions dans le cas d'un domaine à singularités géométriques sont moins précises que celles obtenues dans le cas d'un domaine régulier. La méthode de régularisation évanescence a ensuite été étendue à la résolution de problèmes tridimensionnels, les résultats numériques montrent un comportement similaire du processus itératif à celui observé en dimension deux. Toutes les simulations numériques soulignent la robustesse de la méthode vis à vis du bruit sur les données, qui sont recalculées et de ce fait débruitées. Les reconstructions sont indépendantes du paramètre de régularisation mais les paramètres de la méthode des solutions fondamentales influencent la qualité des reconstructions. La méthode des solutions fondamentales est peu utilisée du fait qu'elle génère un système d'équations mal conditionné. La méthode de régularisation évanescence pourrait alors également être utilisée pour régulariser la discrétisation par la méthode des solutions fondamentales de problèmes directs de conditions aux limites, de type Neumann, Dirichlet ou mixtes. La difficulté de la mise en œuvre numérique de l'algorithme, avec la méthode des solutions fondamentales, réside dans le choix des paramètres

de la méthode sans maillage, tels que la position et surtout le nombre de sources.

La méthode de régularisation évanescence a ensuite été étendue à la résolution de problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles. Les mesures de champs sont actuellement surtout exploitées dans le cadre de l'identification de propriétés matérielles. Les techniques d'identification existantes sont cependant limitées lorsque les données de champs sont des mesures réelles. En effet, la mise en place des essais, les dispositifs expérimentaux et le processus de corrélation d'images numériques entachent d'erreurs les mesures, qui sont parfois partielles et les perturbent également avec l'ajout d'un déplacement de solide rigide, parfois prépondérant. De plus, les conditions aux limites sont souvent inaccessibles à la mesure au moins sur une partie de la frontière. Nous avons proposé une approche qui permet de compléter et de débruiter les mesures de champs cinématiques partielles et d'identifier les conditions aux limites en tout point de la frontière, tout en s'affranchissant du mouvement de solide rigide.

L'algorithme a été implémenté avec la méthode des éléments finis et la méthode des solutions fondamentales. Les résultats obtenus pour des exemples numériques de compression (uniforme et non uniforme) d'un solide rectangulaire ont mis en évidence la précision et la stabilité de l'approche développée, ainsi que sa capacité à débruiter les données. Les imprécisions notables concernent la reconstruction des vecteurs contraintes près des coins du domaine. Il a été noté que, dans le cas d'une discrétisation par éléments finis, l'utilisation d'éléments de type QUA8 permet d'obtenir des résultats plus précis que ceux obtenus avec des éléments de type QUA4.

Des essais de compression diamétrale ont ensuite été analysés. Nous retrouvons des reconstructions précises et un débruitage efficace des mesures de champs partielles, en utilisant la méthode des solutions fondamentales. Nous nous sommes attardés sur l'étude des résidus des déplacements calculés. Ils permettent d'estimer le niveau de bruit des mesures mais également de détecter des erreurs de modèle. L'application de la méthode de régularisation évanescence, qui recherche une solution élastique linéaire et isotrope qui vérifie exactement l'équilibre et qui s'approche au mieux des données, fait apparaître une localisation du résidu. Cette concentration peut être interprétée comme l'écart à la loi de comportement engendré par la plastification (polyéthylène) ou la fissuration (béton) de l'éprouvette. Nous avons montré que la reconstruction de la distribution des contraintes le long de la zone où est appliqué le chargement permet d'obtenir un module de rigidité équivalent du matériau. Les modules identifiés à différents instants de l'essai nous autorisent à donner seulement une réponse macroscopique de la structure puisque la loi de comportement postulée est celle d'un matériau homogène.

Concernant les problèmes de complétion de données de type Cauchy, ces tra-

vaux de thèse ont permis d'implémenter la méthode de régularisation évanescence avec une nouvelle méthode numérique, d'étendre la méthode inverse aux problèmes gouvernés par l'équation d'Helmholtz et de résoudre, pour la première fois, un problème tridimensionnel. Ces problèmes sont rencontrés dans le domaine médical et en acoustique, ces travaux numériques, qui ont prouvé la robustesse de la méthode par rapport au bruit sur les données, pourraient alors être appliqués, par exemple, à des mesures réelles en acoustique stationnaire ou thermique. La qualité des résultats obtenus pour une solution à valeurs singulières nous amène à penser à des problèmes réels d'identification de sources (microphone, point chaud, tumeur,...). Le réglage des paramètres (position des sources essentiellement) de la méthode des solutions fondamentales est la plus grande difficulté qui a été rencontrée lors de la mise en œuvre numérique de l'algorithme.

La généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion à partir de données partielles nous a menés vers une première application de la méthode inverse à des données issues d'expérimentations réelles. L'approche développée, qui permet de reconstruire les conditions aux limites et de compléter et débruiter les champs partiels mesurés, pourrait être couplée aux méthodes d'identification de propriétés matérielles qui nécessitent la connaissance du champ de déplacements sur tout le domaine et/ou les conditions aux limites en tout point de la frontière. L'analyse des résidus des déplacements est une piste d'amélioration de nos travaux avec, par exemple, la modification du modèle de comportement au fur et à mesure de l'essai (endommagement, plasticité). Afin d'analyser des essais sur des matériaux hétérogènes, nous pourrions travailler sur la mise à jour du modèle de comportement dans le but d'identifier des modules de rigidité du matériau par zone, nous serions ainsi plus à même d'en apprécier ses caractéristiques mécaniques.

Annexe A

**Résultats numériques obtenus pour
une solution régulière du problème
de Cauchy associé à l'équation
d'Helmholtz tridimensionnelle**

Dans cette annexe, nous nous intéressons au problème de Cauchy associé à l'équation d'Helmholtz tridimensionnelle. Nous présentons des résultats numériques complémentaires à ceux présentés au paragraphe 2.5. Semblables à ceux présentés dans le cas bidimensionnel, nous analysons les résultats numériques obtenus pour une solution régulière sur un domaine cubique (Figure 2.18).

On considère dans un premier temps le cas où les données ϕ_d et ψ_d ne sont pas bruitées. L'évolution des termes de contrôle J_{Γ_d} , J_{Γ}^k et J^k et des erreurs relatives $(u_{\text{erreur}})^2$ et $(u'_{\text{erreur}})^2$ en fonction du nombre d'itérations k pour $c = 10^{-5}$ est observable sur la Figure A.1. Toutes les quantités deviennent constantes à partir de l'itération optimale $k_{\text{opt}} = 31$ à laquelle le processus itératif est arrêté. On rappelle que l'algorithme s'arrête dès que le terme de régularisation J_{Γ}^k augmente. Ce dernier devient négligeable devant le terme de relaxation J_{Γ_d} et tend vers zéro, ce qui prouve que l'algorithme converge dans le cas tridimensionnel. On constate, comme dans le cas bidimensionnel, que l'erreur u'_{erreur} commise sur la dérivée normale est plus grande que celle commise sur la solution (u_{erreur}).

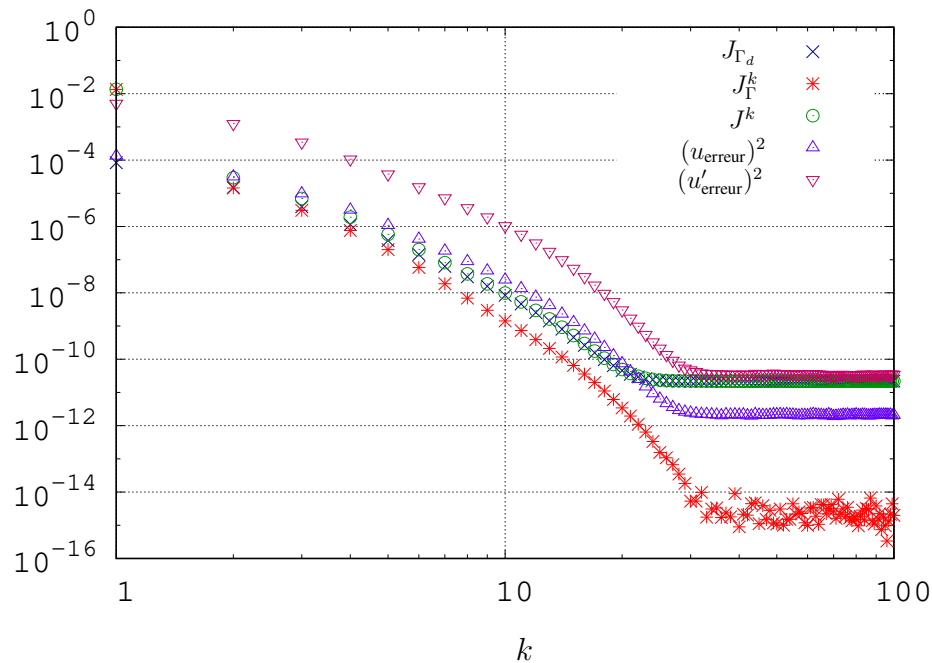


Figure A.1 – Évolution des quantités de contrôle en fonction du nombre d'itérations k pour $c = 10^{-5}$.

Influence du coefficient de régularisation c

Il est nécessaire d'étudier l'influence du coefficient de régularisation c sur les reconstructions dans le cas tridimensionnel. Les Figures A.2 et A.3 représentent les solutions analytique et numérique ainsi que leurs dérivées respectives sur les segments S_{front} et S_{max} , respectivement pour quatre valeurs de c . Les reconstructions

numériques de la solution et sa dérivée normale sont très précises, quelle que soit la valeur de c , que ce soit sur un segment appartenant à Γ_d (S_{front}) ou à Γ_i (S_{max}). On observe sur les Figures A.4(c) et A.4(d) qu'en effet les erreurs relatives $(u_{\text{erreur}})^2$ et $(u'_{\text{erreur}})^2$ tendent vers zéro quel que soit le choix de c (voir également Tableau A.1). Les termes de la fonctionnelle se comportent de la même manière qu'en dimension 2 (Figures A.4(a) et (b)) et le choix de c affecte uniquement le nombre d'itérations requis pour converger.

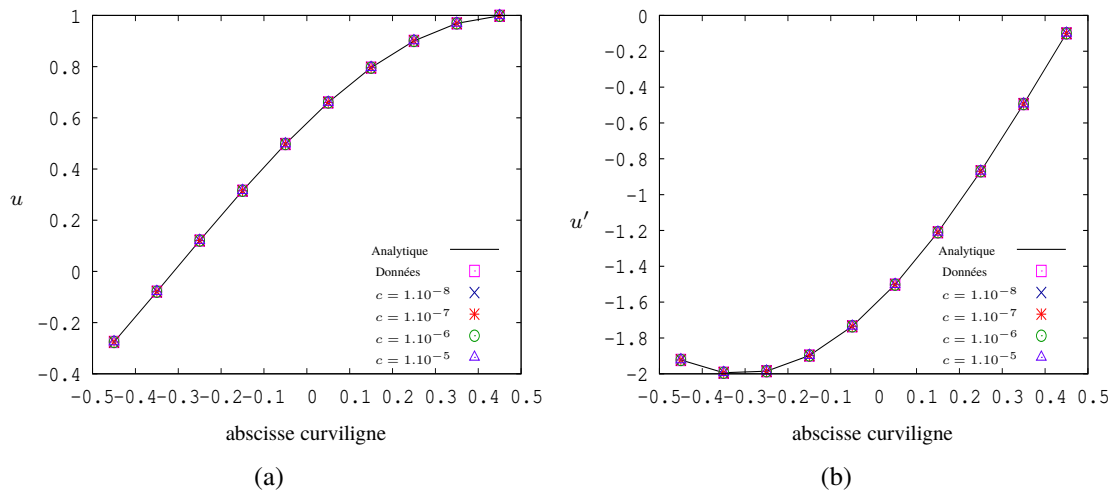


Figure A.2 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur le segment S_{front} pour différentes valeurs de c .

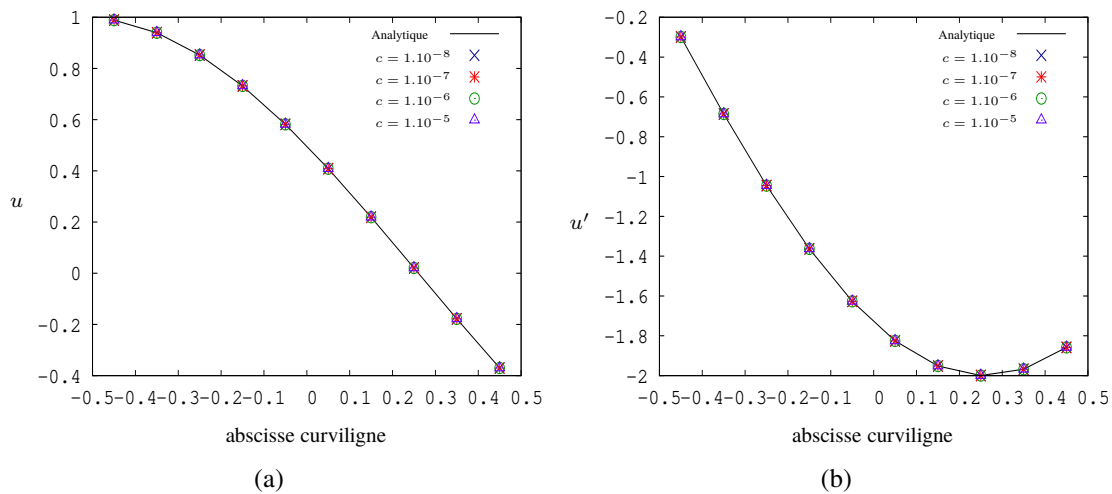


Figure A.3 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur le segment S_{max} pour différentes valeurs de c .

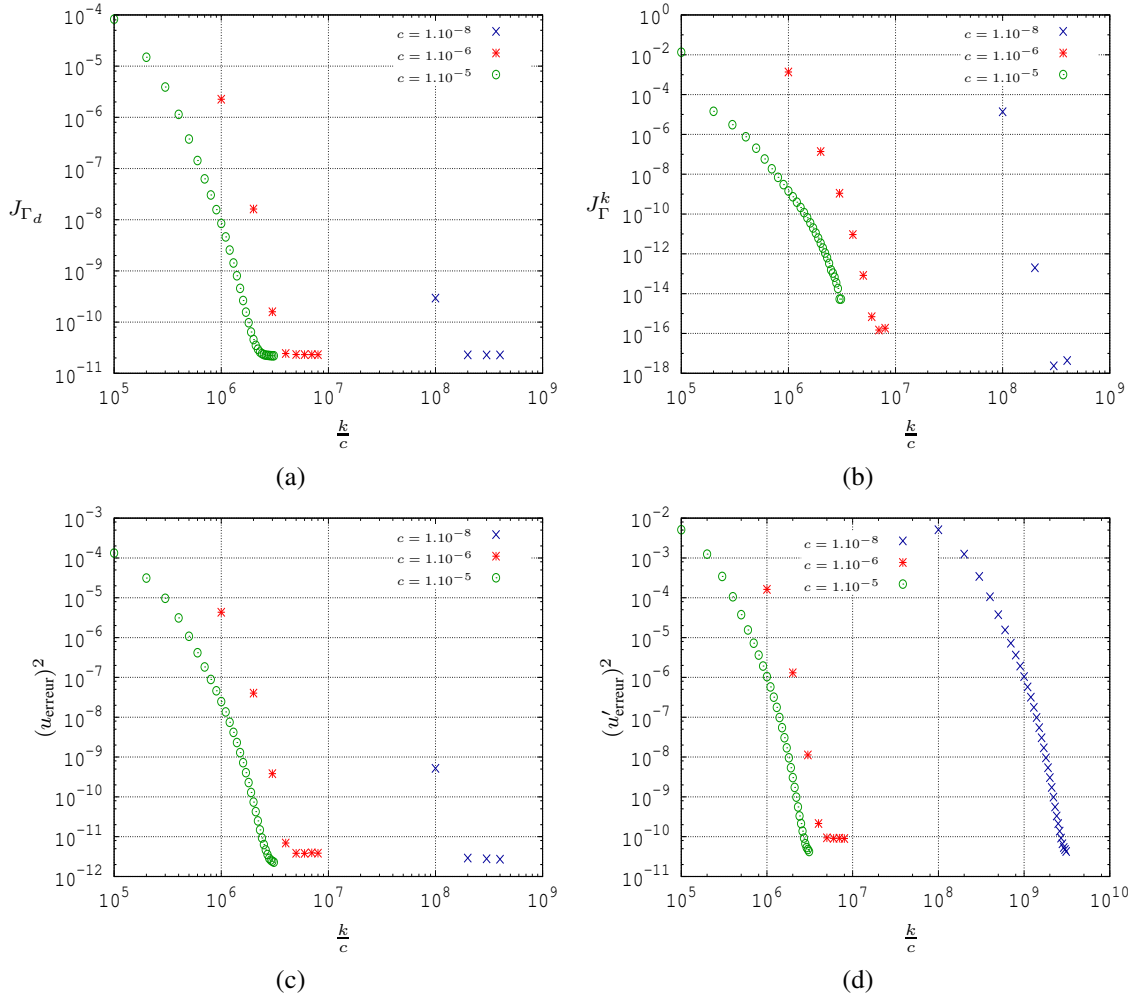


Figure A.4 – Évolution des normes (a) J_{Γ_d} et (b) J_{Γ} et des erreurs relatives (c) $(u_{\text{erreur}})^2$ et (d) $(u'_{\text{erreur}})^2$ en fonction de $\frac{k}{c}$ pour différentes valeurs de c .

c	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
10^{-8}	4	1.65×10^{-4}	7.78×10^{-4}
10^{-7}	5	1.65×10^{-4}	7.87×10^{-4}
10^{-6}	8	1.96×10^{-4}	9.49×10^{-4}
10^{-5}	31	1.68×10^{-4}	6.52×10^{-4}

Tableau A.1 – Influence du coefficient de régularisation c sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} .

Reconstructions dans le cas de données bruitées

Nous considérons désormais le cas où les données ϕ_d et ψ_d sont bruitées et définies par la relation (2.22). Le nombre de sources N doit être ajusté à $N = 54$ sources,

c'est à dire que l'on utilise moins de sources que dans le cas de données exactes. Elles sont distribuées uniformément sur les faces du cube $\tilde{\Omega}$, de manière à ce que chacune d'entre elles supportent 3×3 sources.

La Figure A.5 et le Tableau A.2 nous permettent de tirer les mêmes conclusions que dans le cas bidimensionnel :

- à niveau de bruit fixé, le terme de relaxation J_{Γ_d} tend vers la même valeur quelle que soit la valeur de c et le terme de régularisation J_{Γ}^k tend vers zéro,
- les erreurs relatives u_{erreur} et u'_{erreur} évoluent de manière linéaire avec le niveau de bruit δ ,
- à niveau de bruit fixé, les erreurs relatives u_{erreur} et u'_{erreur} sont identiques pour les différentes valeurs de c , ce qui confirme que l'algorithme converge vers la même solution quelle que soit c ,
- le coefficient de régularisation c joue un rôle d'accélérateur de convergence,
- l'indépendance par rapport à c observée dans le cas de données non bruitées est valable dans le cas où elles sont entachées d'erreurs.

On présentera alors par la suite des résultats pour une valeur du coefficient c fixée.

δ	c	k	u_{erreur} (en%)	u'_{erreur} (en%)
1%	10^{-4}	11	0.28	1.06
	10^{-2}	138	0.28	1.06
	1	9356	0.28	1.06
3%	10^{-4}	11	0.79	2.85
	10^{-2}	138	0.79	2.85
	1	8869	0.79	2.85
5%	10^{-4}	13	1.32	4.69
	10^{-2}	136	1.32	4.69
	1	8517	1.32	4.69

Tableau A.2 – Influence du niveau de bruit δ et du coefficient de régularisation c sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} .

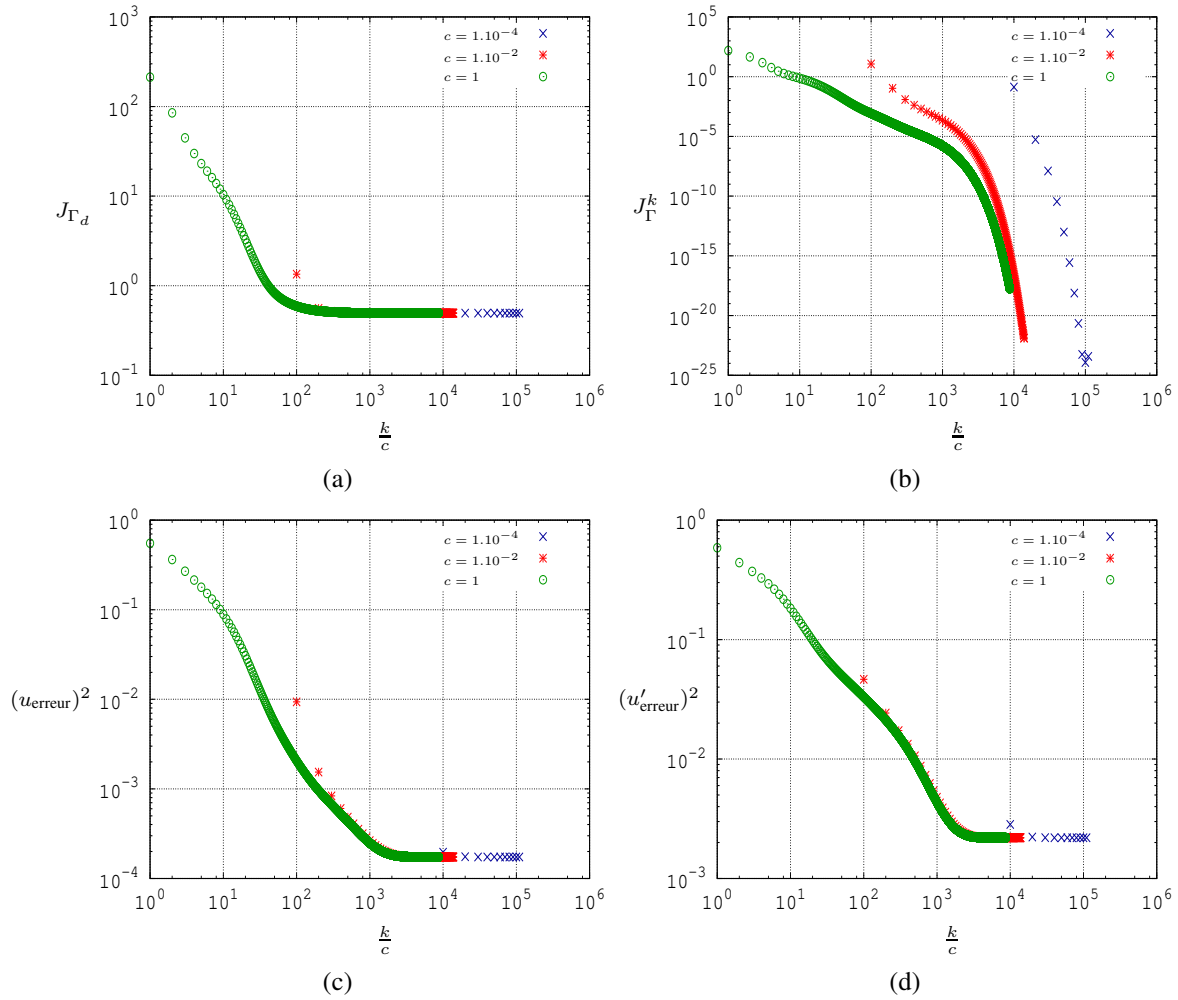


Figure A.5 – Évolution des normes (a) J_{Γ_d} et (b) J_{Γ} et des erreurs relatives (c) $(u_{\text{erreur}})^2$ et (d) $(u'_{\text{erreur}})^2$ en fonction de $\frac{k}{c}$ pour différentes valeurs de c .

Les reconstructions de la solution u et de sa dérivée normale u' obtenues pour $\delta = \{1, 3, 5\% \}$ et $c = 10^{-2}$ sur S_{front} sont représentées respectivement sur les Figures A.6(a) et A.6(b). La précision des résultats numériques ainsi que le débruitage des données sont remarquables. Les résultats numériques obtenus dans les mêmes conditions sur le segment S_{max} sont observables sur la Figure A.7 et les reconstructions sont également très précises malgré que S_{max} soit un segment de la partie inaccessible du bord Γ_i .

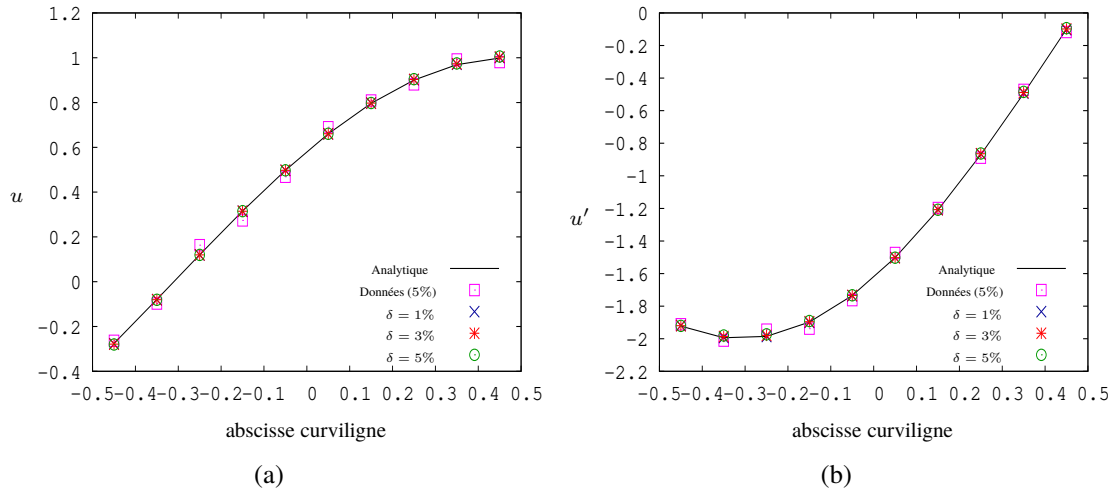


Figure A.6 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur S_{front} pour différentes valeurs de δ et $c = 10^{-2}$.

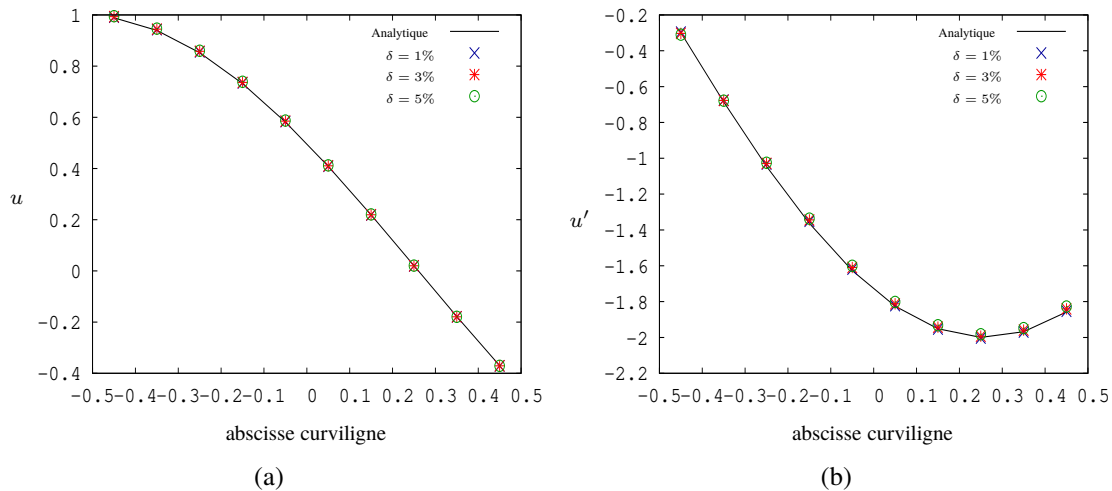


Figure A.7 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur S_{max} pour différentes valeurs de δ et $c = 10^{-2}$.

Influence du nombre de sources N

Les Figures A.8(a) et A.8(b) montrent l'influence du nombre de sources N sur les reconstructions de u et u' , respectivement sur S_{front} pour $\delta = 5\%$. On observe que les résultats les plus précis sont obtenus pour $N = 54$ ($6 \times 3 \times 3$) sources. Les résultats numériques obtenus sur S_{max} (Figure A.9), où les données sont inaccessibles,

montrent également que les reconstructions sont très sensibles au choix du nombre de sources, avec notamment de très mauvaises approximations de la dérivée normale pour $N = 24$ ($6 \times 2 \times 2$) et $N = 150$ ($6 \times 5 \times 5$). Le Tableau A.3 confirme ces observations avec des erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} très satisfaisantes et inférieures au niveau de bruit $\delta = 5\%$ seulement pour $N = 54$ ($6 \times 3 \times 3$) sources.

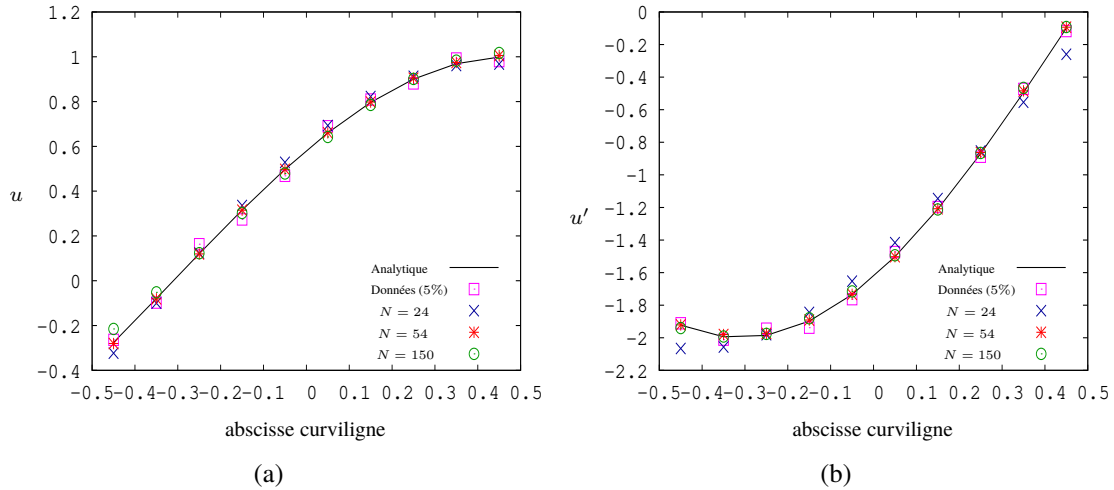


Figure A.8 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur le segment S_{front} pour différentes valeurs de N , $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-1}$.

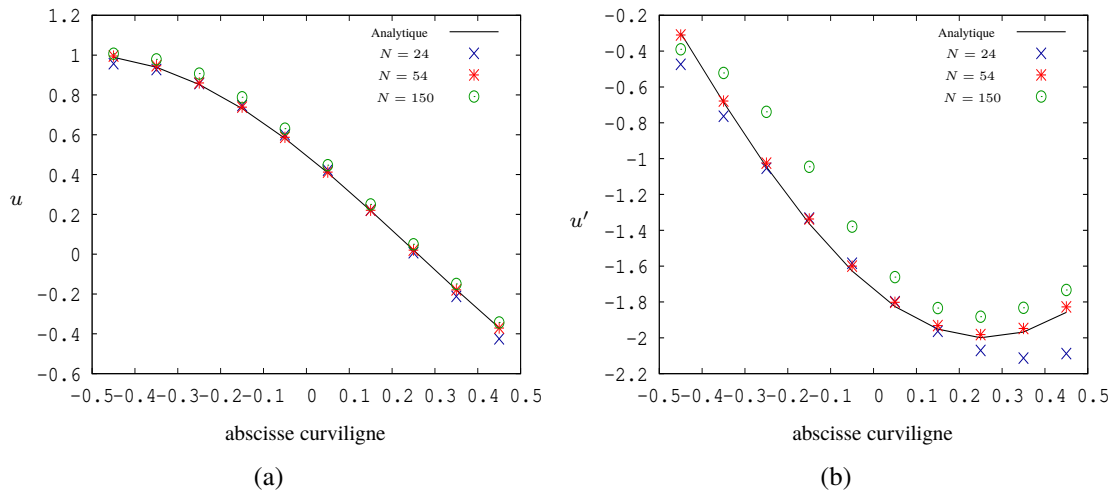


Figure A.9 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur le segment S_{max} pour différentes valeurs de N , $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-1}$.

N	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
$24(6 \times 2 \times 2)$	451	3.97	7.31
$54(6 \times 3 \times 3)$	1100	1.32	4.69
$96(6 \times 4 \times 4)$	2425	3.74	11.40
$150(6 \times 5 \times 5)$	11	9.63	27.57

Tableau A.3 – Influence du nombre de sources N sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} pour $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-1}$.

Influence de la distance d séparant les sources du domaine

L'influence de la distance d sur les reconstructions sur S_{front} et S_{max} est observable sur les Figures A.10 et A.11, respectivement pour $\delta = 5\%$. Les résultats numériques semblent moins sensibles à la position des sources qu'à leur nombre. Le Tableau A.4 indique que tant que les sources sont suffisamment loin du bord du domaine ($d \geq 2$) les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} sont inférieures au niveau de bruit $\delta = 5\%$. A partir de $d \geq 5$ le nombre d'itérations k requis pour converger est quasiment identique et les erreurs sont constantes.

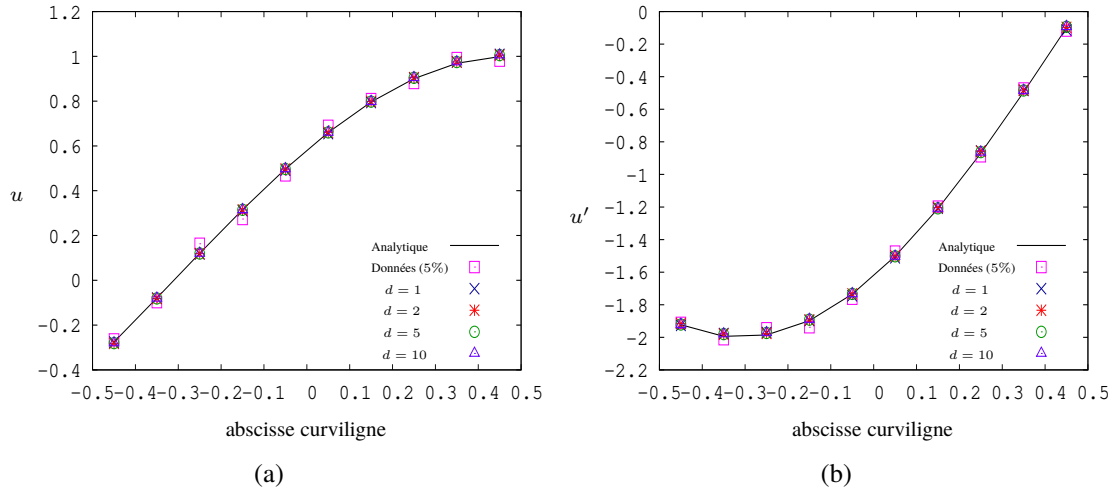


Figure A.10 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur le segment S_{front} pour différentes valeurs de d , $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-1}$.

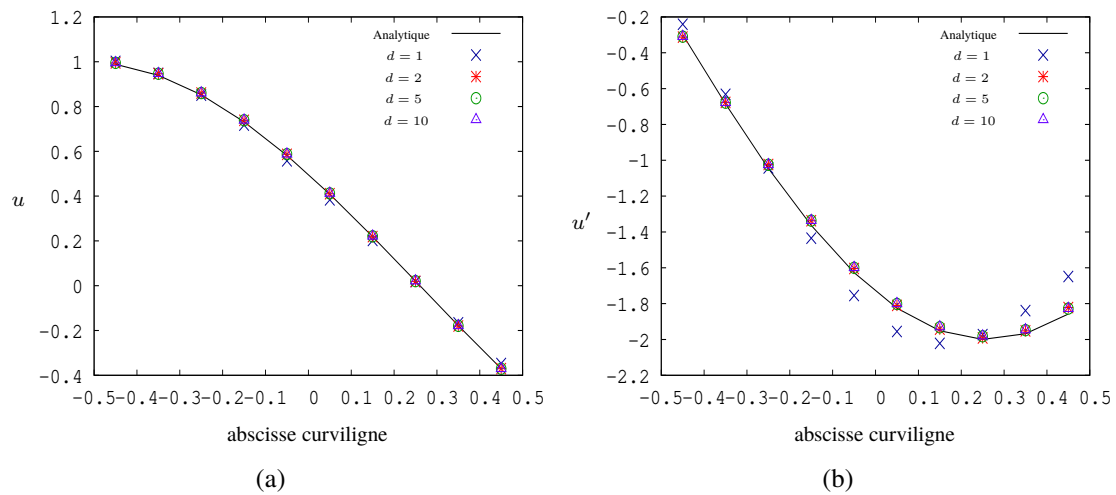


Figure A.11 – (a) Les solutions analytique, u^{an} et numérique, u et (b) les dérivées normales analytique, u'^{an} et numérique, u' , reconstruites sur le segment S_{\max} pour différentes valeurs de d , $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-1}$.

d	k	u_{erreur} (en %)	u'_{erreur} (en %)
1	2954	2.70	10.54
2	1317	1.38	4.98
5	1100	1.32	4.69
10	1075	1.32	4.69
100	1057	1.32	4.68

Tableau A.4 – Influence de la distance d sur le nombre d'itérations k requis pour converger et les erreurs u_{erreur} et u'_{erreur} pour $\delta = 5\%$ et $c = 10^{-1}$.

Annexe B

Détermination du mouvement de solide rigide par une procédure d'optimisation non linéaire

Le mouvement d'un solide déformable \underline{u} peut être décomposé comme la composition d'un mouvement de solide rigide et d'un mouvement dû au caractère déformable du solide. Le mouvement de solide rigide est défini par la somme d'une translation et d'une rotation.

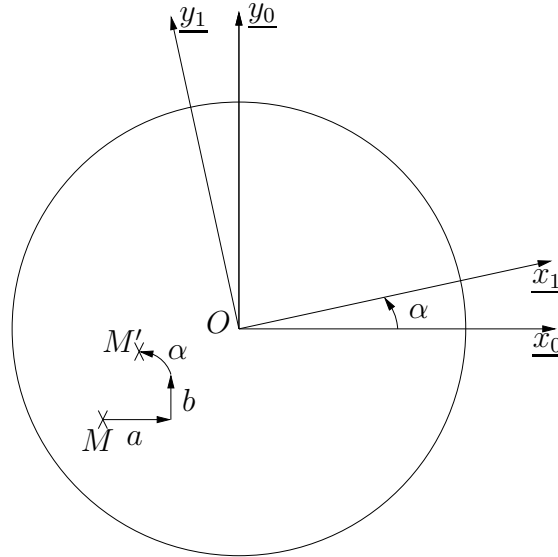


Figure B.1 – Modélisation d'un mouvement de solide rigide. Le point M' est l'image du point M par la translation de vecteur (a, b) et par la rotation d'angle α autour de (Oz_0) et de centre O .

On exprime le déplacement de solide rigide $\underline{u}_{rig.}$:

$$\begin{aligned} \underline{u}^{rig.} &= \underline{OM'} - \underline{OM} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Translation}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}}_{\text{Rotation}} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Afin de déterminer le mouvement de solide rigide, nous devons résoudre le problème d'optimisation non-linéaire :

$$\min_{a, b, \alpha} \left[\underline{u} - \underline{u}_{rig.} \right]_{\Omega}^2 \quad (\text{B.2})$$

avec \underline{u} le déplacement du solide et (a, b, α) les inconnues du système non linéaire.

La méthode de Newton-Raphson est ensuite utilisée pour résoudre le système d'équations non linéaire (B.2). Les paramètres (a, b, α) qui caractérisent le mouvement de solide rigide étant ainsi déterminés, nous obtenons le déplacement rigide, à ôter du déplacement calculé afin de déterminer la partie déformable du déplacement du solide.

Annexe C

Résultats numériques obtenus pour un test de compression avec des conditions aux limites non constantes

Dans cette annexe, nous présentons des résultats numériques complémentaires à ceux présentés au paragraphe 4.4, pour un exemple plus complexe. On considère la même solution analytique (4.33) que celle analysée au paragraphe 4.4 mais avec des conditions de chargement différentes. Le domaine, représenté sur la Figure C.1, est un sous-domaine du domaine de solution représenté sur la Figure 4.2. Cette configuration particulière permet d'appliquer l'approche proposée à une géométrie impliquant une composante verticale u'_2 non constante du vecteur contraintes sur Γ_i .

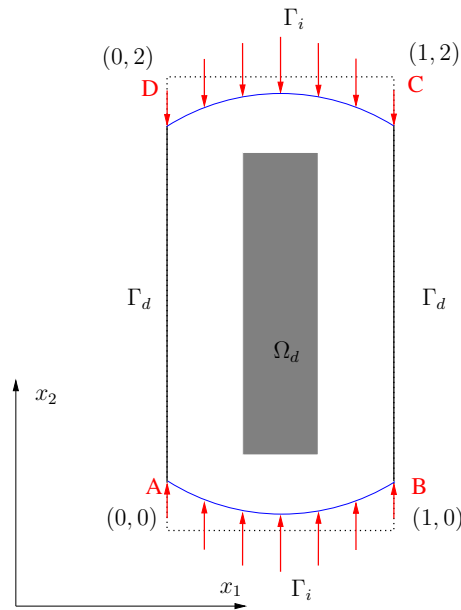


Figure C.1 – Domaine.

Nous présentons des résultats obtenus en utilisant la méthode des solutions fondamentales et le critère d'arrêt introduit au paragraphe 4.3.1.3.

Le champ de déplacements $\underline{u} = \underline{u}^d$ est accessible sur le sous-domaine $\Omega_d \subset \Omega$ modélisé par une grille de données paramétrée par le coefficient $\zeta = \frac{1}{4}$. Γ décrit la frontière du domaine telle que $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$. La partie Γ_d de la frontière est un bord libre et cette unique information sur les conditions aux limites est imposée sous la forme de contraintes égalités. Aucune information n'est accessible sur la partie Γ_i de la frontière.

Les paramètres de discrétisation par la méthode des solutions fondamentales sont les mêmes que ceux utilisés pour le domaine rectangulaire. Le domaine Ω est discrétisé par $M_\Omega = 1552$ points et la frontière Γ est discrétisée par $M_\Gamma = 300$ points.

Pour représenter les conditions aux limites le long de la frontière, nous définissons une abscisse curviligne s , qui croît respectivement, de 0 à 1 quand M décrit le segment $[AB]$, de 1 à 2.56 quand M décrit $[BC]$, de 2.56 à 3.56 quand M décrit $[CD]$ et de 3.56 à 5.12 quand M décrit $[DA]$ (voir Figure C.1).

Nous étudions la qualité des reconstructions lorsque les données $\underline{u}^d = (u_1^d, u_2^d)$ sont perturbées et définies par (4.34). Nous observons sur la Figure C.2 que la précision des reconstructions des conditions aux limites le long de Γ lorsque les données sont perturbées d'un bruit de niveau $\delta = \{1, 3, 5, 10\}\%$ est équivalente à celle observée pour un chargement uniforme (Figure 4.9). Le Tableau C.1 liste le nombre d'itérations k requis pour converger ainsi que les erreurs u_{erreur}^Ω , u_{erreur}^Γ et u'_{erreur} , en fonction du niveau de bruit δ , pour $c = 10^{-1}$. Les termes d'erreurs calculés sont presque identiques à ceux calculés dans le cas du domaine rectangulaire (Tableau 4.2), elles sont très faibles et proportionnelles au niveau de bruit, ce qui montre la stabilité de l'algorithme.

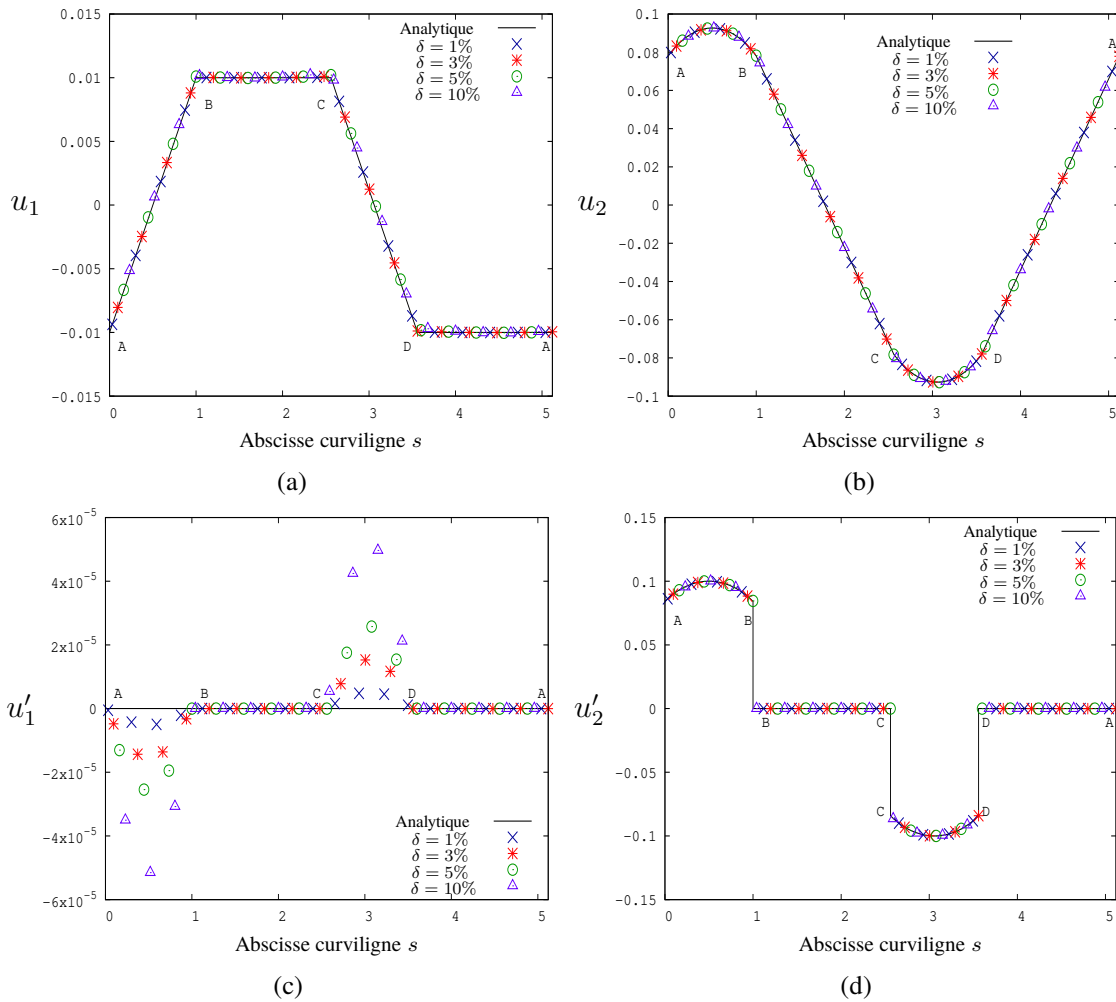


Figure C.2 – Les composantes (a) horizontale, u_1 et (b) verticale, u_2 , du champ de déplacements et les composantes (c) horizontale, u_1' et (d) verticale, u_2' , du vecteur contraintes, retrouvées sur Γ pour plusieurs niveaux de bruit δ et $c = 10^{-1}$.

Les Figures C.3(a), (b), (c) et (d) représentent les composantes horizontale, $|u_1^d - u_1|$ et verticale, $|u_2^d - u_2|$, du résidu calculé et les composantes horizontale, $|u_1^{an} - u_1|$ et verticale, $|u_2^{an} - u_2|$, de l'erreur calculée, sur Ω_d pour des données perturbées par $\delta = 10\%$ de bruit.

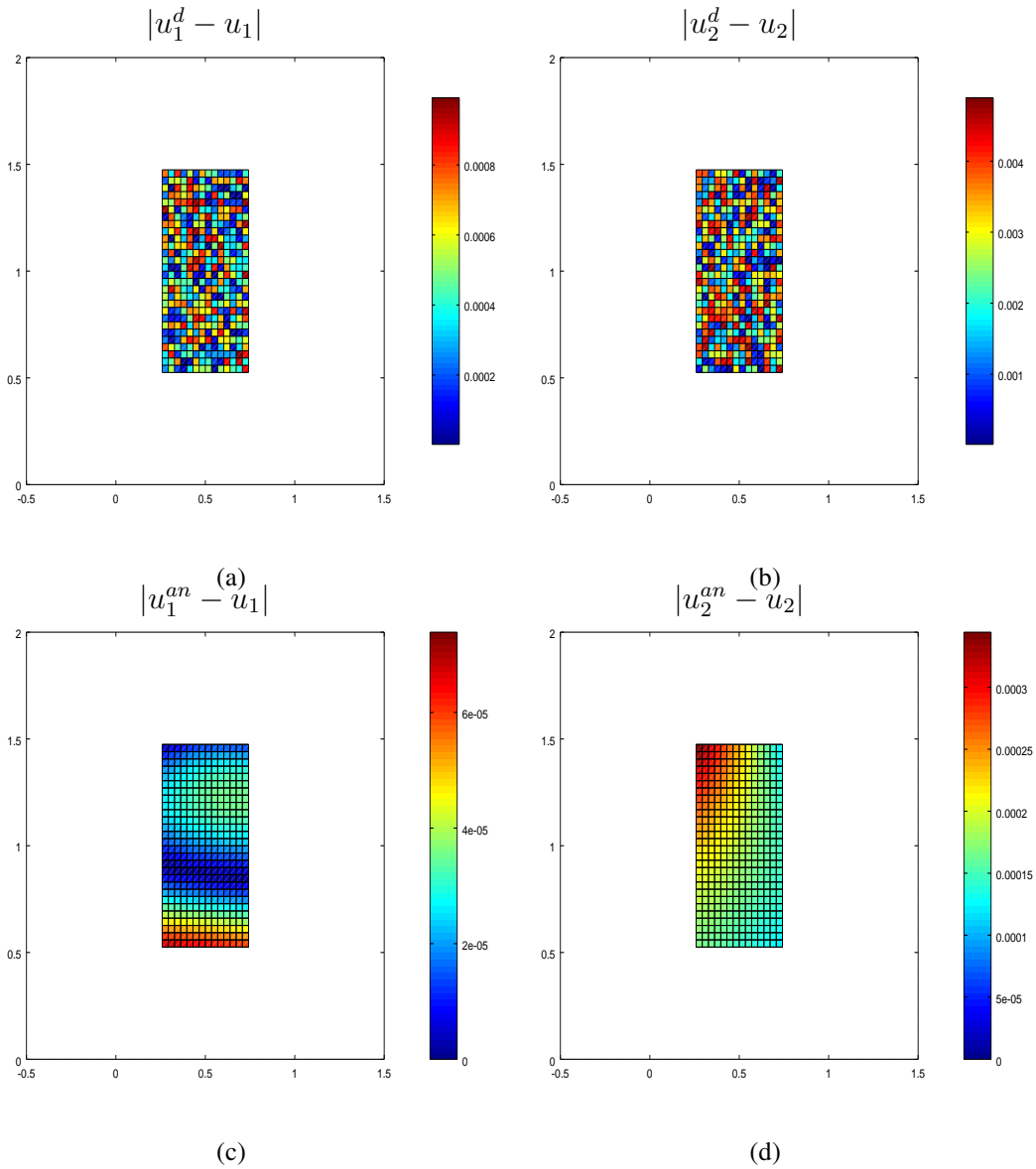


Figure C.3 – Les composantes, (a) $|u_1^d - u_1|$ et (b) $|u_2^d - u_2|$, du résidu calculé et les composantes, (c) $|u_1^{an} - u_1|$ et (d) $|u_2^{an} - u_2|$ de l'erreur calculée, sur Ω_d pour $c = 10^{-1}$ et $\delta = 10\%$.

Les termes d'erreur sont très petits comparés aux termes résiduels, qui correspondent aux 10% de bruit ajoutés aux données. Ces cartographies montrent que l'algorithme (4.19) permet de débruiter les données sur Ω_d .

δ	k	$u_{\text{erreur}}^{\Omega}$ (en %)	$u_{\text{erreur}}^{\Gamma}$ (en %)	u'_{erreur} (en %)
0%	51	1.95×10^{-8}	2.77×10^{-8}	1.11×10^{-7}
1%	99	0.05	0.06	0.033
3%	109	0.15	0.17	0.1
5%	112	0.25	0.29	0.16
10%	120	0.50	0.58	0.33

Tableau C.1 – Influence du niveau de bruit δ et du coefficient c sur le nombre d'itérations k , requis pour converger et sur les erreurs $u_{\text{erreur}}^{\Omega}$, $u_{\text{erreur}}^{\Gamma}$ et u'_{erreur} .

Nous observons sur les Figures C.4(a) et (b), les composantes horizontale, u_1^{Ω} et verticale, u_2^{Ω} , du champ de déplacements calculé sur tout le domaine Ω pour $\delta = 10\%$ et $c = 10^{-1}$.

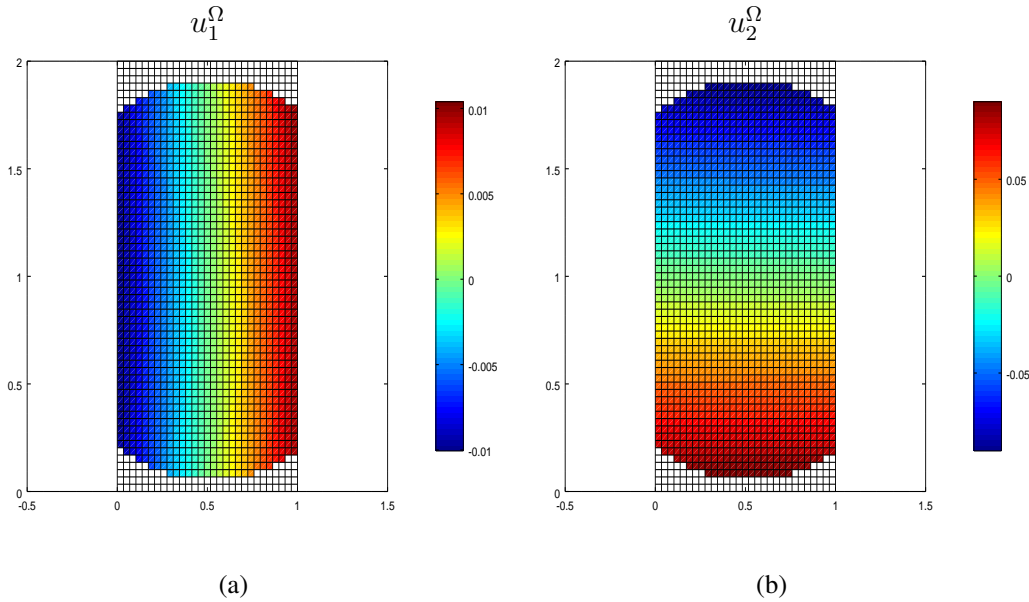


Figure C.4 – Reconstructions de (a) la composante horizontale, u_1^{Ω} et (b) la composante verticale, u_2^{Ω} , du champ de déplacements, calculées sur Ω pour $\delta = 10\%$ et $c = 10^{-1}$.

Les résultats présentés dans cette annexe montrent la précision et la stabilité de l'algorithme (4.19), ainsi que sa capacité à débruiter les données, lorsque les conditions aux limites sur la partie inaccessible Γ_i de la frontière ne sont pas constantes.

Bibliographie

- [1] J. B. Abdallah. A conjugate gradient type method for the Steklov-Poincaré formulation of the Cauchy-Poisson problem. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 9(1) :27–40, 2007.
- [2] F. Amiot. The equilibrium gap method : a two-scales approach. In *EPJ Web of Conferences*, volume 6, page 37003. EDP Sciences, 2010.
- [3] F. Amiot, F. Hild, and J. P. Roger. Identification of elastic property and loading fields from full-field displacement measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 44(9) :2863–2887, 2007.
- [4] F. Amiot, J.-N. Périé, and S. Roux. Equilibrium gap method. In *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*, pages 331–362. 2012.
- [5] S. Andrieux and T. N. Baranger. An energy error-based method for the resolution of the Cauchy problem in 3D linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(9) :902–920, 2008.
- [6] S. Andrieux and T. N. Baranger. Emerging crack front identification from tangential surface displacements. *Comptes Rendus Mécanique*, 340(8) :565–574, 2012.
- [7] S. Andrieux and T. N. Baranger. Three-dimensional recovery of stress intensity factors and energy release rates from surface full-field displacements. *International Journal of Solids and Structures*, 50(10) :1523–1537, 2013.
- [8] S. Andrieux and T. N. Baranger. On the determination of missing boundary data for solids with nonlinear material behaviors, using displacement fields measured on a part of their boundaries. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 97 :140–155, 2016.
- [9] S. Andrieux, T. N. Baranger, and A. Ben Abda. Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional. *Inverse Problems*, 22(1) :115, 2006.
- [10] S. Andrieux and A. Ben Abda. Identification de fissures planes par une donnée de bord unique : un procédé direct de localisation et d’identification. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 1992.
- [11] S. Andrieux and A. Ben Abda. Identification of planar cracks by complete overdetermined data : inversion formulae. *Inverse Problems*, 12(5) :553, 1996.

-
- [12] S. Andrieux, A. Ben Abda, and T. N. Baranger. Data completion via an energy error functional. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(2) :171–177, 2005.
- [13] S. Andrieux, A. Ben Abda, and H. D. Bui. Sur l’identification de fissures planes via le concept d’écart à la réciprocité en élasticité. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 324(12) :1431–1438, 1997.
- [14] S. Andrieux, A. Ben Abda, and H. D. Bui. Reciprocity principle and crack identification. *Inverse Problems*, 15(1) :59, 1999.
- [15] S. Andrieux, H. D. Bui, and A. Constantinescu. Reciprocity gap method. In *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*, pages 363–378. 2012.
- [16] S. Avril, M. Bonnet, A.-S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, and F. Pierron. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381, 2008.
- [17] S. Avril, M. Grédiac, and F. Pierron. Sensitivity of the virtual fields method to noisy data. *Computational Mechanics*, 34(6) :439–452, 2004.
- [18] S. Avril and F. Pierron. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 44(14-15) :4978–5002, 2007.
- [19] M. Azaïez, F. B. Belgacem, D. T. Du, and F. Jelassi. A finite element model for the data completion problem : Analysis and assessment. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 19(8) :1063–1086, 2011.
- [20] M. Azaïez, F. B. Belgacem, and F. Jelassi. The density function reconstruction of surface sources from a single Cauchy measurement. *Computers & Fluids*, 43(1) :14–22, 2011.
- [21] M. Azaïez, F. Ben Belgacem, and H. El Fekih. On Cauchy’s Problem : II. Completion, regularization and approximation. *Inverse Problems*, 22(4) :1307, 2006.
- [22] O. A. Babaniyi, A. A. Oberai, and P. E. Barbone. Direct error in constitutive equation formulation for plane stress inverse elasticity problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 314 :3–18, 2017.
- [23] T. Bannour, A. Ben Abda, and M. Jaoua. A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks. *Inverse Problems*, 13(4) :899, 1997.
- [24] T. N. Baranger and S. Andrieux. An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 35(2) :141–152, 2008.
- [25] T. N. Baranger and S. Andrieux. Constitutive law gap functionals for solving the Cauchy problem for linear elliptic PDE. *Applied Mathematics and Computation*, 218(5) :1970–1989, 2011.

-
- [26] T. N. Baranger, S. Andrieux, and R. Rischette. Combined energy method and regularization to solve the Cauchy problem for the heat equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 22(1) :199–212, 2014.
- [27] L. Baratchart and J. Leblond. Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle with $1 \leq p \leq \infty$. *Constructive approximation*, 14(1) :41–56, 1998.
- [28] G. Bastay, T. Johansson, V. A. Kozlov, and D. Lesnic. An alternating method for the stationary Stokes system. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 86(4) :268–280, 2006.
- [29] G. Bastay, V. A. Kozlov, and B. O. Turesson. Iterative methods for an inverse heat conduction problem. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 9(4) :375–388, 2001.
- [30] J. Baumeister and A. Leitao. On iterative methods for solving Ill-Posed Problems modeled by partial differential equations. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 9(1) :13–29, 2001.
- [31] F. B. Belgacem and H. El Fekih. On Cauchy’s Problem : I. A variational Steklov–Poincaré theory. *Inverse Problems*, 21(6) :1915, 2005.
- [32] F. B. Belgacem, H. El Fekih, and F. Jelassi. The Lavrentiev regularization of the data completion problem. *Inverse Problems*, 24(4) :045009, 2008.
- [33] F. B. Belgacem, H. El Fekih, and F. Jelassi. Parameter choice in the Lavrentiev regularization of the data completion problem. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 135, page 012016, 2008.
- [34] F. B. Belgacem, V. Girault, and F. Jelassi. Analysis of Lavrentiev-finite element methods for data completion problems. *Numerische Mathematik*, pages 1–25, 2016.
- [35] A. Ben Abda, H. B. Ameer, and M. Jaoua. Identification of 2D cracks by elastic boundary measurements. *Inverse Problems*, 15(1) :67, 1999.
- [36] A. Ben Abda, J. Henry, and F. Jday. Boundary data completion : the method of boundary value problem factorization. *Inverse Problems*, 27(5) :055014, 2011.
- [37] A. Ben Abda and M. Kallel. Reciprocity gap principle and cracks identification algorithms ENIT-LAMSIN research report, 1999.
- [38] A. Ben Abda, M. Kallel, J. Leblond, and J.-P. Marmorat. Line segment crack recovery from incomplete boundary data. *Inverse Problems*, 18(4) :1057, 2002.
- [39] A. Ben Abda, I. B. Saad, and M. Hassine. Recovering boundary data : the Cauchy Stokes system. *Applied Mathematical Modelling*, 37(1-2) :1–12, 2013.

- [40] M. Ben Azzouna, P. Feissel, and P. Villon. Identification of elastic properties from full-field measurements : a numerical study of the effect of filtering on the identification results. *Measurement Science and Technology*, 24(5) :055603, 2013.
- [41] M. Ben Azzouna, P. Feissel, and P. Villon. Robust identification of elastic properties using the modified constitutive relation error. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 295 :196–218, 2015.
- [42] F. Berntsson, V. A. Kozlov, B. Mpinganzima, and O. Turesson. An accelerating alternating iterative procedure for the Cauchy problem for the Helmholtz equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 68(1) :44–60, 2014.
- [43] F. Berntsson, V. A. Kozlov, B. Mpinganzima, and O. Turesson. An alternating iterative procedure for the Cauchy problem for the Helmholtz equation. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 22 :45–62, 2014.
- [44] F. Berntsson, V. A. Kozlov, L. Mpinganzima, and B.-O. Turesson. Iterative Tikhonov regularization for the Cauchy problem for the Helmholtz equation. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(1) :163–172, 2017.
- [45] D. E. Beskos. Boundary Element Methods in Dynamic Analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 40 :1, 1987.
- [46] A. Bilotta and E. Turco. A numerical study on the solution of the Cauchy problem in elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 46(25-26) :4451–4477, 2009.
- [47] A. Bilotta and E. Turco. Numerical sensitivity analysis of corrosion detection. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(1) :72–88, 2017.
- [48] G. Bolzon, R. Fedele, and G. Maier. Parameter identification of a cohesive crack model by Kalman filter. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(25-26) :2847–2871, 2002.
- [49] M. Bonnet. Introduction to identification methods. In *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*, pages 223–246. 2012.
- [50] M. Bornert, F. Brémand, P. Doumalin, J.-C. Dupré, M. Fazzini, M. Grédiac, F. Hild, S. Mistou, J. Molimard, J.-J. Orteu, L. Robert, Y. Surrel, P. Vacher, and B. Wattrisse. Assessment of digital image correlation measurement errors : methodology and results. *Experimental Mechanics*, 49(3) :353–370, 2009.
- [51] L. Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace’s equation. *Inverse Problems*, 21(3) :1087, 2005.
- [52] L. Bourgeois and J. Dardé. A duality-based method of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem in the presence of noisy data. *Inverse Problems*, 26(9) :095016, 2010.

-
- [53] L. Bourgeois and J. Dardé. A quasi-reversibility approach to solve the inverse obstacle problem. *Inverse Problems & Imaging*, 4(3) :351–377, 2010.
- [54] L. Bourgeois and J. Dardé. The “exterior approach” to solve the inverse obstacle problem for the Stokes system. *Inverse Problems and Imaging*, 8 :23–51, 2014.
- [55] L. Bourgeois and J. Dardé. The “exterior approach” applied to the inverse obstacle problem for the heat equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 55(4) :1820–1842, 2017.
- [56] H. D. Bui. *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*. Eyrolles, 1993.
- [57] E. Burman. Stabilised finite element methods for Ill-Posed Problems with conditional stability. In *Building bridges : connections and challenges in modern approaches to numerical partial differential equations*, pages 93–127. 2016.
- [58] S. Calloch, D. Dureisseix, and F. Hild. Identification de modèles de comportement de matériaux solides : utilisation d’essais et de calculs. *Technologies et Formations*, 100 :36–41, 2002.
- [59] S. Calloch, F. Hild, C. Doudard, C. Bouvet, and C. Lexcelent. Analyse d’essais de compression biaxiale sur un AMF à l’aide d’une technique d’intercorrélation d’images numériques. *Proc. Photomécanique*, pages 207–214, 2001.
- [60] S. Chaabane, M. Jaoua, and J. Leblond. Parameter identification for Laplace equation and approximation in Hardy classes. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 11(1) :33–57, 2003.
- [61] G. Chen and J. Zhou. *Boundary Element Methods*. Academic Press, 1992.
- [62] J. T. Chen and F. C. Wong. Dual formulation of multiple reciprocity method for the acoustic mode of a cavity with a thin partition. *Journal of Sound and Vibration*, 217(1) :75–95, 1998.
- [63] X. Cheng, R. Gong, W. Han, and X. Zheng. A novel coupled complex boundary method for solving inverse source problems. *Inverse Problems*, 30(5) :055002, 2014.
- [64] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, M. Kallel, and F. Pons. Recovery of cracks from incomplete boundary data. *Inverse Problems in Engineering*, 10(4) :377–392, 2002.
- [65] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 17(3) :553, 2001.
- [66] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. An inversion method for harmonic functions reconstruction. *International Journal of Thermal Sciences*, 41(6) :509–516, 2002.

- [67] A. Cimetière, F. Delvare, and F. Pons. Une méthode inverse à régularisation évanescence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, 328(9) :639–644, 2000.
- [68] D. Claire, F. Hild, and S. Roux. Identification of damage fields using kinematic measurements. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(11) :729–734, 2002.
- [69] D. Claire, F. Hild, and S. Roux. A finite element formulation to identify damage fields : the equilibrium gap method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(2) :189–208, 2004.
- [70] D. Claire, F. Hild, and S. Roux. Identification of a damage law by using full-field displacement measurements. *International Journal of Damage Mechanics*, 16(2) :179–197, 2007.
- [71] A. Constantinescu. On the identification of elastic moduli from displacement–force boundary measurements. *Inverse Problems in Engineering*, 1(4) :293–313, 1995.
- [72] A. Constantinescu, H. D. Bui, and S. Andrieux. Méthode de l'écart à la réciprocité. In *Mesures de champs et identification en mécanique des solides*, pages 383–398. Lavoisier, 2011.
- [73] J. Dardé. The 'exterior approach' : a new framework to solve inverse obstacle problems. *Inverse Problems*, 28(1) :015008, 2011.
- [74] J. Dardé. Iterated quasi-reversibility method applied to elliptic and parabolic data completion problems. *Inverse Problems & Imaging*, 10(2) :379–407, 2016.
- [75] F. Delvare and A. Cimetière. A first order method for the Cauchy problem for the Laplace equation using BEM. *Computational Mechanics*, 41(6) :789–796, 2008.
- [76] F. Delvare and A. Cimetière. A robust data completion method for two dimensional Cauchy problems associated with the Laplace equation. *European Journal of Computational Mechanics*, 20(5-6) :309–340, 2011.
- [77] F. Delvare and A. Cimetière. Unique discrete harmonic continuation and data completion problems using the fading regularization method. *Numerical Algorithms*, 75(3) :731–751, 2017.
- [78] F. Delvare, A. Cimetière, J.-L. Hanus, and P. Bailly. An iterative method for the Cauchy problem in linear elasticity with fading regularization effect. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49) :3336–3344, 2010.
- [79] F. Delvare, A. Cimetière, and F. Pons. An iterative boundary element method for Cauchy inverse problems. *Computational Mechanics*, 28(3-4) :291–302, 2002.

-
- [80] B. Durand, F. Delvare, and P. Bailly. Numerical solution of Cauchy problems in linear elasticity in axisymmetric situations. *International Journal of Solids and Structures*, 48(21) :3041–3053, 2011.
- [81] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Springer Science & Business Media, 1996.
- [82] A. P. Eyimi Minto'o Ebang. *Sur un problème inverse de type Cauchy en théorie des plaques minces élastiques*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2011.
- [83] G. Fairweather and A. Karageorghis. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advances in Computational Mathematics*, 9(1-2) :69–95, 1998.
- [84] B. Faverjon, B. Puig, and T. N. Baranger. Identification of boundary conditions by solving Cauchy problem in linear elasticity with material uncertainties. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(3) :494–504, 2017.
- [85] X. Fayolle. *Corimage : programme de pilotage d'essais asservis sur une jauge de déformation optique*. PhD thesis, 2004.
- [86] P. Feissel and O. Allix. Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(13-16) :1968–1983, 2007.
- [87] E. Florentin and G. Lubineau. Identification of the parameters of an elastic material model using the constitutive equation gap method. *Computational Mechanics*, 46(4) :521–531, 2010.
- [88] V. Fridman. A method of successive approximations for Fredholm integral equations of the first kind. *Uspeki mat Nauk*, 11 :233–234, 1965.
- [89] K. Genovese, L. Lamberti, and C. Pappalettere. Mechanical characterization of hyperelastic materials with fringe projection and optimization techniques. *Optics and Lasers in Engineering*, 44(5) :423–442, 2006.
- [90] G. Geymonat, F. Hild, and S. Pagano. Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(6) :403–408, 2002.
- [91] M.A. Goldberg and C.S. Chen. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. In *Boundary Integral Methods-Numerical and Mathematical Aspects*, pages 103–176. 1999.
- [92] R. Gong, X. Cheng, and W. Han. A coupled complex boundary method for an inverse conductivity problem with one measurement. *Applicable Analysis*, 96(5) :869–885, 2017.
- [93] S. N. Grama and S. J. Subramanian. Computation of full-field strains using principal component analysis. *Experimental Mechanics*, 54(6) :913–933, 2014.

- [94] M. Grédiac. Principe des travaux virtuels et identification. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 309(1) :1–5, 1989.
- [95] M. Grédiac, F. Pierron, S. Avril, E. Toussaint, and M. Rossi. Virtual fields method. In *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*, pages 301–330. 2012.
- [96] M. Grédiac, E. Toussaint, and F. Pierron. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) :2691–2705, 2002.
- [97] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Oxford University Press, 1923.
- [98] W. S. Hall and X. Q. Mao. A boundary element investigation of irregular frequencies in electromagnetic scattering. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 16(3) :245–252, 1995.
- [99] M. Hanke. Limitations of the L-curve method in Ill-Posed Problems. *BIT Numerical Mathematics*, 36(2) :287–301, 1996.
- [100] P. C. Hansen. Analysis of discrete Ill-Posed Problems by means of the L-curve. *SIAM review*, 34(4) :561–580, 1992.
- [101] P. C. Hansen. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems. Numerical Aspects of Linear Inversion*. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [102] P. C. Hansen. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, pages 119–142. WIT Press, 2001.
- [103] D. N. Hào and D. Lesnic. The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 65(2) :199–217, 2000.
- [104] D. N. Hào and H.-J. Reinhardt. Gradient methods for inverse heat conduction problems. *Inverse Problems in Engineering*, 6(3) :177–211, 1998.
- [105] I. Harari, P. E. Barbone, M. Slavutin, and R. Shalom. Boundary infinite elements for the Helmholtz equation in exterior domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41(6) :1105–1131, 1998.
- [106] M. R. Hestenes and E. Stiefel. *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, volume 49. NBS Washington, DC, 1952.
- [107] F. Hild and S. Roux. Digital image correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties – a review. *Strain*, 42(2) :69–80, 2006.
- [108] F. Hild and S. Roux. CorreliQ4 : A software for finite element displacement field measurements by digital image correlation. *Rapport interne LMT Cachan*, 269, 2008.

-
- [109] B. T. Hjertaker, R. Maad, and G. A. Johansen. Dual-mode capacitance and gamma-ray tomography using the Landweber reconstruction algorithm. *Measurement Science and Technology*, 22(10) :104002, 2011.
- [110] L. Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer-Verlag, 1963.
- [111] S. Huang, P. Feissel, and P. Villon. Modified constitutive relation error : An identification framework dealing with the reliability of information. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 311 :1–17, 2016.
- [112] M. S. Hussein, D. Lesnic, B. T. Johansson, and A. Hazanee. Identification of a multi-dimensional space-dependent heat source from boundary data. *Applied Mathematical Modelling*, 54 :202–220, 2018.
- [113] M. Jaoua, J. Leblond, M. Mahjoub, and J. R. Partington. Robust numerical algorithms based on analytic approximation for the solution of inverse problems in annular domains. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 74(4) :481–506, 2009.
- [114] B. Jin, Y. Zhen, and L. Marin. The method of fundamental solutions for inverse boundary value problems associated with the steady-state heat conduction in anisotropic media. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 65(11) :1865–1891, 2006.
- [115] T. Johansson and D. Lesnic. Reconstruction of a stationary flow from incomplete boundary data using iterative methods. *European Journal of Applied Mathematics*, 17(6) :651–663, 2006.
- [116] R. Jones and C. Wykes. *Holographic and speckle interferometry*, volume 6. Cambridge University Press, 1989.
- [117] M. Jourhmane, D. Lesnic, and N. S. Mera. Relaxation procedures for an iterative algorithm for solving the Cauchy problem for the Laplace equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(6) :655–665, 2004.
- [118] M. L. Kadri, J. B. Abdallah, and T. N. Baranger. Identification of internal cracks in a three-dimensional solid body via Steklov–Poincaré approaches. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(10) :674–681, 2011.
- [119] B. Kaltenbacher. Regularization by truncated Cholesky factorization : A comparison of four different approaches. *Journal of Complexity*, 23(2) :225–244, 2007.
- [120] A. Karageorghis, D. Lesnic, and L. Marin. A survey of applications of the MFS to inverse problems. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 19(3) :309–336, 2011.
- [121] M. Karimi and A. Rezaee. Regularization of the Cauchy problem for the Helmholtz equation by using Meyer wavelet. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 320 :76–95, 2017.

- [122] K. T. Kavanagh and R. W. Clough. Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(1) :11–23, 1971.
- [123] B. S. Kim and K. Y. Kim. Resistivity imaging of binary mixture using weighted Landweber method in electrical impedance tomography. *Flow Measurement and Instrumentation*, 53 :39–48, 2017.
- [124] J. T. King. A minimal error conjugate gradient method for Ill-Posed Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 60(2) :297–304, 1989.
- [125] A. Kirsch and F. Hettlich. *The Mathematical Theory of Time-Harmonic Maxwell's Equations*. Applied Mathematical Sciences, 2015.
- [126] M. V. Klibanov and F. Santosa. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 51(6) :1653–1675, 1991.
- [127] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, and A. V. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 31 :45–52, 1991.
- [128] V. D. Kupradze and M. A. Aleksidze. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(4) :82–126, 1964.
- [129] P. Ladeveze and D. Leguillon. Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3) :485–509, 1983.
- [130] L. Landweber. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *American Journal of Mathematics*, 73(3) :615–624, 1951.
- [131] R. Lattès and J.-L. Lions. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*. 1967.
- [132] M. M. Lavrentiev. *Some improperly posed problems of mathematical physics*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2013.
- [133] J. Leblond, J.-P. Marmorat, and J. R. Partington. Analytic approximation with real constraints, with applications to inverse diffusion problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 16(1) :89–105, 2008.
- [134] J. Leblond and D. Ponomarev. Recovery of harmonic functions from partial boundary data respecting internal pointwise values. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 25(2) :157–174, 2017.
- [135] H. Leclerc, J.-N. Périé, S. Roux, and F. Hild. Integrated digital image correlation for the identification of mechanical properties. In *International Conference on Computer Vision/Computer Graphics Collaboration Techniques and Applications*, pages 161–171, 2009.

-
- [136] D. Lesnic, L. Elliott, and D.B. Ingham. An iterative Boundary Element Method for solving numerically the Cauchy problem for the Laplace equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 20(2) :123–133, 1997.
- [137] J.-L. Lions and E. Magenes. *Non-homogeneous boundary value problems and their applications*. Springer-Verlag : New York-Heidelberg, 1972.
- [138] S. Liu, L. Fu, and W. Q. Yang. Optimization of an iterative image reconstruction algorithm for electrical capacitance tomography. *Measurement Science and Technology*, 10(7) :L37, 1999.
- [139] G. Lu, L. Peng, B. Zhang, and Y. Liao. Preconditioned Landweber iteration algorithm for electrical capacitance tomography. *Flow Measurement and Instrumentation*, 16(2-3) :163–167, 2005.
- [140] L. Marin. A meshless method for the numerical solution of the Cauchy problem associated with three-dimensional Helmholtz-type equations. *Applied Mathematics and Computation*, 165(2) :355–374, 2005.
- [141] L. Marin. Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two-dimensional functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 42(15) :4338–4351, 2005.
- [142] L. Marin. The method of fundamental solutions for inverse problems associated with the steady-state heat conduction in the presence of sources. *CMES : Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 30(2) :99–122, 2008.
- [143] L. Marin. An alternating iterative MFS algorithm for the Cauchy problem in two-dimensional anisotropic heat conduction. *Computers, Materials & Continua (CMC)*, 12(1) :71, 2009.
- [144] L. Marin. Boundary element-minimal error method for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations. *Computational Mechanics*, 44(2) :205–219, 2009.
- [145] L. Marin. An iterative MFS algorithm for the Cauchy problem associated with the Laplace equation. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 48 :121–152, 2009.
- [146] L. Marin. The minimal error method for the Cauchy problem in linear elasticity. Numerical implementation for two-dimensional homogeneous isotropic linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 46(5) :957–974, 2009.
- [147] L. Marin. Relaxation procedures for an iterative MFS algorithm for two-dimensional steady-state isotropic heat conduction Cauchy problems. *Engineering analysis with boundary elements*, 35(3) :415–429, 2011.
- [148] L. Marin, F. Delvare, and A. Cimetière. Fading regularization MFS algorithm for inverse boundary value problems in two-dimensional linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 78–79 :9–20, 2016.

- [149] L. Marin, L. Elliott, P. J. Heggs, D. B. Ingham, D. Lesnic, and X. Wen. An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated to the Helmholtz equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(5) :709–722, 2003.
- [150] L. Marin, L. Elliott, P. J. Heggs, D. B. Ingham, D. Lesnic, and X. Wen. Boundary element solution for the Cauchy problem associated with the Helmholtz equation by the Tikhonov regularisation method. In *Inverse Problems in Engineering Mechanics IV*, pages 485–494. 2003.
- [151] L. Marin, L. Elliott, P. J. Heggs, D. B. Ingham, D. Lesnic, and X. Wen. Conjugate gradient-boundary element solution to the Cauchy problem for Helmholtz-type equations. *Computational Mechanics*, 31(3-4) :367–377, 2003.
- [152] L. Marin, L. Elliott, P. J. Heggs, D. B. Ingham, D. Lesnic, and X. Wen. BEM solution for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations by the Landweber method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(9) :1025–1034, 2004.
- [153] L. Marin, L. Elliott, D.B. Ingham, and D. Lesnic. Boundary element regularisation methods for solving the Cauchy problem in linear elasticity. *Inverse Problems in Engineering*, 10(4) :335–357, 2002.
- [154] L. Marin, D. N. Hào, and D. Lesnic. Conjugate gradient–boundary element method for the Cauchy problem in elasticity. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 55(2) :227–247, 2002.
- [155] L. Marin, A. Karageorghis, D. Lesnic, and B. T. Johansson. The method of fundamental solutions for problems in static thermo-elasticity with incomplete boundary data. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 25(5) :652–673, 2017.
- [156] L. Marin and D. Lesnic. Boundary element solution for the Cauchy problem in linear elasticity using singular value decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(29) :3257–3270, 2002.
- [157] L. Marin and D. Lesnic. Regularized boundary element solution for an inverse boundary value problem in linear elasticity. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18(11) :817–825, 2002.
- [158] L. Marin and D. Lesnic. BEM first-order regularisation method in linear elasticity for boundary identification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(16) :2059–2071, 2003.
- [159] L. Marin and D. Lesnic. The method of fundamental solutions for the Cauchy problem in two-dimensional linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 41(13) :3425–3438, 2004.

-
- [160] L. Marin and D. Lesnic. Boundary element-Landweber method for the Cauchy problem in linear elasticity. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 70(2) :323–340, 2005.
- [161] L. Marin and D. Lesnic. The method of fundamental solutions for the Cauchy problem associated with two-dimensional Helmholtz-type equations. *Computers & Structures*, 83(4) :267–278, 2005.
- [162] R. Mathon and R. L. Johnston. The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14(4) :638–650, 1977.
- [163] D. Maxwell. Kozlov-Maz’ya iteration as a form of Landweber iteration. *Inverse Problems & Imaging*, 8(2), 2014.
- [164] V. A. Morozov. On the solution of functional equations by the method of regularization. In *Soviet Math. Dokl*, volume 7, pages 414–417, 1966.
- [165] A. Moussawi, G. Lubineau, E. Florentin, and B. Blaysat. The constitutive compatibility method for identification of material parameters based on full-field measurements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 265 :1–14, 2013.
- [166] T. H. Nguyen and B. T. Tran. Recovery the interior temperature of a nonhomogeneous elliptic equation from boundary data. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014(1) :19, 2014.
- [167] N. Nigamaa and S. J. Subramanian. Identification of orthotropic elastic constants using the eigenfunction virtual fields method. *International Journal of Solids and Structures*, 51(2) :295–304, 2014.
- [168] S. Padmanabhan, J. P. Hubner, A. V. Kumar, and P. G. Ifju. Load and boundary condition calibration using full-field strain measurement. *Experimental Mechanics*, 46(5) :569–578, 2006.
- [169] S. Pagano and M. Bonnet. Constitutive equation gap. In *Full-field Measurements and Identification in Solid Mechanics*, chapter 10, pages 275–300. John Wiley & Sons, 2012.
- [170] E. Pagnacco, A.-S. Caro-Bretelle, and P. Jenny. Parameter identification from mechanical field measurements using finite element model updating strategies. In *Full-field Measurements and Identification in Solid Mechanics*, chapter 9, pages 247–274. John Wiley & Sons, 2012.
- [171] E. Pagnacco and D. Lemosse. A coupled FE based inverse strategy from displacement field measurement subject to an unknown distribution of forces. In *Photomechanics*, 2006.
- [172] E. Pagnacco, D. Lemosse, F. Hild, and F. Amiot. Inverse strategy from displacement field measurement and distributed forces using FEA. In *2005 SEM annual conference and exposition on experimental and applied mechanics*, 2005.

- [173] W. H. Peters and W. F. Ranson. Digital imaging techniques in experimental stress analysis. *Optical Engineering*, 21(3) :213427, 1982.
- [174] H. Q. Pham and T. H. Phan. A new regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation with nonhomogeneous Cauchy data. *Acta Mathematica Vietnamica*, 36(2) :419–430, 2011.
- [175] D. Post, B. Han, and P. Ifju. Moiré interferometry. In *High Sensitivity Moiré*, pages 135–226. 1994.
- [176] Z. Qian, C.-L. Fu, and Z.-P. Li. Two regularization methods for a Cauchy problem for the Laplace equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338(1) :479–489, 2008.
- [177] H. H. Qin and T. Wei. Two regularization methods for the Cauchy problems of the Helmholtz equation. *Applied Mathematical Modelling*, 34 :947–967, 2010.
- [178] H. H. Qin, T. Wei, and R. Shi. Modified Tikhonov regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224 :39–53, 2009.
- [179] P. A. Ramachandran. Method of fundamental solutions : singular value decomposition analysis. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 18(11) :789–801, 2002.
- [180] K. Ramesh. *Digital photoelasticity : advanced techniques and applications*. Springer, 2000.
- [181] P. K. Rastogi. *Photomechanics*, volume 77. Springer Science & Business Media, 2003.
- [182] T. Regińska and K. Regiński. Approximate solution of a Cauchy problem for the Helmholtz equation. *Inverse Problems*, 22(3) :975, 2006.
- [183] J. Réthoré. A fully integrated noise robust strategy for the identification of constitutive laws from digital images. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(6) :631–660, 2010.
- [184] J. Réthoré, S. Roux, and F. Hild. Noise-robust stress intensity factor determination from kinematic field measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(13) :3763–3781, 2008.
- [185] J. Réthoré, S. Roux, and F. Hild. An extended and integrated digital image correlation technique applied to the analysis of fractured samples : The equilibrium gap method as a mechanical filter. *European Journal of Computational Mechanics*, 18(3-4) :285–306, 2009.
- [186] R. Rischette, T. N. Baranger, and S. Andrieux. Regularization of the noisy Cauchy problem solution approximated by an energy-like method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95(4) :271–287, 2013.

-
- [187] R. Rischette, T. N. Baranger, and N. Debit. Numerical analysis of an energy-like minimization method to solve the Cauchy problem with noisy data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(11) :3257–3269, 2011.
- [188] R. Rischette, T. N. Baranger, and N. Debit. Numerical analysis of an energy-like minimization method to solve a parabolic Cauchy problem with noisy data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 271 :206–222, 2014.
- [189] S. Roux and F. Hild. Digital Image Mechanical Identification (DIMI). *Experimental Mechanics*, 48(4) :495–508, 2008.
- [190] J. S. Sirkis. System response to automated grid methods. *Optical Engineering*, 29(12) :1485–1494, 1990.
- [191] Y. Sun. Modified method of fundamental solutions for the Cauchy problem connected with the Laplace equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 91(10) :2185–2198, 2014.
- [192] Y. Sun and S. He. A meshless method based on the method of fundamental solution for three-dimensional inverse heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 108 :945–960, 2017.
- [193] Y. Surrel. Les techniques optiques de mesure de champ : essai de classification. *Instrumentation, Mesure, Métrologie*, 4(3-4) :11–42, 2004.
- [194] M. A. Sutton, W. J. Wolters, W. H. Peters, W. F. Ranson, and S. R. McNeill. Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3) :133–139, 1983.
- [195] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin. *Methods for solving Ill-Posed Problems*. Nauka, 1986.
- [196] S. Touchal, F. Morestin, and M. Brunet. Mesure de champs de déplacements et de déformations par corrélation d’images numériques. In *Actes du Colloque National Mécamat’96*, pages 179–182. Aussois, France, 1996.
- [197] G. Wahba. Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 14(4) :651–667, 1977.
- [198] F. Yang, X. Liu, and X.-X. Li. Landweber iterative regularization method for identifying the unknown source of the modified Helmholtz equation. *Boundary Value Problems*, 2017(1) :91, 2017.
- [199] W. Q. Yang and L. Peng. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography. *Measurement Science and Technology*, 14(1) :R1, 2002.
- [200] W. Q. Yang, D. M. Spink, T. A. York, and H. McCann. An image-reconstruction algorithm based on Landweber’s iteration method for electrical-capacitance tomography. *Measurement Science and Technology*, 10(11) :1065, 1999.

- [201] D. Yuan and X. Cheng. Method of fundamental solutions with an optimal regularization technique for the Cauchy problem of the modified Helmholtz equation. *Journal of Computational Analysis and Applications*, page 54, 2012.
- [202] Z. Zhang and B. Pan. Identification of the orthotropic elastic stiffnesses using the virtual fields method considering current configuration. *Engineering Mechanics*, 34(10) :26, 2017.
- [203] Z. Zhang, B. Pan, M. Grédiac, and W. Song. Accuracy-enhanced constitutive parameter identification using virtual fields method and special stereo-digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering*, 103 :55–64, 2018.
- [204] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method*, volume 3. McGraw-hill London, 1977.

Méthodes de régularisation évanescence pour la complétion de données

Résumé : Les problèmes de complétion de données interviennent dans divers domaines de la physique, tels que la mécanique, l'acoustique ou la thermique. La mesure directe des conditions aux limites se heurte souvent à l'impossibilité de placer l'instrumentation adéquate. La détermination de ces données n'est alors possible que grâce à des informations complémentaires. Des mesures surabondantes sur une partie accessible de la frontière mènent à la résolution d'un problème inverse de type Cauchy. Cependant, dans certains cas, des mesures directes sur la frontière sont irréalisables, des mesures de champs plus facilement accessibles permettent de pallier ce problème. Cette thèse présente des méthodes de régularisation évanescence qui permettent de trouver, parmi toutes les solutions de l'équation d'équilibre, la solution du problème de complétion de données qui s'approche au mieux des données de type Cauchy ou de champs partiels. Ces processus itératifs ne dépendent pas d'un coefficient de régularisation et sont robustes vis à vis du bruit sur les données, qui sont recalculées et de ce fait débruitées. Nous nous intéressons, dans un premier temps, à la résolution de problèmes de Cauchy associés à l'équation d'Helmholtz. Une étude numérique complète est menée, en utilisant la méthode des solutions fondamentales en tant que méthode numérique pour discrétiser l'espace des solutions de l'équation d'Helmholtz. Des reconstructions précises attestent de l'efficacité et de la robustesse de la méthode. Nous présentons, dans un second temps, la généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles. Des simulations numériques, pour l'opérateur de Lamé, dans le cadre des éléments finis et des solutions fondamentales, montrent la capacité de la méthode à compléter et débruiter des données partielles de champs de déplacements et à identifier les conditions aux limites en tout point de la frontière. Nous retrouvons des reconstructions précises et un débruitage efficace des données lorsque l'algorithme est appliqué à des mesures réelles issues de corrélation d'images numériques. Un éventuel changement de comportement du matériau est détecté grâce à l'analyse des résidus de déplacements.

Fading regularization methods for data completion

Abstract : Data completion problems occur in many engineering fields, such as mechanical, acoustical and thermal sciences. Direct measurement of boundary conditions is often confronting with the impossibility of placing the appropriate instrumentation. The determination of these data is then possible only through additional informations. Overprescribed measurements on an accessible part of the boundary lead to the resolution of an inverse Cauchy problem. However, in some cases, direct measurements on the boundary are inaccessible, to overcome this problem field measurements are more easily accessible. This thesis presents fading regularization methods that allow to find, among all the solutions of the equilibrium equation, the solution of the data completion problem which fits at best Cauchy or partial fields data. These iterative processes do not depend on a regularization coefficient and are robust with respect to the noise on the data, which are recomputed and therefore denoised. We are interested initially in solving Cauchy problems associated with the Helmholtz equation. A complete numerical study is made, using the method of fundamental solutions as a numerical method for discretizing the space of the Helmholtz equation solutions. Accurate reconstructions attest to the efficiency and the robustness of the method. We present, in a second time, the generalization of the fading regularization method to the data completion problems from partial full-field measurements. Numerical simulations, for the Lamé operator, using the finite element method or the method of fundamental solutions, show the ability of the iterative process to complete and denoise partial displacements fields data and to identify the boundary conditions at any point. We find precise reconstructions and efficient denoising of the data when the algorithm is applied to real measurements from digital image correlation. A possible change in the material behavior is detected thanks to the analysis of the displacements residuals.

Mots clés : Identification ; Problèmes inverses ; Problèmes de Cauchy ; Problèmes de complétion de données ; Régularisation ; Méthode des solutions fondamentales ; Méthode des éléments finis ; Corrélation d'images numériques

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
CNRS UMR 6139
Université de Caen BP 5186
14032 Caen Cedex

